جامعة الملك سعود
King Saud University

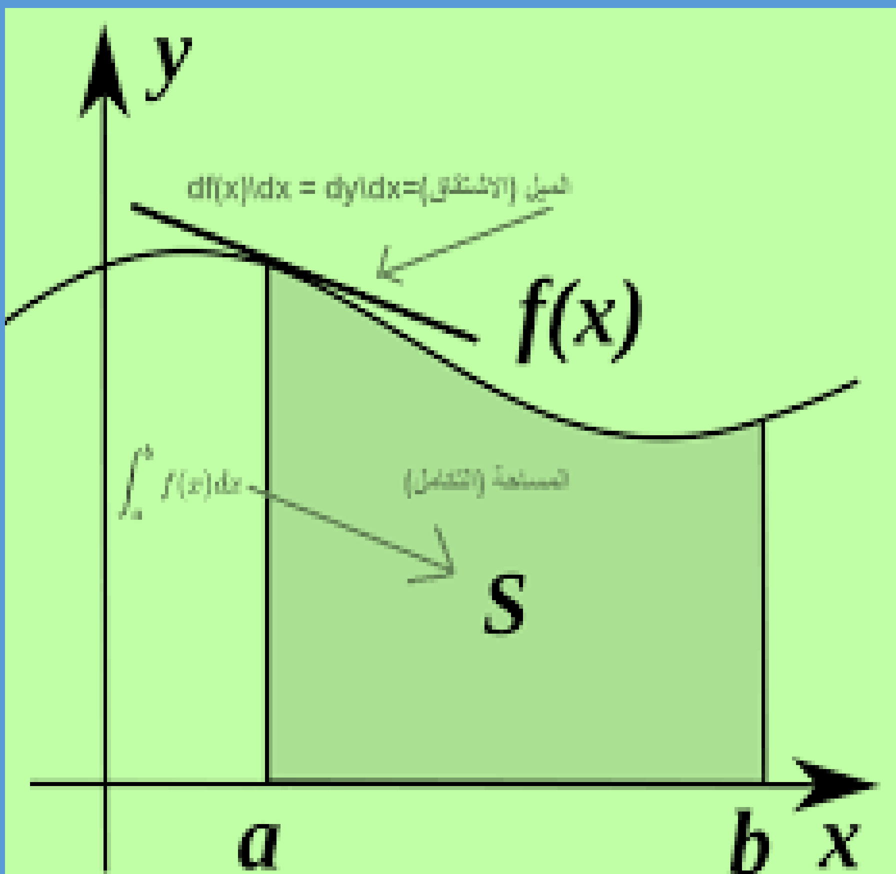
مركز التدريب وخدمة المجتمع

$$f(x) = \int_0^x f'(t)\, dt$$

دبلوم ادارة الأعمال

155 ريض

مقدمة في حساب التفاضل و التكامل



الفصل الأول

معلومات عامة

فيما يلي سنقوم بتقديم موجز وسريع لبعض المفاهيم الرياضية الأولية، لأنَّ الطالب الجامعي قد تعرَّف على معظمها خلال مراحل التعليم السابقة، ولكن لابدَّ من هذا التقديم بسبب ارتكاز محتويات هذا الكتاب المخصَّص لتدريس مقرَّر من مقرَّرات الفصل الأول لطلبة السنة الأولى فيزياء. إنَّ البراهين والإثباتات الخاصة بفقرات هذا التمهيد تمَّ تجاوزها حيث يمكن لمن يودّ الإطلاع عليها الرجوع إلى المراجع ذات الصلة والتي ذكر بعضها في نهاية هذا الكتاب.

١–١– مراجعة عامة في المجموعات وخصائصها:

من المعلوم أنَّ مفهوم المجموعة يعدُّ من الأهمية بمكان في مجال الرياضيات عامة بحيث أنَّه يأتي بالمرتبة الثانية من حيث الأهمية بعد مفهوم الأعداد.

نعلم أنَّ المجموعة هي **تَجَمُّع** لأشياء تشترك فيما بينها بصفة واحدة على الأقل، وتُدعى هذه الأشياء بـــ **العناصر** ، وقد درجت العادة على أن يُرمز للمجموعات بحروف لاتينية كبيرة من قبيل A و B و C و …… إلخ ، أو بأحرف إغريقية كبيرة من قبيل Ω و Ξ و Θ و …… إلخ ، وأمَّا عناصر المجموعات فيُرمز لها بأحرف لاتينية صغيرة من قبيل a و b و c و ….. إلخ ، أو بأحرف إغريقية صغيرة من قبيل α و β و γ و …… إلخ .

١–١–٢– مجموعات الأعداد

من المجموعات الهامة في الرياضيات عامة (وفي الحساب على وجه الخصوص) ما يعرف بـ **مجموعات الأعداد** ، فقد دُرِّست مجموعات الأعداد هذه في مراحل التعليم الأساسي بشكل مقبول ، ولكن بما أنَّ مقررنا هذا سيركِّز على جزئ من التحليل الحقيقي ، فإنَّنا سنعرض وبشكلٍ سريع مجموعات الأعداد هذه (وعلى وجه الخصوص الحقيقية منها) لكي يتعرف القارئ على المصطلحات والرموز الخاصة بها والتي سنستخدمها في متن هذا الكتاب .

١– إنَّ أبســـط مجموعات الأعداد هي ما تُعرف باســـم **مجموعة الأعداد الطبيعية** وقد كانت أولى مجموعات الأعداد التي استعملها الإنَّسان عندما استخدمها في العدّ لمعرفة ممتلكاته وفي معاملاته التجارية و ……. إلخ ، حيث سنصطلح على أنَّ مجموعة **الأعداد الطبيعية** هي تلك المجوعة المكوَّنة من الأعداد 1 **و** 2 **و** 3 **و** 4 **و……** ، وسنرمز لها بـ N أي أنَّه لدينا :

$$N := \{1, 2, 3, 4, \ldots\ldots\}$$

في هذا الصــدد تجدر الملاحظة إلى أنَّه في بعض المراجع تُأخذ مجموعة الأعداد الطبيعية على أنَّها تلك المجوعة المكوَّنة من الأعداد 0 و 1 و 2 و 3 و 4 و...... ، ولكن مســألة كون مجموعة الأعداد الطبيعية تبدأ من الصــفر أو من الواحد ما زالت من المسـائل الخلافية ، ولكن في كتابنا هذا سـنرمز للمجموعة $\{0,1,2,3,4,.......\}$ بـــ N^o ، أي أنَّه لدينا :

$$\mathrm{N}^o := \{0,1,2,3,4,.......\}$$

٢–فإذا أضفنا لمجموعة الأعداد الطبيعية N الصفر والأعداد السالبة المقابلة للأعداد الطبيعية (أي الأعداد $0,-1,-2,-3,-4,.......$) ، فإنَّنا نحصل على ما يُسمَّى بمجموعة **الأعداد الصحيحة** والتي سنرمز لها بـ Z أي أنَّه لدينا :

$$\mathrm{Z} := \{.......,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,.......\}$$

٣–والآن إذا أخذنا تلك الأعداد التي يمكن التعبير عنها كحاصـل قسـمة عددين صـحيحين (بشـرط أنَّ العدد الذي في المقام لا يساوي الصفر) ، فإنَّنا نحصل على مجموعة جديدة تُعرف باســم **مجموعة الأعداد العادية** (أو **الكسرية** أو **القياسية**) وسنرمز لها بـ Q ، أي أنَّه لدينا :

$$\mathrm{Q} := \left\{ x \;\middle|\; x := \frac{a}{b} \quad ; a \in \mathrm{Z} \;\&\; b \in \mathrm{N} \right\}$$

٤–إنَّ الأعداد الممثَّلة بكسـور عشـرية محدودة أو بكسـور عشـرية لا نهائية متكررة هي أعداد عادية ، فعلى سـبيل المثال العدد $o.62843$ يرمز للعدد العادي $\frac{62843}{100\,000}$ ، وكذلك $o.666666.......$ يرمز للعدد العادي $\frac{2}{3}$ ، في حين وجد أنَّ الكسور العشرية اللانهائية غير المتكررة تمثل **أعداداً غير عادية** ، مثل $\pi = 3.1415926535897933........$ ، وكذلك **العدد النيبري** $\mathbf{e} = 2.7182818284590451.........$ وهذا الرمز $\mathbf{e}$ **مثبَّت** للعدد النيبري حيثما ورد، في هذا الكتاب ، ومن الأعداد التي ليست عادية أيضاً العدد $\sqrt{2} = 1.4142135623730951......$.

٥–وأخيراً إذا قمنا بضم الأعداد غير العادية إلى مجموعة الأعداد العادية فإنَّه ستتكوَّن لدينا مجموعة جديدة تُدعى بـمجموعة **الأعداد الحقيقية** ، وسنرمز لها بـ R ، وسنرمز لمجموعة الأعداد الحقيقية **المغايرة للصفر** و **الموجبة والسالبة** بـ R^* و R^+ و R^- على الترتيب .

مجموعة الأعداد الحقيقية الموسَّعة :إذا قمنا بإضافة القيمتين $-\infty$ و $+\infty$ إلى مجموعة الأعــداد الحقيقية R ، فإنَّنا نحصل على مجموعة جديدة تُدعى بـ **مجموعة الأعداد الحقيقية الموسَّعة** ويُرمز لها بـ $\overline{\mathrm{R}}$.

١–١–٣– ملاحظات :

١َ– في مجموعة الأعداد الحقيقية الموسَّعة $\overline{\mathrm{R}}$ العلاقات التالية :

1) $x+(+\infty)=+\infty \quad for\ x\neq-\infty$

2) $x+(-\infty)=-\infty \quad for\ x\neq+\infty$

3) $x\cdot(+\infty)=+\infty \quad for\ x>0$

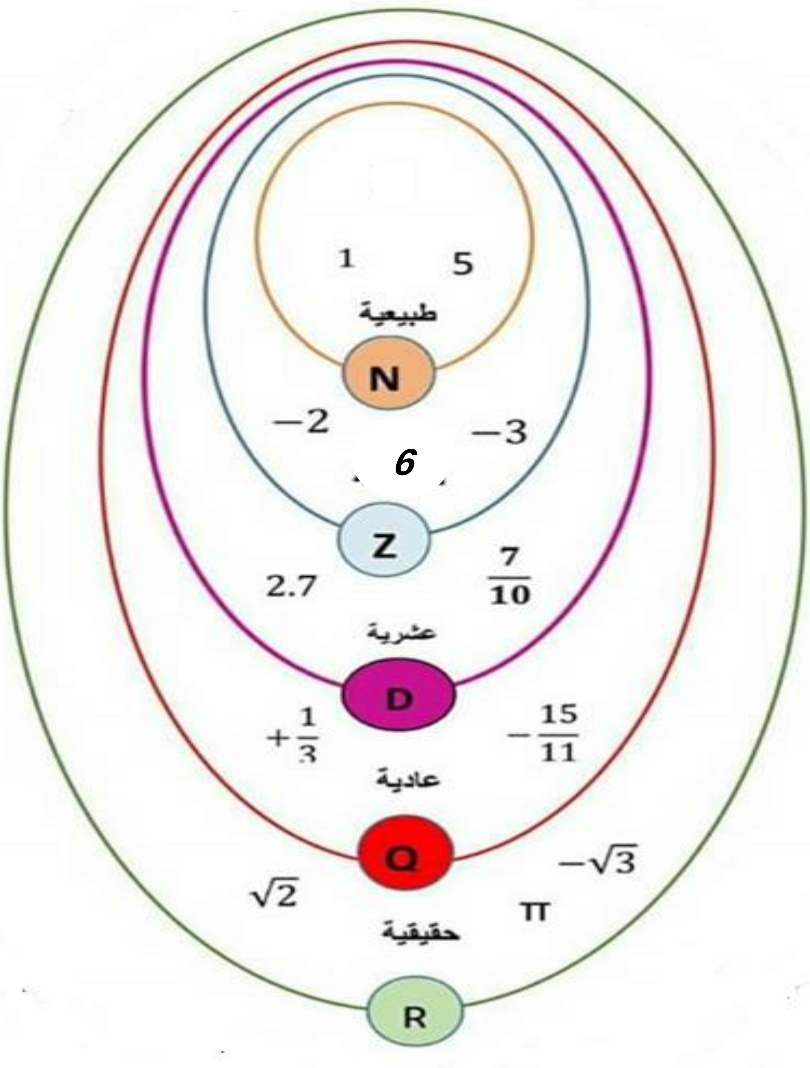
4) $x\cdot(-\infty)=-\infty \quad for\ x>0$

5) $\dfrac{x}{+\infty}=\dfrac{x}{-\infty}=0 \quad for\ x\in \mathrm{R}$

٢ً– إنَّ العبارات التالية غير معرَّفة (تسمى حالات عدم تعيين) :

$0\cdot(\pm\infty)$ **&** $(+\infty)+(-\infty)=\infty-\infty$

مجموعات الأعداد



$\mathrm{N}\subset Z\subset D\subset Q\subset R$

١ – ١ – ٤ – ملاحظات :

١ً – في دراستنا المقبلة عندما نذكر كلمة **عدد** (أو **قيمة**) فإنَّنا نقصد بذلك عدداً (أو **قيمة**) حقيقياً ما لم ننوِّه إلى خلاف ذلك صراحةً .

