جامعة الملك سعود	الاختبار النهائي	الفصل الدراسي الأول
كلية العلوم	مقرر ١٣١ ريض	الأحد ٢٦-٥-١٤٤٥هـ
قسم الرياضيات	المدة: ٣ ساعات	يمنع استخدام الآلة الحاسبة

السؤال الأول: بافتراض أن Ω هي المجموعة الشاملة؛ فأكمل الفراغ باستخدام الأنسب من الرموز الآتية:

$\in, \exists, \nexists, \subset, \emptyset, \Omega, \leq, \Longrightarrow, \Longleftarrow, \forall, \equiv, \not\equiv, =, \cup, \cap$:

(٧ درجات: كل فقرة نصف درجة)

١- $\sim(E \to F) \ldots\ldots\; E \wedge \sim F$

٢- $E \leftrightarrow F \ldots\ldots\; E \vee F$

٣- لتكن $A=\{1,2\}$، فإن $p(A) \ldots\ldots \{\{1\}\}$

٤- إذا كان f تطبيقا من A إلى B؛ فإن: $f^{-1}(B) \ldots\ldots A$

٥- $\{\{1\}\} \ldots\ldots \{1\}$

٦- $A\Delta B = (B-A) \ldots\ldots (A-B)$

٧- $x \in A \ldots\ldots x \in A - B$

٨- (يوجد x في A)، تكتب بالترميز الرياضي: $x \in A \ldots\ldots$

٩- يقال أن المجموعتين A وB منفصلتان إذا كان $A \cap B = \cdots\cdots$

١٠- لتكن H زمرة جزئية من G؛ فإنها تكتب رياضيا بالشكل H … G.

١١- إذا كان لدينا تطبيق $f: C \to D$ وكانت المجموعتان غير الخاليتين A وB محتواتين في C بحيث $A \subseteq B$، فإن:

$$x \in f(B) \ldots\ldots x \in f(A)$$

١٢- $\emptyset' = \cdots\cdots$

١٣- لتكن f علاقة من A إلى B بحيث مجموعة تعريف f هي نفسها A؛ فحتى تكون f تطبيقا فلابد أن يتحقق الشرط التالي في f، إذا كان x و y في A بحيث:

$$f(y) = f(x) \ldots\ldots x = y$$

١٤- لتكن f تطبيقا من A إلى B؛ فحتى تكون f تطبيقا متباينا فلابد أن يتحقق الشرط التالي في f، إذا كان x و y في A بحيث:

$$x = y \dots\dots f(x) = f(y)$$

السؤال الثاني: إذا كانت A وB مجموعتين بحيث 2=|A| و3=|B| و$|A \cap B| = 1$؛ فاحسب ما يلي:
(٥ درجات: كل فقرة نصف درجة)

١- $|A \cap A'| = \cdots$.

٢- $|A \cup B| = \cdots$.

٣- $|A \times B| = \cdots$.

٤- $|A - B| = \cdots$.

٥- $|A\Delta B| = \cdots$.

٦- $|p(A \times B)| = \cdots$.

٧- ليكن لدينا المجموعة C، إذا كانت $A \approx C$ فإن $|C| = \cdots$.

٨- إذا كانت $B \approx D$ بحيث $|D \cup B| = 5$ فإن $|D \cap B| = \cdots$.

٩- إذا كان f تطبيقا متباينا من A إلى B فإن $|f(A)| = \cdots$.

١٠- إذا كان f تطبيقا من B إلى A فإن $|f^{-1}(A)| = \cdots$.

السؤال الثالث: أجب عن ما يأتي (١٠ درجات: كل فقرة درجتان):

١- متى نقول عن مجموعتين إنهما متكافئتان؟

٢- متى نقول إن $*$ عملية ثنائية على مجموعة S؟

٣- هل تشكل المجموعة $P = \{\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-\}$، تجزئة لمجموعة الأعداد الحقيقية؟ ولماذا؟

٤- متى نقول عن النظام $(G,\star)$ أنه زمرة؟

٥- متى نقول عن النظام $(R,+,\cdot)$ أنه حلقة؟.

