7.2.3. بعض التوزيعات الاحتمالية المنفصلة (حالة الأحداث المستقلة)

(أولاً) توزيع ذو الحدين: إذا كان لدينا تجربة ما تتكرر (n) مرة، وكان احتمال ظهور حدث ما مرة واحدة (النجاح) هو p، واحتمال عدم ظهور الحدث مرة واحدة (الفشل) هو q، فإن احتمال ظهور الحدث (X) مرة من بين التكرار n ، يتبع توزيع ذي الحدين الذي دالته الاحتمالية:

$$P(x) = C_x^n p^x q^{n-x} \quad ; X = 0,1,2,\ldots,n$$

مواصفات التوزيع:

- توزيع منفصل يستخدم في حالة الأحداث المستقلة. ويتوقف على قيمة الاحتمال.
- $\sum P(x) = \sum C_x^n p^x q^{n-x} = 1$
- $p + q = 1$

خصائص التوزيع: يمكن إيجاد الخصائص مباشرة من المسألة حتى قبل حساب التوزيع الاحتمالي وهذه الخصائص على النحو التالي:

- المتوسط: $\mu = np$
- التباين: $\sigma^2 = npq$
- الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{npq}$

مثال (7.2): إذا كان احتمال ارتفاع مؤشر سوق الأسهم هو (3/4) اختيرت ثلاث دول. أوجد:

- **التوزيع الاحتمالي لعدد الدول التي يرتفع مؤشر سوق أسهمها.**
- **متوسط التوزيع وتباينه وانحرافه المعياري.**
- **احتمال ارتفاع مؤشر سوق الأسهم لدولتين على الأقل.**

الحل:

$$n = 3 \qquad p = \frac{3}{4} \qquad q = 1 - p = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

X (الحدث): ارتفاع مؤشر سوق الأسهم بدولة.

X: متغير عشوائي منفصل يأخذ القيم 3 ,2 ,1 ,0، ويتبع توزيع ذي الحدين الذي دالته الاحتمالية:

$$P(x) = C_x^n p^x q^{n-x} = C_x^3 \left(\frac{3}{4}\right)^x \left(\frac{1}{4}\right)^{3-x} \;;\; X = 0,1,2,3$$

- التوزيع الاحتمالي لعدد الدول التي يرتفع مؤشر سوق أسهمها

- التوزيع الاحتمالي لعدد الدول التي يرتفع مؤشر سوق أسهمها

$$P(X=0)=P(0)=C_0^3\left(\frac{3}{4}\right)^0\left(\frac{1}{4}\right)^3=1\times1\times\frac{1}{64}=\frac{1}{64}$$

$$P(X=1)=P(1)=C_1^3\left(\frac{3}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^2=3\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{16}=\frac{9}{64}$$

$$P(X=2)=P(2)=C_2^3\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^1=3\times\frac{9}{16}\times\frac{1}{4}=\frac{27}{64}$$

$$P(X=3)=P(3)=C_3^3\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^0=1\times\frac{27}{64}\times1=\frac{27}{64}$$

$$\sum P(x)=\frac{1}{64}+\frac{9}{64}+\frac{27}{64}+\frac{27}{64}=\frac{64}{64}=1$$

- متوسط التوزيع وتباينه وانحرافه المعياري

$$\mu=np=3\times\frac{3}{4}=2.25$$

$$\sigma^2=npq=3\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{9}{16} \quad , \quad \sigma=\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{\frac{9}{16}}=0.75$$

- احتمال ارتفاع مؤشر سوق الأسهم لدولتين على الأقل ($X=2$ أو $X=3$)

$$P(X\geq 2)=P(X=2)+P(X=3)=\frac{27}{64}+\frac{27}{64}=\frac{54}{64}$$

(ثانياً) توزيع بواسون: هو توزيع منفصل يستخدم في حالة الأحداث المستقلة ويهتم بالحوادث النادرة، مثل : الحرائق في إحدى المدن، الزلازل، الحـوادث المرورية على إحدى الطرق، الأخطاء المطبعية في إحدى صفحات كتاب، المكالمات التي يتلقاها سنترال ما في ثانية واحدة ونحو ذلك، ويعطينا احتمال عدد مرات ظهور هذه الحوادث النادرة، فإذا كانت (X) ترمز لعدد مرات ظهور حادثة نادرة، فإن الدالة الاحتمالية للتوزيع تكون:

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \quad ; X = 0, 1, 2, \ldots$$

حيث: $e = 2.7$ مقدار ثابت، وλ متوسط التوزيع.