٢ً – يمكن تمثيل الأعداد الحقيقية تصويرياً من خلال أخذ خط مستقيم موجَّه (أي على شكل سهم) يكون رأسه للدلالة على تزايد القيم المتوضِّعة عليه ، وغالباً ما يُأخذ أفقياً على الشكل التالي :

هذا ويقال عن العدد a إنَّه موجب إذا كان $a > 0$ ، وإنَّه غير سـالب إذا كان $a \geq 0$ ، وكذلك يقال إنَّ a عدد سـالب إذا كان $a < 0$ ، وإنَّه غير موجب إذا كان $a \leq 0$ (حيث أنَّ الصـــفر ليس موجباً ولا ســـالباً) ، كما يقال إنَّ العددين a و b لهما نفس الإشـارة إذا كان كلاهما موجبين أو كلاهما سـالبين ، ويقال إنَّ لهما إشـارتين مختلفتين إذا كان أحدهما موجباً والآخر سالباً .

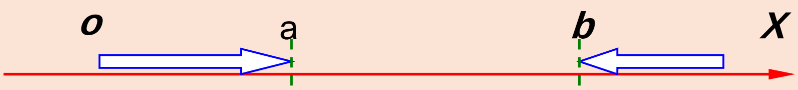
٣ً – يمكن إثبات ، أن كل عدد حقيقي يمكن تخصيصه بنقطة وحيدة على المحور الحقيقي **oX** ، وبالعكس

٤ – إنَّ الخط المستقيم **oX** يُدعى بـــ **خط الإحداثيات** أو بـــ **المحور الحقيقي** أو **المستقيم الحقيقي** (وذلك بسبب المقابلة بين الأعداد والنقط) .

٥ً – إنَّ الخط المستقيم **oX** والموافق لمجموعة الأعداد الحقيقية الموسَّعة $\overline{\mathbb{R}}$ يُدعى بـ **المستقيم الحقيقي الموسَّع** .

١ – ١ – ٥ – تعريف (الفترة أو المجال) :

مجموعـة النقط من المحور الحقيقي **oX** والمحـدودة بالقيمتين (النقطتين) a و b مع $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ تُدعى بـ **فترة** (أنظر الشكل التالي) :



حيث نميِّز هنا الحالات التالية :

أ – لدينا $-\infty < a < b < +\infty$ والنقطتان a و b تنتميان إلى الفترة المفترضـة ، عندئذ تُدعى هذه الفترة بــــــ **فترة مغلقة** ، ويرمز لها بـ $[a , b]$.

ب – النقطتان a و b لا تنتميان إلى الفترة المفترضة ، حيث تُدعى هذه الفترة بـــ **فترة مفتوحة** ، ويرمز لها بـ (a , b) .

ج- إحدى النقطتين a أو b تنتمي إلى الفترة المفترضة ، حيث تُدعى هذه الفترة بـ **فترة بصف مغلقة** أو **فترة نصف مفتوحة** ، وهنا نميّز بين حالتين [a,b) نصف مفتوحة من الشمال و(a,b] نصف مفتوحة من اليمين.

١-٢- التطبيقات والدوال الحقيقية على R :

سنقدم في هذا الفصل مفهوم الدالة (التابع) الذي يلعب دوراً أساسياً في جميع مناحي الرياضيات وفي العلوم الهندسية والتطبيقية، إن معظم الأشياء التي نتعامل معها من حولنا كدرجة الحرارة، سرعة مركبة، الضغط الجوي ونسبة الرطوبة وغيرها.. هي متغيرات ترتبط بمتغيرات أخرى كالزمن والارتفاع.. وغيرها.

١-٢-١-العلاقة

على سبيل المثال لتكن لدينا A هي مجموعة الأعداد $\{-5 , -1 , 0 , 2 , \sqrt{3}\}$ ، ولنقرن كل عدد من هذه الأعداد بعددٍ آخر مساوٍ لمربعه ، فعندئذ نحصل على مجموعة أخرى B عناصرها $25 , 1 , 0 , 4 , 3$. إنَّ عملية **الإقران** (أو المقابلة) هذه تُعرِّف لنا علاقة f بين المجموعتين A و B ، والتي يمكن صياغتها على النحو التالي :

$$a \, f \, b := a^2 \qquad ; a \in A$$

هذه العلاقة تُدعى **تطبيقاً** بين المجموعتين A و B ، وهكذا يمكننا أن نصيغ تعريف التطبيق على النحو الآتي :

١-٢-١- تعريف (التطبيق او الدالة):

لتكن X , Y مجموعتين عدديتين غير خاليتين من مجموعة الاعداد الحقيقية $\boldsymbol{R}$، إذا وجدت علاقة f تربط كل عنصر x من عناصر X بعنصر واحد فقط y من Y، عندئذٍ نقول عن العلاقة f إنها دالة (او تطبيق او دالة) من المجموعة X إلى المجموعة Y ونكتب:

$$f : X \to Y$$

ونرمز للدالة f بالرمز $y = f(x)$، نقول عن x إنه المتحول المستقل و y الدالة.

نسمى المجموعة X مجال تعريف الدالة (المنطلق) (***Domain***) كما نسمي المجموعة Y مجموعة بالمجال المقابل (المستقر) (***Codomain***).

ونقول عن y إنه صورة x وفق الدالة f .

١-٢-٢- أمثلة :

1- الدالَّة $f: A \longrightarrow B$ المعطاة بالشكل $f(x) = x^2$ **تسمى بالدالة التربيعية تربط كل عدد بمربعه**

اذا كانت A هي المجموعة $A=\{-5 , -1 , 0 , 2 , \sqrt{3}\}$ في مجموعة الأعداد الحقيقية R

فان صورة هذه المجموعة وفق f :

مجموعة التعريف	x	-5	-1	0	1.7321	2
مجموعة القيم	$f(x)$	25	1	0	3	4

٢–أوجد مجموعة تعريف ومجموعة قيم الدالة $y=\frac{x+2}{x^2-3x}$

الحل: بما أن $x^2-3x=x(x-3)$ فإن y لا يكون معرفاً من أجل $x=0, x=3$ لذلك فإن مجموعة تعريف الدالة هو ***R/{0,3}*** ومجموعة قيم الدالة هي ***R***.

تدريب

أ– ما هو مجوعة تعريف وقيم الدالَّة f :

$f(x)=2/(x-1)$

ب– ما هو مجوعة تعريف وقيم الدالَّة g والمعرفة من خلال العلاقة :

$g(x)=\sqrt{16-x^2}$

١–٢–٣بعض انواع الدوال الحقيقية

منها دوال جبرية ودوال أسية ودوال لوغاريتمية ومثلثية وغيرها ، وهي كما يلي :

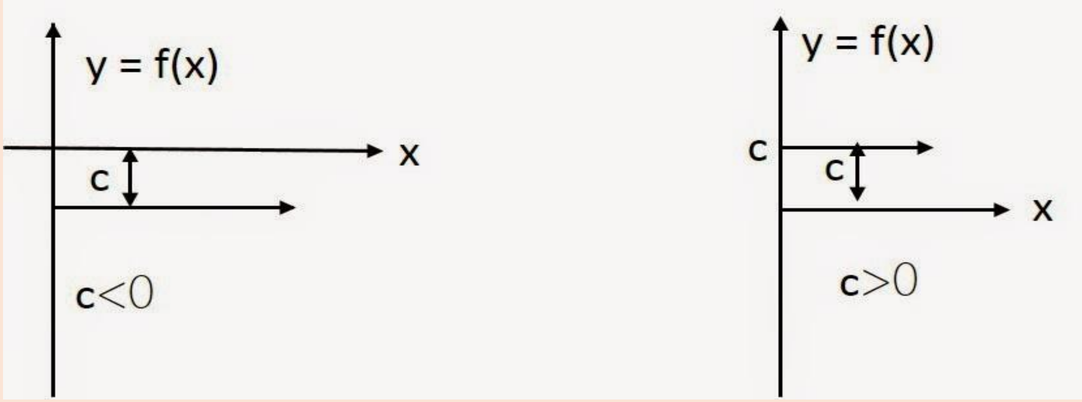
١–الدالة الثابتة

يقال للدالة ***f*** بأنها داله ثابتة إذا كان مداها مكون من عدد ثابت ***c*** أي أن قاعدة تعريفها هي :

$f(x)=c$

حيث $c \in R$.

رسم الدالة

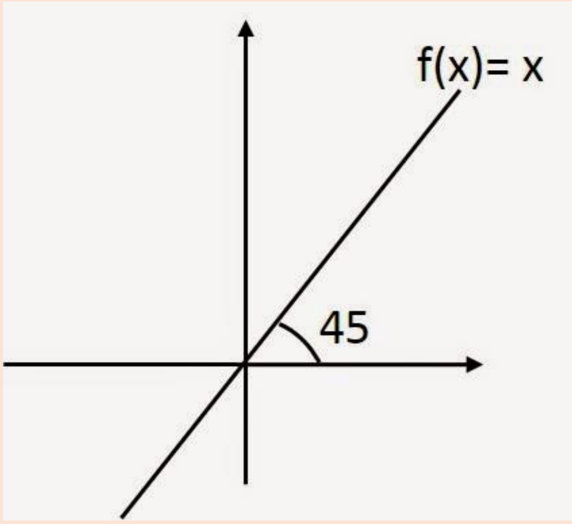


٢–داله التطابق

يقال للدالة $f : R \rightarrow F$ بأنها دالة تطابق إذا كانت صورة كل عنصر في المجال ، العنصر نفسة في المدى :

$f(x)=x \quad , \quad \forall x \in R$

الشكل البياني للدالة :

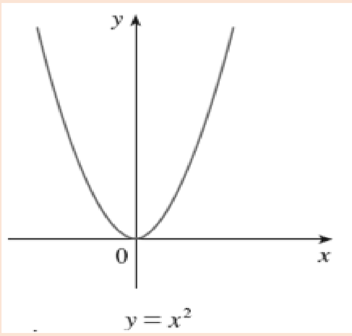


وهو عبارة عن خط مستقيم يمر بنقطة الأصل ويميل على الأفقي بزاوية ٤٥ ونطاقها أي مجموعة تعريفها تساوي مجموعة الأعداد الحقيقية ، ومداها مجموعة الأعداد الحقيقية ، إلا في حال التعريف على مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية .

