مع الإجابة الكاملة .

جامعة الملك سعود	الامتحان الفصلي الثاني لمقرر 201 ريض	الفصل الأول 1445
كلية العلوم – قسم الرياضيات	يمنع استخدام الآلة الحاسبة	الزمن : ساعة ونصف

السؤال الأول (5+3+3)

(أ) : احسب التكامل $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \sqrt{16+x^2+y^2}\ dxdy$ 3

(ب): احسب التكامل $\int_1^2 \int_0^1 \int_0^2 (6x^3y^2z)\ dzdydx$ 3

(ج): أحسب التكامل $\iiint_Q 3\ \sqrt{1+x^2+y^2}\ dv$ حيث Q هو المجسم المحدود من أعلى بالمستوى $z=2$

5

ومن الأسفل بالمستوى xy ومن الجوانب بالأسطوانة $x^2+y^2=9$.

السؤال الثاني (6 درجات) أوجد حجم المجسم داخل كل من الكرة $x^2+y^2+z^2=1$ والمخروط

6

$$z=\sqrt{3x^2+3y^2}$$

السؤال الثالث (4+2+2)

(أ) ادرس تقارب المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(7)^n}{(3)^{2n}} + \frac{1}{(n+2)(n+3)}$ وأوجد مجموعها في حالة التقارب .

4

(ب) أدرس تقارب كل من المتسلسلتين :

$(i)\ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{(Ln(n))^2}$ 2

$(ii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2-n+2}{n^3\sqrt{n}}$ 2

الإمتحان الفصلي الثاني، مقرر (١٠١ ريض)

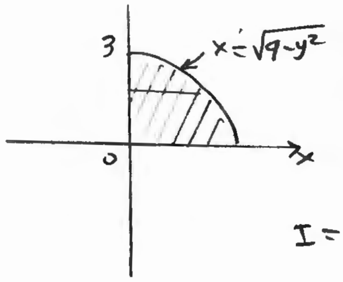
الفصل الأول ١٤٤٠ - الأسبوع الثالث عشر.

السؤال الأول:

أ)

3

$$I=\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-y^2}}\sqrt{16+x^2+y^2}\,dx\,dy$$



$$R=\{(x,y);\quad 0\le x\le\sqrt{9-y^2},\ 0\le y\le 3\}$$

$$=\{(r,\theta);\quad 0\le r\le 3,\ 0\le\theta\le\tfrac{\pi}{2}\}$$

1 1

$$I=\iint_R\sqrt{1+x^2+y^2}\,dA=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^3 r(16+r^2)^{1/2}\,dr\,d\theta$$

1

$$=\left[\tfrac{1}{3}(16+r^2)^{3/2}\right]_0^3\left(\tfrac{\pi}{2}\right)$$

$$=\tfrac{1}{3}\left[(25)^{3/2}-(16)^{3/2}\right]=\tfrac{1}{3}[125-64]$$

$$=61/3$$

ب)

3

$$I\int_1^2\int_0^1\int_0^2 6x^3y^2z\,dz\,dy\,dx$$

1

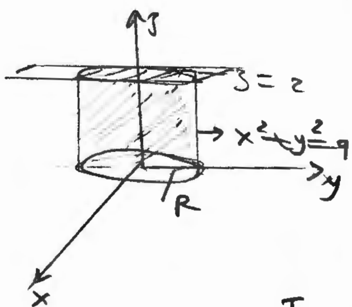
$$=\int_1^2\int_0^1 3x^3y^2\left[z^2\right]_0^2\,dy\,dx=\int_1^2\int_0^1 12x^3y^2\,dy\,dx$$

1 1

$$=\int_1^2 4x^3\left[y^3\right]_0^1\,dx=\int_1^2 4x^3\,dx=\left[x^4\right]_1^2=15$$

ج)

$$I=\iiint_Q 3\sqrt{1+x^2+y^2}\,dV$$



$$Q=\{(x,y,z),\quad 0\le z\le 1,\ (x,y)\in R\}$$

$$R=\{(x,y);\quad x^2+y^2\le 9\}$$

نستخدم الاحداثيات الاسطوانية

$$Q=\{(r,\theta,z);\quad 0\le r\le 9,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le z\le 1\}$$