السؤال الرابع: إذا كان لدينا النظام ذو العمليتين $(\mathbb{Z}_9, \oplus, \odot)$، حيث $\mathbb{Z}_9 = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$، وعرفنا العمليتين $x \oplus y$ و$x \odot y$ في $\mathbb{Z}_9$ بأنه باقي قسمة جمع وضرب العددين x وy في $\mathbb{Z}$ على العدد 9 (على التوالي)؛ فأجب عما يلي:

١- بالنسبة للعملية $\oplus$، فاحسب ما يلي: $3 \oplus 7$، 3^2، 4^{-1}. (درجة ونصف)

٢- بالنسبة للعملية $\odot$، فاحسب ما يلي: $3\odot 7$، 3^2، 4^{-1}. (درجة ونصف)

٣- أثبت أن التطبيق f من النظام $(\mathbb{Z}_9, \oplus, \odot)$ إلى نفسه والمعرف بالشكل $f(x)=x$ لكل x في $\mathbb{Z}_9$ يشكل تشاكلا داخليا وأوجد نواته بالنسبة للعملية $\oplus$. (ثلاث درجات)

السؤال الخامس: أجب عن ما يلي (١٢ درجة: كل فقرة ثلاث درجات):

(أ) لتكن لدينا المجموعة $\mathbb{R}^*$ وعرفنا عليها العلاقة R التالية: لكل a وb في $\mathbb{R}^*$ فإن aRb إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي غير صفري k بحيث $a=kb$. أثبت أن R تشكل علاقة تكافؤ على $\mathbb{R}^*$ وأوجد $\bar{1}$.

(ب) لتكن H_1 وH_2 زمرتين جزئيتين من الزمرة G. أثبت أن تقاطعهما زمرة جزئية من G.

(ج) أثبت أن الفترة المفتوحة (0,1) غير قابلة للعد.

(د) إذا كان f تشاكلا من الزمرة $(G,\star)$ إلى الزمرة $(H,*)$، وكان $kerf = \{e\}$ حيث e هو محايد الزمرة G؛ فأثبت أن التشاكل متباين.

الحل

السؤال الأول: بافتراض أن Ω هي المجموعة الشاملة؛ فأكمل الفراغ باستخدام الأنسب من الرموز الآتية:

$: \in, \exists, \nexists, \subset, \emptyset, \Omega, \leq, \Longrightarrow, \Longleftarrow, \forall, \equiv, \not\equiv, =, \cup, \cap$

(٧ درجات: كل فقرة نصف درجة)

١- $\sim(E \to F) \equiv E \wedge \sim F$

٢- $E \leftrightarrow F \not\equiv E \vee F$

٣- لتكن $A=\{1,2\}$، فإن $\{\{1\}\} \subset p(A)$

٤- إذا كان f تطبيقا من A إلى B؛ فإن: $A = f^{-1}(B)$

٥- $\{1\} \in \{\{1\}\}$

٦- $(A - B) \cup (B - A) = A\Delta B$

٧- $x \in A - B \Longrightarrow x \in A$

٨- (يوجد x في A)، تكتب بالترميز الرياضي: $\exists\, x \in A$

٩- يقال أن المجموعتين A وB منفصلتان إذا كان $A \cap B = \emptyset$

١٠- لتكن H زمرة جزئية من G؛ فإنها تكتب رياضيا بالشكل $H \leq G$.

١١- إذا كان لدينا تطبيق $f: C \to D$ وكانت المجموعتان غير الخاليتين A وB محتواتين في C بحيث $A \subseteq B$، فإن:

$$x \in f(A) \Longrightarrow x \in f(B)$$

١٢- $\emptyset' = \Omega$

١٣- لتكن f علاقة من A إلى B بحيث مجموعة تعريف f هي نفسها A؛ فحتى تكون f تطبيقا فلابد أن يتحقق الشرط التالي في f، إذا كان x وy في A بحيث:

$$x = y \Longrightarrow f(x) = f(y)$$

١٤- لتكن f تطبيقا من A إلى B؛ فحتى تكون f تطبيقا متباينا فلابد أن يتحقق الشرط التالي في f، إذا كان x وy في A بحيث:

$$x = y \Leftarrow f(x) = f(y)$$

السؤال الثاني: إذا كانت A وB مجموعتين بحيث 2=|A| و3=|B| و$|A \cap B| = 1$؛ فاحسب ما يلي: (٥ درجات: كل فقرة نصف درجة)

١- $|A \cap A'| = 0$.

٢- $|A \cup B| = 4$.

٣- $|A \times B| = 6$.

٤- $|A - B| = 1$.

٥- $|A \Delta B| = 3$.

٦- $|p(A \times B)| = 2^6$.

٧- ليكن لدينا المجموعة C، إذا كانت $A \approx C$ فإن $|C| = 2$.