٣ً–الدالة التربيعية

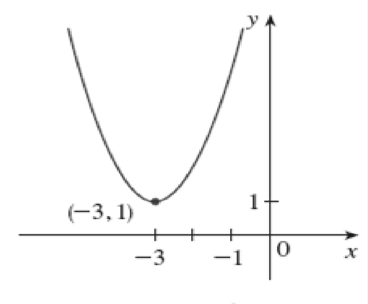
نسمي الدالة $y= f(x)= x^2$ بالدالة التربيعية

رسم المنحني البياني



وهي ابسط دالة تربيعية

والدالة $y = f(x) = x^2 + 6x + 10$ هي دالة تربيعية **ويمكن كتابتها بالشكل** $y = (x+3)^2 + 1$ **والمنحني البياني للدالة**



$y = (x+3)^2 + 1$

٤ً–الدوال كثيرة الحدود

وتكتب على الصورة :

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+a_0x^0$$

ويقال بأنها كثيرة حدود من الدرجة n , n $(0\neq a_n)$ عدد صحيح موجب

$a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, a_n \in R$

تسمى معاملات الدالة، وهي عبارة عن أعداد حقيقية ثابتة ، ونطاق (مجال ، أو مجموعة تعريف الدالة هي مجموعة الأعداد الحقيقية **R) .**

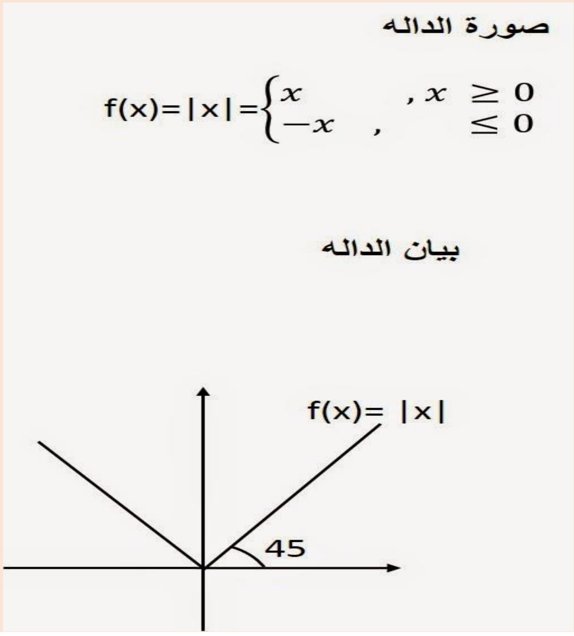
ملاحظة: اذا كانت: ***n=0*** الدالة ثابتة

n=1 الدالة تكون خطية

n=2 الدالة تكون تربيعية

٥ً– دالة القيمة المطلقة

ويكتب هذا النوع من الدوال كالتالي :



مجال دالة القيمة المطلقة ***R* ,** أما مدى الدالة يساوي مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة [***0***،∞[

٦–الدالة الأسية

وهذه الدالة هي الأكثر إستخداما في التطبيقات ولتسهيل الكثير من الحسابات ، فهي تستخدم في الفيزياء والبيولوجيا والكيمياء والعلوم الهندسية ، والحاسبات .

وقاعدة الدالة تعرف كالأتي :

$f(x)=a^x \quad ,a > 0 \quad , a \neq 1$

حيث ***a*** عدد حقيقي موجب .

مجال الدالة الأسية

مجالها مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة

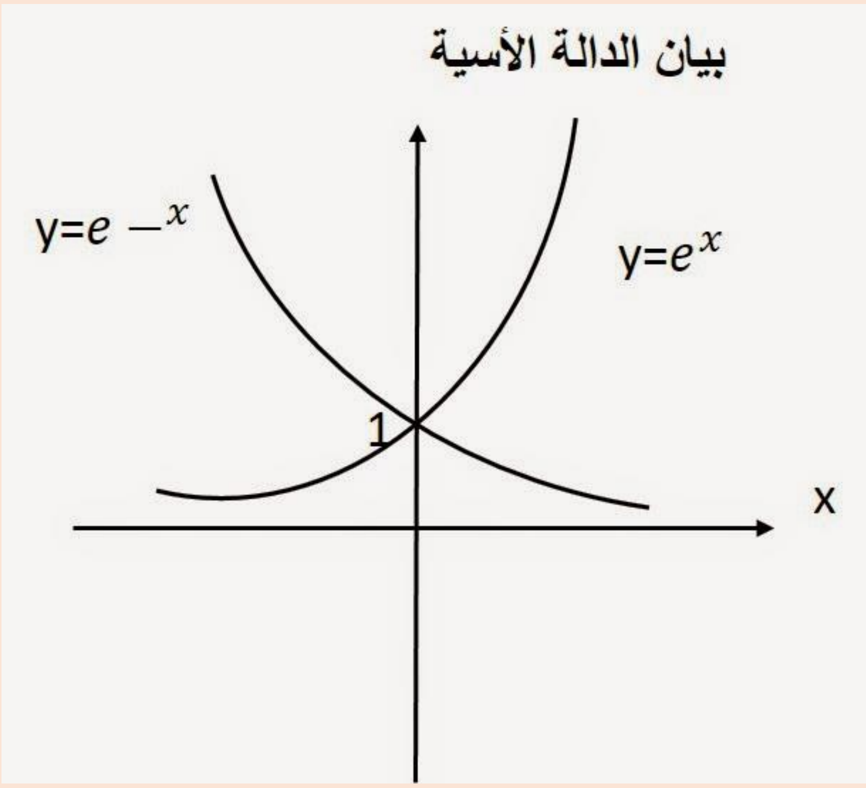
مدى الدالة الأسية

مدى الدالة يساوي مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة]٠،∞[

حاله خاصة

وهي داله ذات أهمية كبيرة لدى علماء الرياضيات وهي عندما ***a* =e** وتسمى (الدالة الأسية ذات الأساس الطبيعي ، ويسمى بالأساس الطبيعي للوغاريتمات وله قيمة تقريبية تساوي ٢,٧١٨٢٨

بيان الدالة :



٧–الدالة اللوغاريتمية

وتعرف هذه الدالة بالقاعدة التالية :

$y = Log_a x , a > 0 , a \neq 1$

وعندما **$a = e$** تكتب الدالة على الصورة الأتية :

$y = Log_a x$ or $y = Ln x$

مجال الدالة

هو مجموعة الاعداد الحقيقية الموجبة .

ومدى الدالة

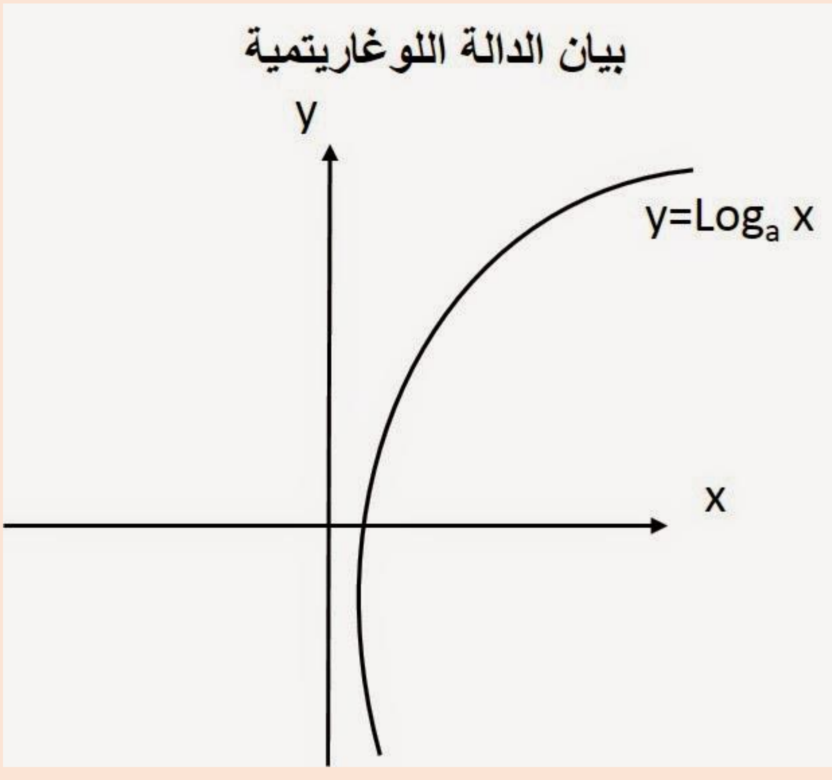
مجموعة الأعداد الحقيقية

ونستنتج من ماسبق أن الدالة اللوغاريتمية هي الدالة العكسية للدالة الأسية .

أي أن :

$Ln\ b = x \Leftrightarrow e^x = b$

بيان الدالة



٨ً–الدالة الكسرية

هي الدالة التي يمكن كتابتها والتعبير عنها بخارج قسمة كثيرتي حدود الصورة :

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)} \quad , x \in R , q(x) \neq 0$$

حيث أن : $P(x)$, $q(x)$ كثيرتي حدود .

مجال ومدى الدالة

مجال الدالة هو جميع الأعداد الحقيقية ماعدا التي تجعل المقام يساوي صفرا **, ($q(x) =0$)** حيث أن القسمة على الصفر كمية غير معرفة .

مداها هو حسب التعويض فى المعادلة اى مجموعة جزئية من مجموعة الاعداد الحقيقة.

٩ً – الدوال الجذرية

وهي تكتب على الصورة :

$$y= \sqrt{f(x)}$$

مجال ومدى الدالة :

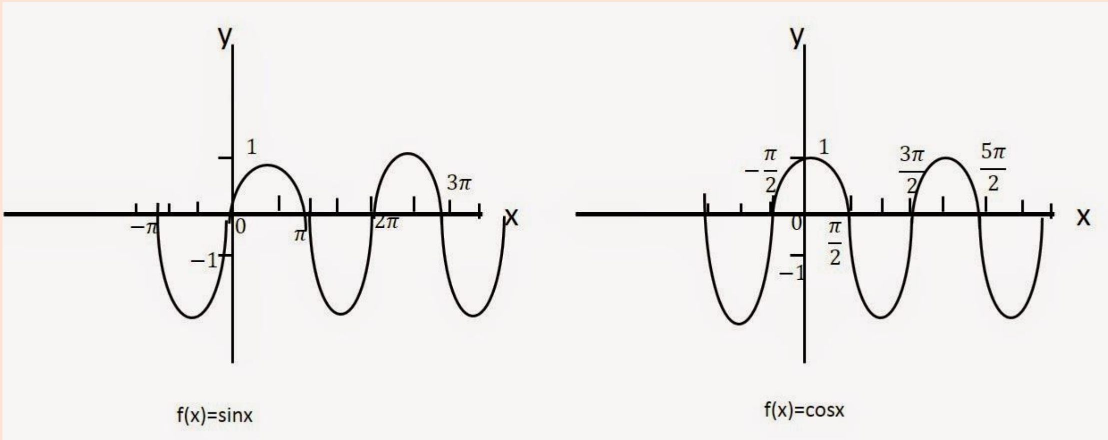
مجال الدالة مجموعة الأعداد الحقيقية التي تجعل ماتحت الجذر أكبر أو يساوي صفر ، أما مداها هو حسب التعويض فى المعادلة اى مجموعة جزئية من مجموعة الاعداد الحقيقة .

١٠ً–الدوال المثلثية الدورية

هي الدوال المعداة بواسطة علاقات حساب المثلثات وهي :

$y=sinx \quad , \quad y = cosx \quad , \quad y = tanx$

بيان الدالة



مجال الدالة ومداها

مجال الدالة هو مجموعة الاعداد الحقيقية ، ومداها هو [−١ ، ١]

الدور 2π

$$\sin(x+2\pi)=\sin x \qquad \cos(x+2\pi)=\cos x$$

$$\sec(x+2\pi)=\sec x \qquad \csc(x+2\pi)=\csc x$$

بعض القوانين الهامة للدوال المثلثية

(1) $\sin^2 x+\cos^2 x=1$

(2) $1+\tan^2 x=\sec^2 x$

(3) $1+\cot^2 x=\csc^2 x$

(4) $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$

(5) $\cos 2x=1-2\sin^2 x$

(6) $\cos 2x=2\cos^2 x-1$

(7) $\sin 2x=2\sin x\cos x$

(8) $\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\sin y\cos x$

(9) $\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y$

١–٢–٣ العمليات الحسابية على الدوال *Arithmetic Operations on functions*

إذا كان $f(x)$, $g(x)$ دالةين فباستخدام العمليات الحسابية على R نعرف العمليات الأربع على الدوال بالشكل:

تعريف(٤):

ليكن الدالةان $f(x):X_1\to Y_1$, $g(x):X_2\to Y_2$ فإننا نعرف عمليات جمع وطرح وضرب وقسمة الدوال كما يلي:

١) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ ومجموع التعريف $X_1 \cap X_2$.