1 1 1

$$I=3\int_0^{2\pi}\int_0^3\int_0^2 r\sqrt{1+r^2}\,dz\,dr\,d\theta$$

$$=3\int_0^{2\pi}\int_0^3 r\sqrt{1+r^2}\,dr\,[z]_0^2\,dr\,d\theta$$

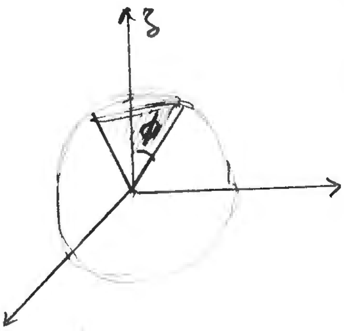
$$6(2\pi)\tfrac{1}{3}\left[(1+r^2)^{3/2}\right]_0^3=\boxed{4\pi(10\sqrt{10}-1)}$$

2

السؤال الثاني :

6

$$V = \iiint_Q dv$$



$$Q = \{ (x,y,z) , \quad 0 \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2} \quad (x,y) \in R \}$$

$$x^2+y^2+z^2=1 \qquad z = \sqrt{3(x^2+y^2)}$$

$$x^2+y^2+3(x^2+y^2)=1$$

$$x^2+y^2=\frac{1}{3} \qquad z=1$$

$$R = \{ (r,\theta) ; \quad 0 \le r \le \frac{1}{\sqrt{3}} , \quad 0 \le \theta \le 2\pi \}$$

$\cot\phi = \sqrt{3} =$

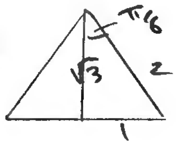
$\tan\phi = \frac{1}{\sqrt{3}}$

هنا نستخدم الاحداثيات الكروية

$\phi = \pi/6 \qquad Q = \{ (\rho, \phi, \theta) ; \quad 0 \le \rho \le 1 , \quad 0 \le \phi \le \pi/6 , \quad 0 \le \theta \le 2\pi \}$

1 1 1

$\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$



$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_0^1 \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

1

$$= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \sin\phi \, d\phi \, d\theta$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} [-\cos\phi]_0^{\pi/6} d\theta = \frac{2\pi}{3} [-\cos\frac{\pi}{6}+1]$$

$$= \frac{2\pi}{3} [-\frac{\sqrt{3}}{2}+1] = \frac{2\pi}{3} [-\sqrt{3}+2] \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}(2-\sqrt{3})$$

2

السؤال الثالث :

أ

4

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big[\underbrace{\frac{2(7)^n}{(3)^{2n}}}_{a_n} + \underbrace{\frac{1}{(n+2)(n+3)}}_{b_n} \Big]$$

2 2

متقارب $\sum_0^\infty a_n = \sum_0^\infty \frac{2(7)^n}{9^n} = 2 \sum_0^\infty \left(\frac{7}{9}\right)^n$

$$= 2 \left[1 + \left(\frac{7}{9}\right) + \left(\frac{7}{9}\right)^2 + \dots \right]$$

نعتمد

$r = \frac{7}{9} < 1$

$$= 2 \frac{1}{1-\frac{7}{9}} = 2 \frac{1}{\frac{2}{9}} = 2 \, \frac{9}{2} = 9$$

2

متقارب $\sum_0^\infty b_n = \sum_0^\infty \frac{1}{(n+2)(n+3)} = \sum_0^\infty \left[\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right]$

2

2

$$S_n = b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_n = \left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{5}}\right) + \cdots$$

$$+ \left(\cancel{\frac{1}{n+1}} - \cancel{\frac{1}{n+2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{n+2}} - \frac{1}{n+3}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+3}$$

$$\lim S_n = \lim \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+3}\right) = \frac{1}{2}$$

إذن متقاربة $\sum_{0}^{\infty} (a_n + b_n) = 9 + \frac{1}{2} = \frac{19}{2}$ ✓

(ج) $\sum_{3}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^2}$, $f(x) = \frac{x}{(\ln x)^2}$ (ج 2×2

$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{(\ln x)^2} = \lim \frac{1}{2(\ln x)\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2\ln x}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{2}{x}} = \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty} x = \infty \quad (2)$$

إذن المتسلسلة متباعدة

(د) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 - n + 2}{n^3 n^{1/2}} \simeq \sum_{1}^{\infty} \frac{2}{n^{3/2}} \simeq \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$

a_n , b_n

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2}(2n^2 - n + 2)}{n^3 \cdot n^{1/2}} = \cancel{2} > 0 \quad (1)$$

إذن متقاربة $\sum_{1}^{\infty} a_n$ لأن ، $p = \frac{3}{2} > 1$ لأن متقاربة $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ (2) متسلسلة