٨- إذا كانت $B \approx D$ بحيث $|D \cup B| = 5$ فإن $|D \cap B| = 1$.

٩- إذا كان f تطبيقا متباينا من A إلى B فإن $|f(A)| = 2$.

١٠- إذا كان f تطبيقا من B إلى A فإن $|f^{-1}(A)| = 3$.

السؤال الثالث: أجب عن ما يأتي (١٠ درجات: كل فقرة درجتان):

١- متى نقول عن مجموعتين إنهما متكافئتان؟

إذا وجد تطبيق تقابل من إحداهما إلى الأخرى.

٢- متى نقول إن $*$ عملية ثنائية على مجموعة S؟

إذا كانت $*$ تطبيقا من $S \times S$ إلى S.

٣- هل تشكل المجموعة $P = \{\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-\}$، تجزئة لمجموعة الأعداد الحقيقة؟ ولماذا؟

لا، لأن اتحادها لا يساوي مجموعة الأعداد الحقيقية حيث يتبقى العدد صفر فهو لم يذكر هنا.

٤- متى نقول عن النظام $(G,\star)$ أنه زمرة؟

إذا كان مغلقا ودامجا وبه عنصر محايد ولكل عنصر فيه يوجد نظير له.

٥- متى نقول عن النظام $(R,+,\cdot)$ أنه حلقة؟.

إذا كان النظام $(R,+)$ زمرة إبدالية، والنظام $(R,+,\cdot)$ شبه زمرة، وكانت عملية الضرب تتوزع على الجمع من اليمين واليسار.

السؤال الرابع: إذا كان لدينا النظام ذو العمليتين $(\mathbb{Z}_9, \oplus, \odot)$، حيث $\mathbb{Z}_9 = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$، وعرفنا العمليتين $x \oplus y$ و $x \odot y$ في $\mathbb{Z}_9$ بأنه باقي قسمة جمع وضرب العددين x و y في $\mathbb{Z}$ على العدد 9 (على التوالي)؛ فأجب عما يلي:

١- بالنسبة للعملية $\oplus$، فاحسب ما يلي: $3 \oplus 7$، 3^2، 4^{-1}. (درجة ونصف)

$3 \oplus 7 = 1$، $3^2 = 3 \oplus 3 = 6$، $4^{-1} = 5$.

٢- بالنسبة للعملية $\odot$، فاحسب ما يلي: $3 \odot 7$، 3^2، 4^{-1}. (درجة ونصف)

$3 \odot 7 = 3$، $3^2 = 3 \odot 3 = 0$، $4^{-1} = 7$.

٣- أثبت أن التطبيق f من النظام $(\mathbb{Z}_9, \oplus, \odot)$ إلى نفسه والمعرف بالشكل $f(x)=x$ لكل x في $\mathbb{Z}_9$ يشكل تشاكلا داخليا وأوجد نواته بالنسبة للعملية $\oplus$. (ثلاث درجات)

داخلي لأنه من النظام إلى نفسه. أما لإثبات أنه تشكل فإنه لكل x و y في $\mathbb{Z}_9$ فإن:

$$f(x \oplus y) = x \oplus y = f(x) \oplus f(y)$$

$$f(x \odot y) = x \odot y = f(x) \odot f(y)$$

ولحساب النواة نقول:

$$\ker(f) = \{x \in \mathbb{Z}_9 | f(x) = 0\}$$

$$= \{x \in \mathbb{Z}_9 | x = 0\} = \{0\}$$

السؤال الخامس: أجب عن ما يلي (١٢ درجة: كل فقرة ثلاث درجات):

(أ) لتكن لدينا المجموعة $\mathbb{R}^*$ وعرفنا عليها العلاقة R التالية: لكل a و b في $\mathbb{R}^*$ فإن aRb إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي غير صفري k بحيث $a=kb$. أثبت أن R تشكل علاقة تكافؤ على $\mathbb{R}^*$ وأوجد $\bar{1}$.

العلاقة انعكاسية لأن لكل عدد حقيقي غير صفري a فإن $a=1(a)$ وبالتالي aRa.

العلاقة تناظرية لأن لو كان aRb فإنه يوجد عدد حقيقي غير صفري k بحيث $a=kb$. وبالتالي k بحيث $b=(1/k)a$. أي أن bRa.

العلاقة متعدية لأنه لوكان aRb و bRc فإنه يوجد عددان حقيقيان غير صفريين k و l بحيث $a = kb$ و $b = lc$. إذن $a = klc$ وبالتالي aRc.