٢) $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$ ومجموعة تعريفه $X_1 \cap X_2$.

٣) $(f.g)(x)=f(x).g(x)$ ومجموعة تعريفه $X_1 \cap X_2$.

٤) $(f/g)(x)=f(x)/g(x)\ ;\ g(x)\neq 0$ ومجموعة تعريفه $X_1 \cap X_2$.

مثال(٦):

إذا كان $f(x)=x^2+2x+1$, $g(x)=\sqrt{x-1}$ فأوجد كلاً من:

$f+g$, $f-g$ ، $f.g$, f/g .

الحل: إن مجال تعريف الدالة $f(x)$ هو $\mathbb{R}$ ومجال تعريف الدالة $g(x)$ هو $[1,\infty)$ وبالتالي فإن مجال تعريف كل من $f+g$, $f-g$, $f.g$ هو $[1,\infty)$ أما مجال تعريف f/g فهو $(1,\infty)$ (لماذا؟)

وأيضاً:

$$f(x)+g(x)=(x^2+2x+1)+\sqrt{x-1}$$
$$f(x)-g(x)=(x^2+2x+1)-\sqrt{x-1}$$
$$f(x).g(x)=(x^2+2x+1).\sqrt{x-1}$$
$$f(x)/g(x)=\frac{(x^2+2x+1)}{\sqrt{x-1}}$$

تمارين

I . في التمارين التالية عين النطاق و المدى للدوال التالية:

1. $f(x)=x$, **2.** $g(x)=\sqrt{x-1}$. **3.** $f(x)=\sqrt{x+1}$

4. $y=\frac{1}{x-2}$ **5.** $y=\frac{1}{x}-2$ **6.** $y=\frac{1}{x}+2$ **7.** $y=\frac{1}{x+2}$

8. $y=\frac{1}{(x-1)^2}$ **9.** $y=\frac{1}{x^2}-1$ **10.** $y=\frac{1}{x^2}+1$ **11.** $y=\frac{1}{(x+1)^2}$

١-٣-نهايات الدوال *Limits of Functions*

١-تعاريف ومفاهيم أساسية :

يعد مفهوم النهاية من المفاهيم الأساسية في التحليل الرياضي وخاصة في حساب التفاضل والتكامل.

في مسائل النهايات نهتم بالقيم التي يأخذها الدالة $f(x)$ عندما تكون قيمة المتحول المستقل x قريبة من العدد a دون أن تكون مساوية له.

فعندما يقترب المتحول المستقل x قرباً كافياً من العدد a (دون أن يساويه) فهل تقترب قيم الدالة $f(x)$ من عدد ما A ؟

وإذا تحقق ذلك فإننا نقول إن العدد A هو نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من a ونرمز لذلك بالشكل التالي:

ويكتب هذا التعريف إلى الصورة التالية :

$$\mathbf{f\,(x) \to A \quad as\; x \to a \quad or \lim_{x \to a} f\,(x) = A}$$

من أجل توضيح مفهوم النهاية لنستعرض المثال التوضيحي التالي:

ليكن $f(x)=3x+2$ ولتكن $a=4$ ولننظر إلى القيم التي تقترب منها قيم الدالة $f(x)$ عندما تقترب **x** إلى $a=4$.
لنعط للدالة $f(x)$ قيماً قريبة من النقطة $a=4$ ولنلاحظ قيمه الدالة عند تلك النقاط ، سوف لا نهتم بقيمة الدالة عند النقطة $a=4$ بل عند النقاط التي تقترب منها والجدول التالي يوضح لنا بعض القيم:

x	$f(x)$	x	$f(x)$
3.9	***13.7000***	***4.1***	***14.3000***
3.99	***13.9700***	***4.01***	***14.0300***
3.999	***13.9970***	***4.001***	***14.0030***
3.9999	***13.9997***	***4.0001***	***14.0003***
3.99999	***13.99997***	***4.00001***	***14.00003***

نلاحظ من الجدول أنه كلما ازداد x قرباً من العدد **4** فإن قيم الدالة $f(x)$ تقترب أكثر من القيمة **14** . بالتالي نستطيع القول إن :

$$\lim_{x\to 4} f(x)=\lim_{x\to 4}(3x+2)=14$$

لنقوم بالصياغة الرياضية لنهاية دالة معتمدين على الجدول ، من الجدول السابق نلاحظ ما يلي :

إذا كانت $3.9<x<4.1$ فإن $13.7<f(x)<14.3$

وإذا كانت $3.99<x<4.01$ فإن $13.97<f(x)<14.03$

وإذا كانت $3.999<x<4.001$ فإن $13.997<f(x)<14.003$

وإذا كانت $3.9999<x<4.0001$ فإن $13.9997<f(x)<14.0003$

وإذا كانت $3.99999<x<4.00001$ فإن $13.9997<f(x)<14.0003$

ومن وكل العبارات السابقة نستطيع القول إنه من أجل العدد الصغير الموجب ε ، يوجد عدد صغير موجب آخر δ بحيث :

مثال ():

إذا كان $f(x)=5x+2$ فان $\lim_{x\to 2} f(x)=12$

مثال ( ): أثبت أن $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$

الحل : بما أنه من أجل $x\neq 1$ لدينا: $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$

تمرين ( ): بشكل مشابه لما سبق أثبت أن: $\lim_{x\to 3}x^2=9$

تمرين (): بشكل مشابه لما سبق أثبت أن:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

في هذا المثال نجد أن الدالة: $\frac{x^2 - 4}{x - 2}$ غير معرفة عند $x = 2$ لأنها تساوى $(0/0)$

نهاية دالة عند اللانهاية:

تعريف (٤):

ليكن الدالة $f(x)$ معرف على المجال (a,∞)، نقول إن العدد **A** هو نهاية الدالة $f(x)$ عندما $x \to \infty$ إذا اقتربت **f(x)** من **A** عندما تزداد قيمة **X** بشكل كبير أي عندما تقترب من للانهاية ونكتب:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$$

مثال ( ):

أن أ) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ ، ب) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

ملاحظات: نهاية دالة كسرية $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ **عندما المتغير** $x\to\infty$ **تكون:**

١. اذا كانت درجة p(x) اصغر من درجة q(x) فان $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = 0$

مثال:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x+5}{4x^3-2} = \frac{\lim_{x\to\infty}(\frac{3x+5}{x^3})}{\lim_{x\to\infty}(\frac{4x^3-2}{x^3})} = \frac{\lim_{x\to\infty}(\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x^3})}{\lim_{x\to\infty}(4-\frac{2}{x^3})} = \frac{0+0}{4-0} = 0$$

٢. اذا كانت درجة p(x) اكبر من درجة q(x) فان $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \infty$

مثال:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+5}{4x-2} = \frac{\lim_{x\to\infty}(\frac{3x^2+5}{x^2})}{\lim_{x\to\infty}(\frac{4x-2}{x^2})} = \frac{\lim_{x\to\infty}(3+\frac{5}{x^2})}{\lim_{x\to\infty}(\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2})} = \frac{3+0}{0-0} = \frac{3}{0} = \infty$$

٣. اذا كانت درجة p(x) تســاوي من درجة q(x) فان $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{q(x)}$ تســاوي امثال الحد الاكبر درجة ل pعلى امثال الحد الاكبر درجة لq .

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+5}{4x-2}=\frac{\lim_{x\to\infty}(\frac{3x+5}{x})}{\lim_{x\to\infty}(\frac{4x-2}{x})}=\frac{\lim_{x\to\infty}(3+\frac{5}{x})}{\lim_{x\to\infty}(4-\frac{2}{x})}=\frac{3+\lim_{x\to\infty}(\frac{5}{x})}{4-\lim_{x\to\infty}(\frac{2}{x})}\frac{3+0}{4-0}=\frac{3}{4}$$

خواص النهايات

سنستعرض أهم خواص النهايات والتي تساعدنا في حساب النهايات دون استخدام التعريف وسوف نستعرض هذه الخواص دون التعرض للبراهين .

١ – نهاية الدالة الثابت:

إذا كان $f(x)=c\ ;\ c\in R$ فإن:

$$\forall a,c\in R\ ;\ \lim_{x\to a}f(x)=c$$

٢ – إذا كان $\lim_{x\to a}f(x)=A$ ومن أجل العدد $\alpha\in R$

فإن: $\lim_{x\to a}(\alpha.f(x))=\alpha\lim f(x)=\alpha A$

٣ – نهاية مجموع (فرق) دالتين.

إذا كان $\lim_{x\to a}f(x)=A\ ,\ \lim_{x\to a}g(x)=B$ فإن:

$$\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=A\pm B$$

٤ – نهاية جداء دالتين:

إذا كان $\lim_{x\to a}f(x)=A\ ,\ \lim_{x\to a}g(x)=B$ فإن:

$$\lim_{x\to a}(f(x).g(x))=A.B$$

٥ – نهاية قسمة دالتين:

إذا كان $\lim_{x\to a}f(x)=A\ ,\ \lim_{x\to a}g(x)=B\ ;(B\neq 0)$ فإن:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to A}f(x)}{\lim_{x\to B}g(x)}=\frac{A}{B}$$

٦ – نهاية مقلوب دالة:

ليكن $\lim_{x\to a}f(x)=A\neq 0$ فإن:

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{A}\ ;\ A\neq 0$$

٧ – إذا كان $\lim_{x\to a}f(x)=A\ ,\ \lim_{x\to a}g(x)=B$

وكان: $f(x) \le g(x)$

فإن:

$$\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x)$$

أي $A \le B$

مثال (٣٢): أوجد النهاية

$$\lim_{x\to 5}\left(x^2 - 5x + 3\right)$$

الحل: باستخدام خواص النهايات نجد:

$$\lim_{x\to 5}\left(x^2 - 5x + 3\right) = \lim_{x\to 5} x^2 - \lim_{x\to 5} 5x + \lim_{x\to 5} 3$$

$$= 5^2 - 5(5) + 3 = 25 - 25 + 3 = 3$$

نظرية (٥): $\lim_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta} = 1$

مثال ( ):

احسب النهاية $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{4x}$

بوضع $\theta = 3x$ وملاحظة أن $\theta \to 0$ عندما $3x \to 0$ فيمكن كتابة النهاية على الشكل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{4x} = \lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{4.3x} = \lim_{\theta\to 0}\frac{3}{4}\frac{\sin\theta}{\theta} = \frac{3}{4}$$

مثال (٣٨):

الدالة $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x-1}$ لا متناهي في الكبر من الأعلى عندما $x \to 1$ لأن $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3+1}{x-1} = \infty$

٦- الدوال اللامتناهية في الكبر والدوال اللامتناهية في الصغر

تعريف (١٩) الدالة اللامتناهية في الكبر

نقول عن الدالة $f(x)$ إنه لا متناهٍ في الكبر عندما $x \to a$ إذا كان:

$$\lim_{x\to a}\left|f(x)\right| = +\infty$$

التعريف السابق يعني أنه عندما تقترب x إلى العدد a فإن قيم الدالة $f(x)$ تتزايد بلا حدود ويصبح الدالة غير محدود من الأعلى في جوار النقطة a.

خواص الدوال اللامتناهية في الكبر

١- مجموع عدد منتهٍ من الدوال اللامتناهية في الكبر من الأعلى (من الأدنى) عندما $x \to a$ هو تابع لا متناهٍ في الكبر من الأعلى (من الأدنى) ، عندما $x \to a$.

٢- جداء عدد منتهٍ من الدوال اللامتناهية في الكبر عندما $x \to a$ هو تابع لا متناهٍ في الكبر عندما $x \to a$.

