جامعة الملك سعود	**كلية العلوم**	**قسم الرياضيات**
الفصل الثانى 1440 هـ / / الاختبار النهائى 481 ريض / /		**الزمن:3**

السؤال الأول: (8)

(أ) احسب النهايات التالية :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{(n^2+k^2)}\right) \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right).$$

(ب) احسب قيمة التكاملات المعتلة التالية متى وجدت

$$\int_0^2\frac{1}{x\ln(x)}dx \quad ; \quad \int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}dx$$

السؤال الثاني: (6)

ادرس تقارب المتسلسلات التالية :

(أ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\log(n)}$

(ب) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n n!}{n^n}$

(ت) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{n}\right)$

السؤال الثالث (6)

عين النهاية النقطية لمتتالية الدوال $(f_n(x))$ على المنطقة D ثم قرر ما ا ذا كان التقارب منتظما

(أ) $f_n(x)=\frac{x}{n}, \quad D=\mathbb{R}$

(ب) $f_n(x)=\frac{\sin(nx)}{nx}, \quad D=(0,1)$

(ت) $f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}, \quad D=(0,1)$

(ث)

$$D=[0,1], \qquad f_n(x)=\begin{cases} 4n^2x, & x\in[0,1/n] \\ 4n^2(2/n-x), & x\in[1/n,2/n] \\ 0, & x\in[2/n,1] \end{cases}$$

(ب)

السؤال الرابع: (5)

ناقش التقارب *النقطي* و *المنتظم* للمتسلسلات $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ التالية:

(أ) $f_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{n+x^2}$ ***على المنطقة*** $(1,\infty)$

(ب) $f_n(x)=\dfrac{1}{n^{2x}}$ ***على المنطقة*** $(1,\infty)$

السؤال الخامس (15)

(1) احسب فيما يلي:

(أ) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\displaystyle\int_0^1 \frac{1+nx}{(1+\sqrt{x}\ )^n}\,dx\right)$

(ب) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(\pi x)}{n+x^2}\,dx\right)$.

(2) بيّن ان :

(أ) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\displaystyle\int_0^{n} (1-\frac{x}{n})^n\, e^{-x}dx\right)=1$

السؤال الثالث

$f_n(x) = \frac{x}{n}$ متقاربة نقطيا من 0 على $\mathbb{R}$

(f_n) لا تتقارب بانتظام من 0 على $\mathbb{R}$:

$x_n = n$; اذا $f_n(n) \to 1$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{x}{n}\right| \not\to 0$$

ب

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{nx}, \quad x\in(0,1)$$

نقطيا $f_n \to 0$

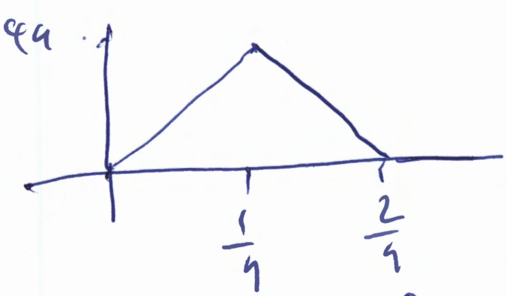
التقارب ليس منتظما :

$$x_n = \frac{1}{n}$$

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \sin(1) \not\to 0$$

ج

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{2}{n}\cdot 4n \cdot \frac{1}{2} = 4$$



اذا $f_n \to 0$

حل الاختبار الفصلي 3 لـ 481 ريض: الفصل الأول 1441

السؤال الأول

(أ)

- $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$=\Big[\operatorname{Arctan}(x)\Big]_0^1=\frac{\pi}{4}$$

- $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\int_0^{\pi}\cos^2(x)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[x-\frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$$

(ب)

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}=\int_0^1+\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$$

- $0<\varepsilon_1<\varepsilon_2<1$

$$\left|\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}\frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}\right|\le\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}\frac{dx}{\sqrt{x}}=2(\sqrt{\varepsilon_2}-\sqrt{\varepsilon_1})\to 0$$

من اختبار كوشي التكامل $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$ متقارب

- $$\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$$ متقارب

- $$\cancel{\int_0^2\frac{1}{x\ln(x)}\,dx \overset{u=\ln(x)}{=} \int_{\ln(\varepsilon)}^{\ln(2)}\frac{du}{u}=\Big[\ln|u|\Big]_{\ln(\varepsilon)}^{\ln(2)}}$$

$$\cancel{=\ln(\ln(2))-\ln|\ln(\varepsilon)|\to\infty}$$

$$\cancel{\int_0^2\frac{1}{x\ln(x)}\,dx}$$ ~~متباعد.~~ $\cancel{\ln 1}$

السؤال الثاني:

(أ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln(n)}$ متقارب:

لان: $\frac{1}{n^2 \ln(n)} \leq \frac{1}{n^2} \quad , n \geq 2$

(ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n!}{n^n}$ متباعدة

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{4^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{4^n n!} = 4 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 4\left(\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}\right)$$

$$\lim \frac{U_{n+1}}{U_n} \Rightarrow \frac{4}{e} > 1 \Rightarrow$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ متباعدة

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) > 0 \quad ; \quad n > 2$$

$$\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \to 1.$$

إذا $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ لها نفس طبيعة التقارب

ل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{*}}$ بما ان $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة فإن

$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ متباعدة

الاختبار النهائي : 481 ريض 1444هـ الفصل الاول

السؤال الاول

(أ) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$

(ب) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \cos^2 \frac{k\pi}{n} = \int_0^{\pi} \cos^2(x)\,dx$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = \lim_{\varepsilon\to 1} \int_0^{\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = \lim_{\varepsilon\to 1} F(\varepsilon)$$

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\right| \le \frac{1}{\sqrt{x}} \;;\; \int_0^{\varepsilon} x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_0^{\varepsilon} \to 2,\ \varepsilon\to 1$$

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$$

$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin(2x)}{2}\right)$$

$$u = \ln(x)$$

$$du = \frac{dx}{x}$$