بما أن العلاقة انعكاسية وتناظرية ومتعدية إذن هي علاقة تكافؤ. الآن:

$$\bar{1} = \left\{x \in \mathbb{R}^* \middle| xR1\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^* \middle| x = k(1) = k \wedge k \in \mathbb{R}^*\right\} = \mathbb{R}^*$$

(ب)لتكن H_1 و H_2 زمرتين جزئيتين من الزمرة G. أثبت أن تقاطعهما زمرة جزئية من G.

بداية، تقاطعهما غير خال لاحتواء كل منهما على محايد الزمرة G. الآن لنفرض أن العنصرين x و y يقعان في التقاطع. إذن يقع هذان العنصران في كل من الزمرتين الجزئيتين. ولكن من خصائص الزمر أنها إذا احتوت على عنصر فإنها تحوي نظيره. إذن x و y^{-1} يقعان في كل من الزمرتين الجزئيتين. ولكن من خصائص الزمر الإغلاق بالنسبة للعملية المعرفة عليها. إذن حاصل الضرب xy^{-1} يقع أيضا في كل من الزمرتين وبالتالي يقع في تقاطعهما. إذن تقاطعهما زمرة جزئية من G.

(ج) أثبت أن الفترة المفتوحة (0,1) غير قابلة للعد.

لنفرض أنها قابلة للعد. ولنفرض أن لدينا تطبيق التقابل $f: \mathbb{N} \to (0,1)$ بحيث أن:

$$f(1) = 0.a_{11}a_{12}a_{13}\cdots$$
$$f(2) = 0.a_{21}a_{22}a_{23}\cdots$$
$$f(3) = 0.a_{31}a_{32}a_{33}\cdots$$
$$\vdots$$

حيث $a_{ij} \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ لكل عددين طبيعيين i و j. الآن خذ العدد

$$y = 0.b_1b_1b_1\cdots$$

حيث

$$b_i = 1 \qquad \text{إذا كان } a_{ii} \neq 1$$
$$b_i = 2 \qquad \text{إذا كان } a_{ii} = 1$$

لكل عدد طبيعي i. إذن $y \in (0,1)$. ولأن $b_i \neq a_{ii}$ لكل i؛ فإن العدد y ليس صورة لأي عدد طبيعي. وهذا تناقض مع كون f تقابلا. إذن لا يمكن إيجاد تقابل بين مجموعة الأعداد الطبيعية والفترة (0,1). إذن الفترة المفتوحة (0,1) غير قابلة للعد.

(د) إذا كان f تشاكلا من الزمرة (G,∗) إلى الزمرة (H,∘)، وكان $kerf = \{e\}$ حيث e هو محايد الزمرة G؛ فأثبت أن التشاكل متباين.

لنفرض أن $kerf = \{e\}$ وأن $f(x_1) = f(x_2)$ حيث $x_1, x_2 \in G$. إذن:

$$f(x_1) \circ \left(f(x_2)\right)^{-1} = f(x_2) \circ \left(f(x_2)\right)^{-1} = e'$$

باستخدام خاصة النظير في H. ولأن النظام (H,∘) دامج؛ فإن النظير وحيد. ولكن نظير $f(x_2)$ هو

$$\left(f(x_2)\right)^{-1} = f(x_2^{-1})$$

(استفادة من نظرية). ولأن f تشاكل فإننا نحصل على:

$$f(x_1 * x_2^{-1}) = f(x_1) \circ f(x_2^{-1}) = e'$$

حيث e' محايد H. إذن $x_1 * x_2^{-1} \in kerf = \{e\}$ حسب تعريف النواة. وبالتالي

$$x_1 * x_2^{-1} = e$$

وبالضرب في x_2 من اليمين للطرفين واستخدام خاصة العنصر المحايد في G؛ نجد أن:

$$(x_1 * x_2^{-1}) * x_2 = e * x_2 = x_2$$

وحيث أن علاقة المساواة علاقة تناظرية على G؛ فيمكن كتابة المعادلة الأخيرة بالشكل:

$$x_2 = (x_1 * x_2^{-1}) * x_2$$

وباستخدام خاصتي التجميع والنظيرفي G نجد أن:

$$x_2 = (x_1 * x_2^{-1}) * x_2 = x_1 * (x_2^{-1} * x_2) = x_1 * e = x_1$$

لأن e هو العنصر المحايد في G. إذن $x_1 = x_2$ والتطبيق f متباين.