٣- جداء تابع لا متناهٍ في الكبر عندما $x \to a$ في تابع محدود في جوار النقطة a هو تابع لا متناهٍ في الكبر عندما $x \to a$

مثال (٣٨):

الدالة $f(x)=\frac{x^3+1}{x-1}$ لا متناهي في الكبر من الأعلى عندما $x \to 1$ لأن $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+1}{x-1}=\infty$ ، والدالة $g(x)=\log(x)$ لا متناه في الكبر من الأدنى عندما $x \to 0^+$ ، لأن $\lim\limits_{x\to 0^+}\log(x)=-\infty$.

تعريف (٢٠): الدالة اللامتناهية في الصغر

نقول عن الدالة $f(x)$ أنه لا متناهية في الصغر عندما $x \to a$ إذا كان $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$

مثال (٣٩):

من الدوال اللامتناهية في الصغر:

$f_1(x)=\sin x$ عندما $x \to 0$ ، $f_2(x)=1-\cos x$ عندما $x \to 0$ ، $f_3(x)=5^{\frac{1}{x}}$ عندما $x \to 0^-$ ، $f_4(x)=\frac{1}{x^2}$ عندما $x \to +\infty$

خواص الدوال اللامتناهية في الصغر

١- مجموع عدد منتهٍ من الدوال اللامتناهية في الصغر عندما $x \to a$ هو تابع لا متناهٍ في الصغر عندما $x \to a$.

٢- جداء عدد منتهٍ من الدوال اللامتناهية في الصغر عندما $x \to a$ هو تابع لا متناهٍ في الصغر عندما $x \to a$.

٣- جداء تابع لا متناهٍ في الصغر عندما $x \to a$ في تابع محدود في جوار النقطة a هو تابع لا متناهٍ في الصغر عندما $x \to a$.

مثال (٤٠):

الدالة $f(x)=x\sin x$ هو لا متناهٍ في الصغر عندما $x\to 0$ وذلك لأن $\sin x$ تابع محدود في جوار الصفر ، و x تابع لا متناهٍ في الصغر عندما $x\to 0$.

مثال (٢،٤)

عين قيم النهايات التالية:

$$(1)\lim_{x\to 9}\frac{5\sqrt{x}+2}{x^2+x+1} \qquad (2)\lim_{x\to 2}(x^2-1)(x^2+4x+1) \qquad (3)\lim_{x\to 3}(x^2-8)^{10}$$

الحل:

$$(1)\lim_{x\to9}\frac{5\sqrt{x}+2}{x^2+x+1}=\frac{\lim_{x\to9}\left(5\sqrt{x}+2\right)}{\lim_{x\to9}\left(x^2+x+1\right)}=\frac{5\times3+2}{81+9+1}=\frac{17}{91}.$$

$$(2)\lim_{x\to2}(x^2-1)(x^2+4x+1)=\lim_{x\to2}(x^2-1).\lim_{x\to2}(x^2+4x+1)=(4-1).(4+8+1)=39.$$

$$(3)\lim_{x\to3}(x^2-8)^{10}=\left(\lim_{x\to3}\left(x^2-8\right)\right)^{10}=(9-8)^{10}=1.$$

النهايات التي قيمها تأخذ الشكل $\frac{0}{0}$ (احدى حالات عدم التعيين)

فيما يلي بعض الأمثلة التي توضح ما ينبغي فعله، عندما تكون قيمة النهاية $\frac{0}{0}$ (غير معرفة).

مثال () : المطلوب المثال رقم (١) والمثال(٥) فقط

عين قيم النهايات التالية:

$$(1)\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}\quad(2)\lim_{x\to-2}\frac{x+2}{x^2+x-2}\quad(3)\lim_{x\to4}\frac{x^2-4x}{x^2-3x-4}$$

$$(4)\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\quad(5)\lim_{x\to4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$$

الحل:

$$(1)\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to3}(x+3)=3+3=6.$$

$$(5)\lim_{x\to4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}\times\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}{x-4}$$

$$=\lim_{x\to4}\left(\sqrt{x}+2\right)=(2+2)=4.$$

طريقة ثانية:

$$\lim_{x\to4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to4}\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to4}\left(\sqrt{x}+2\right)=(2+2)=4.$$

نهاية الدالة عندما قيمتها لها الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ (حالة عدم تعيين)

إذا كانت $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ ، حيث كلاً من $p(x)$ و $q(x)$ دالة كثيرة حدود، و إذا كان $\lim\limits_{x\to\infty} p(x)=\infty$ و $\lim\limits_{x\to\infty} q(x)=\infty$

فعندئذ $\dfrac{\infty}{\infty}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty} p(x)}{\lim\limits_{x\to\infty} q(x)}=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ حيث $\dfrac{\infty}{\infty}$ حالة عدم تعيين.

و لحل النهايات من هذا النوع، نقوم بتقسيم البسط والمقام، على القوة ذات الأس الأعلى لـ **x** و الموجودة في البسط أو المقام، ثم نحسب النهاية بالاعتماد على كل من نهايتي البسط والمقام عندما $x\to\infty$.

مثال (٤,٤) عين قيم النهايات التالية: المطلوب المثال(٢)و(٣) فقط

$$(1)\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x^2+x-1}{4x^3+x^2+3x-2}\qquad (2)\lim_{x\to\infty}\frac{x+5}{2x^2+x+3}\qquad (3)\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x+1}{x^2+5x+2}$$

$$(4)\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^2+5}}{x+1}\qquad (5)\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2+3x}\right)$$

$$(6)\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$$

الحل:

$$(1)\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x^2+x-1}{4x^3+x^2+3x-2}$$

بتقسيم كل من البسط والمقام على x^3 نجد:

$$(1)\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x^2+x-1}{4x^3+x^2+3x-2}=\lim\frac{\frac{3x^3}{x^3}+\frac{2x^2}{x^3}+\frac{x}{x^3}-\frac{1}{x^3}}{\frac{4x^3}{x^3}+\frac{x^2}{x^3}+\frac{3x}{x^3}-\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{4+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}}=\frac{3+0+0-0}{4+0+0-0}=\frac{3}{4}$$

$$(2)\lim_{x\to\infty}\frac{x+5}{2x^2+x+3}$$

بتقسيم كل من البسط والمقام على x^2 نجد:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+5}{2x^2+x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}+\frac{5}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}{2+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}=\frac{0+0}{2+0+0}=\frac{0}{2}=0.$$

$$(3)\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x+1}{x^2+5x+2}$$

بتقسيم كل من البسط والمقام على x^3 نجد:

$$(3)\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x+1}{x^2+5x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}+\frac{x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}+\frac{5x}{x^3}+\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{2}{x^3}}=\frac{1+0+0}{0+0+0}=\frac{1}{0}=\infty.$$

اتصال الدوال

١– تعاريف ومفاهيم أساسية:

إذا كانت نهاية الدالة $f(x)$ عند النقطة **a** موجودة وتساوي قيمته عند تلك النقطة أي إذا كان $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ ، فإن ذلك يقودنا إلى مفهوم اتصال الدالة.

تعريف (٢٠):

ليكن الدالة $f(x)$ معرف على المجال X ولتكن a نقطة من هذا المجال ، نقول إن الدالة $f(x)$ متصلة في النقطة $x=a$ إذا تحققت الشروط التالية:

١– النهاية $\lim_{x \to a} f(x)$ موجودة.

٢– قيمة الدالة تساوي نهاية الدالة في النقطة $x=a$، أي أن: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

مثال(١) لتكن الدالَّة f والمعرَّفة على R كما يلي :

$f(x) = 3x^2 - x + 1$.

لندرس استمرار هذه الدالَّة f عند النقطة $x_o = 2$ ؟

الحل : من أجل ذلك نلاحظ ما يلي :

أ– الدالَّة f معرَّفة عند النقطة $x_0=2$ ولها القيمة $f(x_0)=f(2)=11$

ب– الدالَّة f تملك نهاية عند النقطة $x_o = 2$ حيث لدينا $\lim_{x \to 2} f(x) = 11$.

ج– لدينا $\lim_{x \to 2} f(x) = 11 = f(2)$.

ومنه بحسب تعريف الاتصال ، فالدالَّة f متصلة عند النقطة $x_o = 2$.

مثال (٢) :

الدالة $f(x) = 3x^2 + 5x + 7$ **متصلة في النقطة x=2 ، لأن:**

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} 3x^2 + \lim_{x \to 2} 5x + 7 = 3(2)^2 + 5x2 + 7 = 29$$

ونلاحظ أن $f(2) = 29$ **بالتالي فالدالة متصلة في النقطة x=2**

تعريف (٢٣)

نقول عن الدالة $f(x)$ إنه متصلة على المجال المفتوح X إذا كان متصلة في كل نقطة تنتمي إلى هذا المجال ، ونقول عن الدالة $f(x)$ إنه متصلة في المجال المغلق $[a,b]$ إذا كان متصلة على المجال المفتوح (a,b) ومتصلة من اليمين في النقطة a ومن اليسار في النقطة b .

مثال (٥٣):

بين أن الدالة $f(x) = x\sqrt{25 - x^2}$ متصلة في المجال $[-5,5]$

الحل:

إذا كانت $c \in (-5,5)$ فإن يكون لدينا:

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} x\sqrt{25-x^2} = c\sqrt{16-c^2} = f(c)$$

وبالتالي فإن الدالة المعطى متصلة على المجال المفتوح $(-5,5)$.

نظرية (٧):

إذا كان الدالة ان $f(x)$, $g(x)$ متصـــلتين في النقطة **c** ، ومن أجل العدد α ، عندئذٍ فإن كل من الدوال التالية يكون متصلة في النقطة **c** :

١-المجموع والفرق $f(x) \pm g(x)$.

٢- الجداء $f(x).g(x)$

٣- $\alpha f(x)$

٤- $f(x)/g(x)$; $g(c) \neq 0$

٢- اتصال بعض الدوال الأولية:

يمكن معرفة اتصال الدوال الأولية اعتماداً على التعريف مباشرة، ويمكن البرهان بسهولة على النتائج التالية:

١- كل كثير حدود $p(x)$ متصلة على كل R.

٢- كل دالة كسري من الشكل $p(x)/g(x)$ متصلة على مجال تعريفه.

٣- إذا كان $f(x)$ متصـلة في النقطة c وكان n عدداً صـحيحاً فإن $f(x)^n$, $\sqrt[n]{f(x)}$ هي توابع متصـلة على مجال تعريفها.

٤- **الدالتان** $\sin x$, $\cos x$ **متصلتان على** R .

٥- **الدالة الاسية** $y=e^x$ **متصلة على** R .

٦- **الدالة اللوغارتمية** $y=log(x)$ **متصلة على** R^+.

٧- **دالة القيمة المطلقة** $y=|x|$ **متصلة على** R .

ملاحظة (١٧)

مما سـبق نجد أن هناك علاقة وثيقة بين مفهومي النهاية والاتصـال، لذلك فعندما يكون الدالة متصـلة في نقطة ما، فمن السهولة بمكان حساب نهايتها عند هذه النقطة.

وهذا ما تبينه الأمثلة التالية:

مثال ():

اولا: ان قيمة الدالة $y = \frac{x^2}{2} + x$ عند x=4 هي

$$y=\frac{x^2}{2}+x=\frac{4^2}{2}+4=\frac{16}{2}+4=8+4=12$$

ثانيا: لنوجد نهاية الدالة $y=\frac{x^2}{2}+x$ عندما $x\to 4$

$$\lim_{x\to 4} y=\lim_{x\to 6}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)=\frac{4^2}{2}+4=\frac{16}{2}+4=8+4=12$$

بمقارنة نهاية الدالة عندما $x\to 4$ بقيمة الدالة عند تلك النقطة x=4 نجد انهما متســـاويتين بالتاي نســـتنتج ان الدالة $y=\frac{x^2}{2}+x$ متصلة عن القيمة x=4.

مثال: أوجد النهاية: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin x}{1-\cos x}$

الحل: بما أن الدالة المعطى متصلة في النقطة $x=\frac{\pi}{2}$ فإن نهايته في النقطة $x=\frac{\pi}{2}$ تساوي قيمته وبالتالي:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin x}{1-\cos x}=\frac{1+\sin\frac{\pi}{2}}{1-\cos\frac{\pi}{2}}=\frac{1+1}{1+0}=2$$

مثال ( ):

أوجد النهاية $\lim_{x\to 1}\cos\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)$

الحل: بما أن دالة **cos** متصلة في كل نقطة من نقاط محور الأعداد ***R*** ، فإنه يكون:

$$\lim_{x\to 1}\cos\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)=\cos\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)$$

$$=\cos\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}=\cos\lim_{x\to 1}(x+1)=\cos 2$$

نقاط الانقطاع لدالة:

تعريف (٢٤):

نقول عن النقطة **X0** إنها نقطة انقطاع للدالة $f(x)$ ، إذا كان الدالة غير متصلة فيها ، لكنه متصلة في جوارها .

مثال ( ) :

١- النقطة $x_0=\frac{\pi}{4}$ هي نقطة انقطاع للدالة $\tan x$

٢- النقطة $x_0=1$ هي نقطة انقطاع للدالة $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$

٣- النقطة $x_0 = 0$ هي نقطة انقطاع للدالة $\frac{\sin x}{x}$

تمارين غير محلولة

١- استعن بالخط البياني للدالة $y = x^2$ لرسم الخطوط البيانية للتوابع التالية:

١- $y = x^2 + 2$

٢- $y = x^2 + 8x + 2$

٣- $y = 2(x+1)^2$

٤- $y = (x-2)^2$

٥- $y = (x-2)^2 + 3$

٦- $y = \frac{x^2}{2} + x$

٧- $y = x^2 - 4$

٢- أوجد مجالات تعريف كل من الدوال التالية:

١- $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$

٢- $f(x) = \sqrt{4 - x}$

٣- $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

٤- $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 3}{x - 1}$

٨- $f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$

٩- $f(x) = x + \frac{1}{x}$

١٠- $f(x) = \sqrt[4]{x + 1}$

٥- أوجد كلاً من النهايات التالية:

١) $\lim_{x \to 3} (x^3 - 27)$

٢) $\lim_{x \to -1} (x^2 - 3x + 5)$

٣) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$

٤) $\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2}$

٩) $\lim_{x \to 2-} \frac{x}{x - 2}$

١٠) $\lim_{x \to 2+} \frac{x}{x - 2}$

١١) $\lim_{x \to 5} \frac{x + 5}{x^2 - 25}$

١٢) $\lim_{x \to 1+} \frac{x^4 - 1}{x - 1}$

٦- أوجد كلاً من النهايات التالية:

١) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}$

١٦- احسب النهايات التالية:

٣) $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2x-1}{4x^2-1}\right)$

٤) $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^6-3x^4+7x-1}{3x^6+2x^3-3}$

٥) $\lim_{x\to \infty}\frac{2x^2-3x^2+5}{3x^4-7x+1}$

٨) $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{x^2-1}{4x^2}\right)$

٩) $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{x^2+3}{2x+1}\right)$

١٠) $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^n$

٧- باستخدام تعريف اتصال دالة ($\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$) برهن اتصال الدوال التالية:

١) $f(y)=3x^2-2x+1\ ;\ \forall x\in R$

٢) $f(x)=\frac{x^3+x-1}{2x^2+3x-5}\ ;$ عندما x=-1

٣) $f(x)=\cos(ax+b)\ ;\ \forall x\in R$

٤) $f(x)=\frac{x^2\cos x}{1+\sin^2 x}\ ;\ \forall x\in R$

٥) $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+x+1}\ ;\ \forall x\in R$

الفصل السابع

مشتقات الدوال

Derivatives of Functions

٧–١ مفهوم المشتق

مشــتق الدالةليس مجرد مفهوم رياضــي تجريدي، بل له تطبيقات وتفســيرات مختلفة في معظم العلوم، الســرعة – الكثافة – القوة – تغير درجة الحرارة في الفيزياء ، الانضــغاطية – ســرعة التفاعلات في الكيمياء ، معدل النمو – ســرعة الدم في الجسم في علم البيولوجيا ، التكلفة الحدية – الربح الحدي في الاقتصاد ، نسبة تدفق الحرارة في علم طبقات الأرض، كل هذه المفاهيم يمكن أن تكون تفسيرات لمفهوم رياضي وحيد هو الا شتقاق، وهذا ما يبين قوة العلوم الرياضية وفعاليتها في مختلف مجالات العلوم.

أول من صاغ مفاهيم النهايات والاشتقاق بشكلها الحالي هو عالم الرياضيات الألماني ليبنيز (*Leibniz*، ١٦٤٦-١٧١٦) إلا أن عالم الرياضــيات الفذ الإنكليزي اســحق نيوتن (Newton ، ١٦٤٣-١٧٢٧) قد صــاغ تلك المفاهيم بشــكل مســتقل عن ليبنز.

تعريف (١):

ليكن $f(x)$ تابعاً معرفاً على المجال المفتوح X ، ولتكن a نقطة من هذا المجال، نقول إن الدالة $f(x)$ قابلاً للاشتقاق في النقطة $x=a$ ، إذا كانت النهاية:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

موجودة.

نسمي هذه النهاية مشتق الدالة $f(x)$ في النقطة $x=a$ ونرمز له بالرمز $f'(a)$ ونكتب:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad (1)$$

ملاحظة (١):

إذا كان الدالة متصــلة في نقطة لكنه قد يكون غير قابل للاشــتقاق في تلك النقطة ، لكن من تعريف المشــتق نجد أنه إذا كان الدالة $f(x)$ قابلاً للاشتقاق في نقطة a فهو متصلة في تلك النقطة دائماً.

تعريف (٣):

نقول عن الدالة $f(x)$ إنه قابل للاشتقاق على المجال X ،إذا كان قابلاً للاشتقاق في كل نقطة $x \in X$.

مثال على ذلك: دالة القيمة المطلقة $f(x)=|x|$ هي دالة متصلة في النقطة ***x=0*** لكنها غير قابلة للاشتقاق في تلك النقطة.

٧-٣ خواص الاشتقاق

نظرية (٢):

إذا كان كل من التابعين $f(x)$, $g(x)$ قابلين للاشتقاق في النقطة x عندئذ:

١- المجموع $f(x)+g(x)$ قابل للاشتقاق في النقطة x ويكون:

$$\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x)$$

٢- ناتج الطرح $f(x)-g(x)$ قابل للاشتقاق في النقطة x ويكون :

$$\left(f(x)-g(x)\right)' = f'(x)-g'(x)$$

٣- ناتج الضرب $f(x).g(x)$ قابل للاشتقاق في النقطة x ويكون:

$$\left(f(x).\ g(x)\right)' = f'(x).g(x)+f(x).g'(x)$$

٤- ناتج القسمة $f(x)/g(x)$ قابل للاشتقاق في النقطة x حيث $g(x)\neq 0$ ويكون :

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$$

٧- ٤ قواعد الاشتقاق

١- مشتق الدالة الثابتة:

نظرية (٣):

إذا كان $f(x)=c$ ، حيث c عدد ثابت فإن $f'(x)=0$

٢- مشتق دالة القوة

نظرية (٤):

إذا كان $f(x)=x^{n}$ حيث n عدد صحيح موجب فإن:

$$f'(x)=n.x^{n-1}$$

نتائج:

١- إذا كان $f(x)$ تابعاً قابلاً للاشتقاق في النقطة x ومن أجل الثابت $c\in\mathbb{R}$ فإن: $cf(x)$ قابل للاشتقاق و يكون $(cf(x))'=cf'(x)$

٢- إذا كان $g(x)$ قابلاً للاشتقاق في النقطة x , $g(x)\neq 0$

فإن $\frac{1}{g(x)}$ قابل للاشتقاق في النقطة ويكون:

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)'=-\frac{g'(x)}{[g(x)]^{2}}$$

٣- إذا كان $f(x)=x^{-n}$ ، حيث n عدد صحيح موجب فإن:

$$f'(x)=-n\,x^{-n-1}$$

٣- مشتقات الدوال المثلثية:

نظرية (٥):

١- إذا كان $f(x)=\sin x$ فإن $f'(x)=\cos x$

٢- إذا كان $f(x)=\cos x$ فإن $f'(x)=-\sin x$

٣- إذا كان $f(x)=\tan x$ فإن $f'(x)=\frac{1}{\cos^{2}x}=\frac{1}{\sec^{2}x}$; $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$

٤

٤- مشتق الدالة اللوغاريتمية

نظرية (٦):

إذا كان $f(x)=\log_{a}(x)$ $(0<a\neq 1)$

فإن:

$$f'(x)=\frac{1}{x}\log_{a}e=\frac{1}{x\ln a}$$

٦- مشتق الدالة الأسية.

نظرية (٨):

إذا كان $f(x)=a^x$ $(0<a\neq 1)$ فإن:

$$f'(x)=a^x \ln a$$

نتيجة(٣)

إذا كان $f(x)=e^x$ فإن $f'(x)=e^x$ ، وذلك لأن $\ln e=1$

$$y'(x)=f'(x)=\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}} \quad ; |x|>1$$

٩- مشتق الدالة المركبة (قاعدة السلسلة) *The chain Rule*

إذا كان الدالتان $u=g(x)$, $y=f(u)$ قابلتين للاشـــتقاق فإن الدالة المركبة $G(x)=f(g(x))$ قابل للاشـــتقاق ومشتقه يعطى بالعلاقة:

$$G'(x)=f'(g(x)).g'(x)$$

أي إذا كان التابعان $u=g(x)$, $y=f(u)$ قابلين للاشتقاق فإن:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} \qquad (10)$$

نقبل هذه النظرية بدون برهان.

مثال (٩):

احسب مشتق الدالة $f(x)=\cos(x^2+2x)$

الحل: إذا وضعنا $u=x^3+2x$ فيكون:

$$f(x)=\cos u$$

ويكون:

$$f'(x)=f'(u).u'(x)$$

وبالتالي:

$$f'(x)=-\sin(x^2+2x).(2x^2+2)$$

$$y'(x)=\frac{1}{1-x^2} \quad ;x>1$$

١٠- المشتق اللوغاريتمي

وجدنا أنه إذا كان $f(x)=\ln x \; ; (x>0)$ فإن $f'(x)=\frac{1}{x}$

لنوجد مشتق الدالة $y=\ln|u|$ حيث $u=f(x)$ تابع قابل للمفاضلة.

نلاحظ أن الدالة $y = \ln|u|$ هو تابع مركب بالتالي:

$$y' = \left(\ln|u|\right)' = \frac{1}{u}.u' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

أي إن:

$$\left(\ln|u|\right)' = \frac{f'(x)}{f(x)} \qquad (11)$$

يدعى المشتق السابق بالمشتق اللوغاريتمي للتابع $f(x)$.

يستخدم المشتق اللوغاريتمي في إيجاد مشتقات الدوال المركبة لتوابع أخرى كتابع القوة أو توابع مثلثية أو غيرها.

٧-٥ المشتقات من المراتب العليا

١- المشتق الثاني:

إذا كان الدالة $y = f(x)$ قابلاً للاشتقاق فإن مشتقه $y' = f'(x)$ هو تابع لـ **x** أيضاً ونسميه المشتق الأول أو المشتق من المرتبة الأولى، إذا كان $f'(x)$ قابلاً للاشتقاق فإننا سنرمز لمشتقه بالرمز $f''(x)$ ونسميه المشتق الثاني للتابع $f(x)$

وبدوره إن كان $f''(x)$ قابلاً للاشتقاق فإننا سنرمز لمشتقه بالرمز $f'''(x)$ ونسميه المشتق الثالث أو المشتق من المرتبة الثالثة للتابع $y = f(x)$ وهكذا... نسمي المشتقات بدءاً من المرتبة الثانية فأكثر بالمشتقات من المراتب العليا، عادة نرمز للمشتق من المرتبة الرابعة بالرمز $f^{(4)}(x)$ وبصورة عامة سنستخدم الرمز $f^{(n)}(x)$ للمشتق من المرتبة n.

وهكذا فإنه إذا كان $y = f(x)$ فإن $y' = f'(x)$, $y'' = \left(f'(x)\right)'$

تمارين غير محلولة

١- استخدم تعريف المشتق في إيجاد مشتقات الدوال التالية:

١- $y = \cos^2 x$	٥- $y = \dfrac{1}{x}$
٢- $y = \sqrt{x}$	٦- $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
٣- $y = \sqrt[n]{x}$	٧- $y = e^{ax}$
٤- $y = x^2$	٨- $y = \dfrac{1}{x^2+2}$

٢- أوجد المشتق الأول للتوابع التالية:

١- $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{x^2+2}}$

٢- $f(x)=\sqrt{\sin^2 x+\tan\pi}$

٣

٦- أوجد المشتق الثاني لكل من الدوال التالية:

١) $y=\sqrt[3]{x}$

٢) $y=\dfrac{8}{\sqrt{x}}-\dfrac{6}{\sqrt[3]{x}}$

٣) $y=\sin\tan x$

٤) $y=e^{-x^2}$

٥) $y=\dfrac{1}{1+x}$

٦) $y=\tan^{-1}x^2$

٧) $y=\csc x$

٨) $y=\sin\cos x$

٩) $y=\cos 2x+\sin x$

١٠) $y=x^2e^x$

التكامل (INTEGRATION)

تعريف التكامل

التكامل هو العملية العكسية للتفاضل، بحيث تستخدم التكاملات في الرياضيات؛ لإيجاد العديد من الكميات المفيدة مثل: المساحات، والأحجام، والإزاحة ، وما إلى ذلك.

أنواع التكامل

هناك نوعان من أشكال التكاملات، وهما:

- **التكاملات غير المحدودة**

هي جزء لا يتجزأ من وظيفة عندما لا يوجد حد للتكامل، أي أن الفترة مفتوحة في هذه العملية، وفي هذا النوع بالتحديد من التكاملات، بعكس التكامل المحدود، وكذلك ما يميزها هو وجود ثابت في العملية.

- **التكاملات المحدودة**

تكامل دالة ذات حدود تكامل، فيكون هناك قيمتان كحدود لفترة التكامل، أحدهما هو الحد الأدنى، والآخر هو الحد الأعلى، ولا يحتوي على أي ثابت للتكامل، كما التكامل غير المحدود

الصيغ الأساسية للتكامل الغير محدد

إذا كانت $F(x)$ دالة مشتقتها في فترة معينة من المحور السيني هي $F'(x)=f(x)$ فإننا ندعو $F(x)$ معاكس المشتقة أو التكامل غير المحدود ل $f(x)$ أو الدالة الاصلية للدالة $f(x)$.

والتكامل غير المحدود لدالة مفروضة ليس وحيداً . فعلى سبيل المثال ، الدوال x^2, x^2+5, x^2-4 هي تكاملات غير محدودة ل $f(x)=2x$ لأن $\frac{d}{dx}(x^2)=\frac{d}{dx}(x^2+5)=\frac{d}{dx}(x^2-4)=2x$ على ذلك فإن جميع التكاملات غير المحددة ل $f(x)=2x$ متضمنة x^2+C حيث C الذي نسميه ثابت التكامل . هو أي ثابت اختياري .

ويستعمل الرمز $\int f(x)dx$ للإشارة إلى أن المطلوب هو التكامل غير المحدود ل $f(x)$.

وهكذا نكتب: $\int 2x\,dx=x^2+C$.

الصيغ الأساسية للتكامل: إن عدداً من الصيغ الواردة أدناه تنتج مباشرة من صيغ الاشتقاق القياسية الواردة في الفصول السابقة .

الصيغ من ١ إلى ٤ :

١) التكامل الغير محدد لمشتق دالة : $\int \frac{d}{dx}[f(x)]dx=f(x)+C$

٢) التكامل الغير محدد لمجموع دالتين: $\int [f(x)+g(x)]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

٣) تكامل دالة مضروبة بثابت: حيث **a** ثابت, $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$

٤) تكامل محدد لدالة القوة: $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C, \quad m \neq -1$

أمثلة : (Examples)

$$\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C \quad (1$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C \quad (2$$

$$\int \sqrt[3]{z}\, dz = \int z^{1/3} dz = \frac{z^{4/3}}{4/3} + C = \frac{3}{4} z^{4/3} + C \quad (3$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int x^{-2/3} dz = \frac{x^{1/3}}{1/3} + C = 3x^{1/3} + C \quad (4$$

$$\int \left(2x^2 - 5x + 3\right) dx = 2\int x^2 dx - 5\int x\, dx + 3\int dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 3x + C \quad (5$$

$$\int (1-x)\sqrt{x}\, dx = \int \left(x^{1/2} - x^{3/2}\right) dx = \int x^{1/2} dx - \int x^{3/2} dx = \frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{2}{5} x^{5/2} + C \quad (6$$

$$\int (3s+4)^2 ds = \int \left(9s^2 + 24s + 16\right) ds = 9\left(\frac{1}{3}s^3\right) + 24\left(\frac{1}{2}s^2\right) + 16s + C = 3s^3 + 12s^2 + 16s + C \quad (7$$

$$\int \frac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^2} dx = \int \left(x + 5 - 4x^{-2}\right) dx = \frac{1}{2}x^2 + 5x - \frac{4x^{-1}}{-1} + C = \frac{1}{2}x^2 + 5x + \frac{4}{x} + C \quad (8$$

٩

الصيغ من ٥ إلى ٧ :

(تكامل مقلوب **x**) $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C \quad (5$

(تكامل دالة اسية) $\int a^x du = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1 \quad (6$

((تكامل دالة اسية بأساس طبيعي(نيبري)) $\int e^x du = e^x + C \quad (7$

أمثلة : (Examples)

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (1$$

$$\int \frac{dx}{x+2} = \int \frac{d(x+2)}{x+2} = \ln|x+2| + C \quad (2$$

الصيغ من ٨ إلى 17 :تكامل الدوال المثلثية

8) $\int \sin u \; du = -\cos u + C$

9) $\int \cos u \; du = \sin u + C$

10) $\int \tan u \; du = \ln|\sec u| + C$

11) $\int \cot u \, du = \ln|\sin u| + C$

أمثلة : ($Examples$)

1) $\int \sin \frac{1}{2} x \; dx = 2\int \sin \frac{1}{2} x \,.\frac{1}{2} dx = -2\cos \frac{1}{2} x + C$

2) $\int \cos 3x \; dx = \frac{1}{3}\int \cos 3x \,.3dx = -\frac{1}{3} \sin 3x + C$

احسب التكاملات التالية بالطريقة المباشرة

١- احسب التكامل $\int (e^{x} - 1)(e^{-x} + 1) dx$

الحل:

$$\int (e^{x} - 1)(e^{2x} + 1) dx = \int (e^{3x} + e^{x} - e^{2x} - 1) dx = \frac{1}{3} e^{3x} + e^{x} - \frac{1}{2} e^{2x} - x + c$$

٢- احسب التكامل $\int x \, (3x^{2} + 5) dx$

الحل : نلاحظ أن $d\,(3x^{2} + 5) = 6x$ فيكون :

$$\int x \, (3x^{2} + 5) dx = \frac{1}{6}\int (3x^{2} + 5) d\,(3x^{2} + 5) = \frac{1}{12}(3x^{2} + 5)^{2} + c$$

تمرينات:Exercises

أجر عمليات التكامل التالية:

التمارين المطلوبة هي:١-٢-٣-٤-٥-٦-٨-٩-١٠-٥٣-٥٤

1) $\int (4x^3+3x^2+3)dx = x^4+x^3+3x+C$

2) $\int (3-2x-x^4)dx = 3x-x^2-\frac{1}{5}x^5+C$

3) $\int (2-3x+x^3)dx = 2x-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4+C$

4) $\int (x^2-1)^2dx = \frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3+x+C$

5) $\int (\sqrt{x}-\frac{1}{2}x+\frac{2}{\sqrt{x}})dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{4}x^2+4x^{\frac{1}{2}}+C$

6) $\int (a+x)^3dx = \frac{1}{4}(a+x)^4+C$

7) $\int (x-2)^{\frac{3}{2}}dx = \frac{2}{5}(x-2)^{\frac{5}{2}}+C$

8) $\int \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}+C$

9) $\int \frac{dx}{(x-1)^3} = -\frac{1}{2(x-1)^2}+C$

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}} = 2\sqrt{x+3}+C$

11) $\int \sqrt{3x-1}\,dx = \frac{2}{9}(3x-1)^{\frac{3}{2}}+C$

12) $\int \sqrt{2-3x}\,dx = -\frac{2}{9}(2-3x)^{\frac{3}{2}}+C$

13) $\int (2x^2+3)^{\frac{1}{3}}x\,dx = \frac{3}{16}(2x^2+3)^{\frac{4}{3}}+C$

14) $\int (x-1)^2x\,dx = \frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+C$

15) $\int (x^2-1)x\,dx = \frac{1}{4}(x^2-1)^2+C$

16) $\int \sqrt{1+y^4}\,y^3dy = \frac{1}{6}(1+y^4)^{\frac{3}{2}}+C$

17) $\int (x^3+3)x^2dx = \frac{1}{6}(x^3+3)^2+C$

18) $\int (4-x^2)^2x^2\,dx = \frac{16}{3}x^3-\frac{8}{5}x^5+\frac{1}{7}x^7$

19) $\int \frac{dy}{(2-y)^3} = \frac{1}{2(2-y)^2}+C$

20) $\int \frac{x\,dx}{(x^2+4)^3} = -\frac{1}{4(x^2+4)^2}+C$

21) $\int (1-x^3)^2dx = x-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{7}x^7+C$

22) $\int (1-x^3)^2x\,dx = \frac{1}{2}x^2-\frac{2}{5}x^5+\frac{1}{8}x^8+C$

23) $\int (1-x^3)^2x^2dx = -\frac{1}{9}(1-x^3)^3+C$

24) $\int (x^2-x)^4(2x-1)dx = \frac{1}{5}(x^2-x)^5+C$

25) $\int \frac{3t\,dt}{\sqrt[3]{t^2+3}} = \frac{9}{4}(t^2+3)^{\frac{2}{3}}+C$

26) $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+2x-4}} = \sqrt{x^2+2x-4}+C$

27) $\int \frac{dx}{(a+bx)^{\frac{1}{3}}} = \frac{3}{2b}(a+bx)^{\frac{2}{3}}+C$

28) $\int \frac{(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}dx = \frac{2}{3}(1+\sqrt{x})^3+C$

29) $\int \sqrt{3}(3-5x)dx = 2x^{\frac{3}{2}}(1-x)+C$

30) $\int \frac{(x+1)(x-2)}{\sqrt{x}}dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-4x^{\frac{1}{2}}+C$

31) $\int \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1|+C$

32) $\int \frac{dx}{3x+1} = \frac{1}{3}\ln|3x+1|+C$

33) $\int \frac{3x\,dx}{x^2+2} = \frac{3}{2}\ln(x^2+2)+C$	34) $\int \frac{x^2dx}{1-x^3} = -\frac{1}{3}\ln\left\|1-x^3\right\|+C$
35) $\int \frac{x-1}{x+1}dx = x-2\ln\left\|x+1\right\|+C$	36) $\int \frac{x^2+2x+2}{x+2}dx = \frac{1}{2}x^2+2\ln\left\|x+2\right\|+C$
37) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)+C$	38) $\int\left(\frac{dx}{2x-1}-\frac{dx}{2x+1}\right) = \ln\sqrt{\left\|\frac{2x-1}{2x+1}\right\|}+C$
39) $\int a^{4x}dx = \frac{1}{4}\frac{a^{4x}}{\ln a}+C$	40) $\int e^{4x}dx = \frac{1}{4}e^{4x}+C$
41) $\int \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3}dx = -\frac{1}{2}e^{\frac{1}{x^2}}+C$	42) $\int e^{-x^2+2}x\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2+2}+C$
43) $\int x^2e^{x^3}dx = \frac{1}{3}e^{x^3}+C$	44) $\int (e^x+1)^2dx = \frac{1}{2}e^{2x}+2e^x+x+C$
45) $\int (e^x-x^e)dx = e^x-\frac{x^{e+1}}{e+1}+C$	46) $\int\left(e^x+1\right)^2e^xdx = \frac{1}{3}\left(e^x+1\right)^3+C$
47) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}dx = \frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+3\right)+C$	48) $\int\left(e^x+\frac{1}{e^x}\right)^2dx = \frac{1}{2}e^{2x}+2x-\frac{1}{2e^{2x}}+C$
49) $\int \frac{e^x-1}{e^x+1}dx = \ln\left(e^x+1\right)^2-x+C$	50) $\int \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+3}dx = \ln\left(e^{2x}+3\right)^{\frac{2}{3}}-\frac{1}{3}x+C$
51) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)} = \ln\frac{C}{\left(1-\sqrt{x}\right)^2},\ C>0$	52) $\int \frac{dx}{x+x^{\frac{1}{3}}} = \frac{3}{2}\ln C\left(x^{\frac{2}{3}}+1\right),C>0$
53) $\int \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x+C$	54) $\int \cos\frac{1}{2}x\,dx = 2\sin\frac{1}{2}x+C$
55) $\int \sec 3x\tan 3x\,dx = \frac{1}{3}\sec 3x+C$	56) $\int \csc^2 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cot 2x+C$
57) $\int x\sec^2 x^2\,dx = \frac{1}{2}\tan x^2+C$	58) $\int \tan^2 x\,dx = \tan x-x+C$
59) $\int \tan\frac{1}{2}x\,dx = 2\ln\left\|\sec\frac{1}{2}x\right\|+C$	60) $\int \csc 3x\,dx = \frac{1}{3}\ln\left\|\csc 3x-\cot 3x\right\|+C$
61) $\int b\sec ax\tan ax\,dx = \frac{b}{a}\sec ax+C$	62) $\int\left(\cos x-\sin x\right)^2dx = x+\frac{1}{2}\cos 2x+C$
63) $\int \sin ax\cos ax\,dx = \frac{1}{2a}\sin^2 ax+C$ $= -\frac{1}{2a}\cos^2 ax+C' = \frac{1}{4a}\cos 2ax+C''$	64) $\int \sin^3 x\cos x\,dx = \frac{1}{4}\sin^4 x+C$
65) $\int \cos^4 x\sin x\,dx = -\frac{1}{5}\cos^5 x+C$	66) $\int \tan^5 x\sec^2 x\,dx = \frac{1}{6}\tan^6 x+C$
67) $\int \cot^4 3x\csc^2 3x\,dx = -\frac{1}{15}\cot^5 3x+C$	68) $\int \frac{dx}{1-\sin\frac{1}{2}x} = 2\left(\tan\frac{1}{2}x+\sec\frac{1}{2}x\right)+C$

التكامل المحدد *Definite integral*

مفهوم التكامل المحدد

لتكن $f(x)$ دالة متصلة على المجال المغلِق ***[a,b]*** حيث***a>b*** ولتكن ***F(x)*** دالة أصلية لـ$f(x)$ أي$F'(x)=f(x)$ من اجل $x \in [a;b]$. عندئذ يرمز للتكامل المحدود للدالة المتصلة المعطاة $f(x)$ على المجال***[a,b]*** بالرمز :

$$\int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

ويمثل تزايد الدالة الأصلية الموافقة أي:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (2)$$

وهي صيغة نيوتن ليبتنز.

بالإضافة إلى ذلك فإنه من أجل أي دالة $f(x)$ اذا كان طرفي التكامل متساويين a=b فان :

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

أي أن العلاقة (2) صحيحة من أجل a=b.

يدعى a و b في العبارة (1) بحدود التكامل السفلي والعلوي أي بما يوافق حدود المجال [a,b]، والدالة $f(x)$ بالدالة المكاملة. بإدخال الرمز:

$$F(b) - F(a) = F(X)\Big|_a^b$$

بالتالي يأخذ التكامل *(2)* الشكل:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

مثال1

أوجد تكامل الدالة x^2 على المجال[a,b] :

$$\int_2^4 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_2^4 = \frac{64}{3} - \frac{8}{3} = 18\frac{2}{3}$$

نشير إلى أننا سنحصل على النتيجة نفسها لو أخذنا دالة أصلية أخرى لـ x^2 مثل $\frac{x^3}{3}+1$ أو $\frac{x^3}{3}-2$ أو...

نتيجة:

$$\int_a^b f(x)dx = \left.\int f(x)dx\right|_a^b \qquad (4)$$

حيث $\int_a^b f(x)dx$ إحدى الدوال الأصلية للدالة $f(x)$.

الصيغة (**4**) تعطي العلاقة بين التكامل المحدد والتكامل غير المحدد الموافق له، حيث أن الاختلاف بينهما يكمن في أن التكامل المحدود هو عدد أما التكامل غير المحدود فهو دالة.

ملاحظة:

ليكن $y' = f(x)$ أي أن $d\,y = f(x)dx$ بمكاملة العلاقة الأخيرة في المجال من ***a*** إلى ***b*** نجد:

$$y(b) - y(a) = \int_a^b f(x)dx$$

وهذه الصيغة كثيرة الاستخدام في التطبيقات .

مثال **2** اوجد المساحة الواقعة بين المنحني $y = \sqrt{x}$ والمحور السيني والمستقيمين $x = 0\,, x = 4$.

الحل:

$\sqrt{x} \geq 0 \quad \forall x \in [0,4]$

$$A = \int_0^4 \sqrt{x}\ dx = \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^4 = \frac{16}{3}$$

الخواص الرئيسية للتكامل المحدود:

1- $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

أي أن التكامل المحدود لا يتعلق بمتغير التكامل.

2- $$\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0$$

التكامل المحدد بحدود متساوية يساوي الصفر .

3- $$\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b) = -[F(b) - F(a)] = -\int_a^b f(x)dx$$

إذا بدلنا بين موضعي حدود التكامل فإن التكامل المحدد يغير إشارته.

4- ليكن $[a,b] = [a,c] \cup [c,b]$ حيث $a \le c \le b$ عندئذٍ بفرض أن $F'(x) = f(x)$ فإن:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(c) - F(a) + [F(b) - F(c)]$$

$$= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

5- $$\int_b^a Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx \quad ; \quad A \in R$$

6- $$\int_b^a [f(x) + g(x) - h(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx - \int_a^b h(x)dx$$

7- إذا كان $f(x) \ge 0$ حيث $a \le x \le b$ فإن $\int_a^b f(x)dx \ge 0$

8- إذا كان $f(x) \le g(x)$ حيث $a \le x \le b$ و f ، g دوال مستمرة على المجال [a,b] فإن:

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

تطبيقات التكامل المحدود

إن تطبيقات حساب التكاملات المحدودة ذات أهمية خاصة، وتبرز هذه الأهمية في التطبيقات العملية المباشرة وخاصة في:

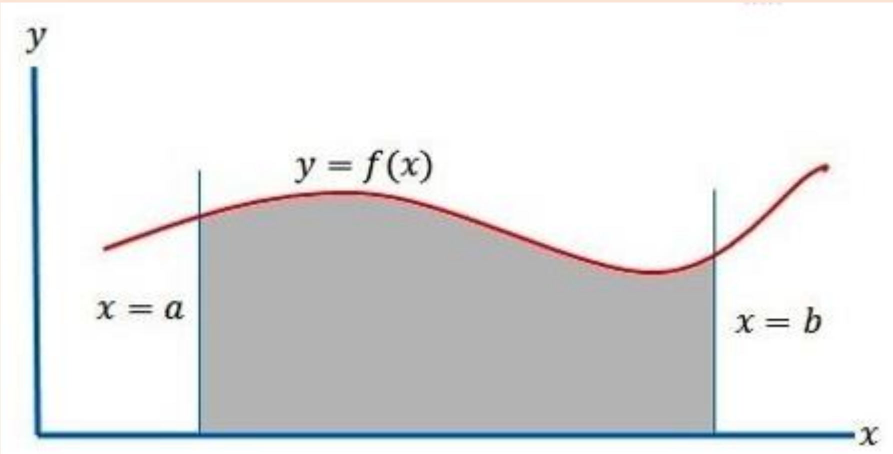
١. حساب مساحة السطوح المستوية.

٢. طول قوس المنحني البياني.

نظرية: إذا كانت f دالة متصلة على الفترة $[a، b]$ عندئذٍ المساحة A للمنطقة D المحصورة بين منحني الدالة ومحور السينات والمستقيمين $x=a$ و $x=b$ تعطى بالعلاقة:

$$A=\int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

كما في الشكل التالي:



وهنا نناقش الحالات الآتية:

١) إذا كانت $f(x)>=0$ فإن المنحني يكون فوق محور السينات وتكون قيمة التكامل موجبة وهي المساحة الفعلية كما في *(1)*.

٢) إذا كانتب $f(x)<=0$ فإن المنحني يكون تحت محور السينات وقيمة التكامل تكون سالبة لذلك تعطى المساحة بالعلاقة:

$$A=\left|\int_a^b f(x)dx\right| \qquad (2)$$

٣) إذا كانت $f(x)<=0$ وبآن واحد $f(x)>=0$ أي المنحني يكون في فت ارت معينة فوق محور السينات وفي فت ارت أخرى تحت محور السينات وقيمة التكامل تأخذ قيم موجبة وسالبة ولا تعطي المساحة الفعلية المطلوبة لذلك نجمع المساحات تحت المنحني بإشارة موجبة كما في العلاقة *(2)* .

مثال (*1*): أوجد المساحة بين منحني الدالة $y= cosx$ وبين:

1- $x=0\,,\, x=\frac{\pi}{2}$ ومحور السينات.

2- $x=\frac{\pi}{2}\,,\, x=\frac{3\pi}{2}$ ومحور السينات.

الحل :

$$A_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

$$A_2=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos x\,dx=\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}=-2\Rightarrow A_2=|-2|=2$$

مثال (*2*): احسب المساحة المحصورة بين المستقيمات:

$$y=-\tfrac{1}{2}x+\tfrac{9}{2}\,;\, y=0\,,\, x=1$$

الحل: إذا رمزنا للمساحة المحصورة بين المستقيمات المفترضة بالرمز ***A***، لوجدنا أن:

$$A=\int_1^9\left(-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}\right)dx=\left[-\frac{x^2}{4}+\frac{9}{2}x\right]_1^9=16$$

مثال ***2***) جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $y=x^3$ والمحور السيني والمستقيمين $x=2\,,x=-3$.

الحل:

$$x^3\ \geq 0\quad \forall x\in[0,2]\quad and\quad x^3\ \leq 0\quad \forall x\in[-3,0]$$

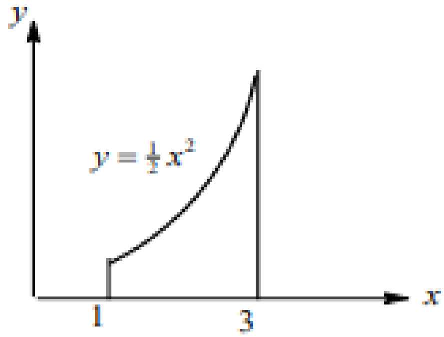
$$A=\left|\int_{-3}^{0}x^3\ \ dx\right|+\int_{0}^{2}x^3\ \ dx=\left|\frac{x^4}{4}\right|_{-3}^{0}\right|+\frac{x^4}{4}\Big|_0^2$$

$$=\frac{81}{4}+4=\frac{97}{4}$$

مثال (*3*): احسب المساحة المحصورة بين محور السينات بالمستقيمات ***x=1*** و ***x=3*** والمنحني: $y=\frac{1}{2}x^2$

الحل: تعطى المساحة المحصورة بالمستقيمات السابقة والمنحني السابق، والموضحة بالشكل بالعلاقة:

$$A = \int_1^3 \frac{1}{2}x^2 dx = \frac{1}{6}[x^3]_1^3 = \frac{13}{3}$$



تمارين غير محلولة

أحسب التكاملات الآتية:

$$1)\sum_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \quad , \quad 2)\int_0^1 x^2 dx \quad , \quad \int_1^e \frac{dx}{x}$$