مواصفات التوزيع:

- توزيع منفصل يستخدم في حالة الأحداث المستقلة النادرة.
- $\sum P(x) = \sum \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} = 1$
- متوسط هذا التوزيع يساوي تباينه

خصائص التوزيع: الخصائص على النحو التالي:

- المتوسط: $\mu = \lambda$
- التباين: $\sigma^2 = \lambda$
- الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{\lambda}$

مثال (7.3): إذا كان متوسط عدد الأخطاء المطبعية خلال صفحات أحدى الكتب هو 3 أخطاء. أوجد:

(ملاحظة $e^{-3} = 0.05$)

- احتمال عدم ظهور أي خطأ.
- احتمال ظهور خطأين.
- احتمال ظهور خطأين على الأكثر.
- احتمال ظهور خطأين على الأقل.

الحل: نلاحظ أن $\lambda = 3$

X (الحدث): عدد الأخطاء المطبعية.

X: متغير عشوائي منفصل يأخذ القيم $0, 1, 2, \ldots$، ويتبع توزيع بواسون الذي دالته الاحتمالية:

$$P(x) = \frac{e^{-3} 3^x}{x!} \quad ; X = 0, 1, 2, \ldots$$

- احتمال عدم ظهور أي خطأ $(X = 0)$

$$P(X = 0) = \frac{(0.05) \times 3^0}{0!} = 0.05$$

- احتمال ظهور خطأين $(X = 2)$

$$P(X = 2) = \frac{(0.05) \times 3^2}{2!} = \frac{(0.05) \times 9}{2x1} = 0.225$$

- احتمال ظهور خطأين على الأكثر $(X = 0$ أو $X = 1$ أو $X = 2)$

$$P(X \leq 2) = P(X = 2) + P(X = 1) + P(X = 0) = 0.225 + \frac{(0.05) \times 3^1}{1!} + 0.05$$
$$= 0.225 + 0.15 + 0.05 = 0.425$$

- احتمال ظهور خطأين على الأقل ($X = 2$ أو $X = 3$ أو $X = 4$ أو...الخ)

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + \cdots$$

$$= 1 - \left\{P\left(X = 1\right) + P\left(X = 0\right)\right\} = 1 - \left\{0.15 + 0.5\right\} = 1 - 0.20 = 0.8$$

تمارين:

7.4.2. إذا كان احتمال أن يكون المصباح جيداً من بين مجموعة من المصابيح هو **(0.8)** اخترنا **(4)** مصابيح عشوائياً، أوجد:

1. التوزيع الاحتمالي لعدد المصابيح الرديئة.
2. متوسط عدد المصابيح الجيدة.
3. الانحراف المعياري للتوزيع.
4. احتمال اختيار مصباحين على الأكثر جيده.
5. احتمال اختيار مصباح رديء على الأكثر.

الحل:

n = 4   p = 0.8   q = 1 - p = 1- 0.8 = 0.2

X (الحدث): ان يكون المصباح جيد

X متغير عشوائي منفصل يأخذ القيم 0,1,2,3,4 ويتبع توزيع ذي الحدين الذي دالته الاحتمالية:

$$P(x) = C_x^n p^x q^{n-x} = C_x^4 (0.8)^x (0.2)^{4-x} \quad ; X = 0,1,2,3,4$$

Y (الحدث): ان يكون المصباح ردئ

Y متغير عشوائي منفصل يأخذ القيم 0,1,2,3,4 ويتبع توزيع ذي الحدين الذي دالته الاحتمالية:

$$P(y) = C_y^n q^y p^{n-y} = C_y^4 (0.2)^y (0.8)^{4-y} \quad ; Y = 0,1,2,3,4$$

- التوزيع الاحتمالي لعدد المصابيح الرديئة

١) التوزيع الاحتمالى لعدد المصابيح الرديئة:

$$P(Y=0)=P(0)=C_0^4(0.2)^0(0.8)^{4-0}=\frac{256}{625}=0.4096$$

$$P(Y=1)=P(1)=C_1^4(0.2)^1(0.8)^{4-1}=\frac{256}{625}=0.4096$$

$$P(Y=2)=P(2)=C_2^4(0.2)^2(0.8)^{4-2}=\frac{96}{625}=0.1536$$

$$P(Y=3)=P(3)=C_3^4(0.2)^3(0.8)^{4-3}=\frac{16}{625}=0.0256$$

$$P(Y=4)=P(4)=C_4^4(0.2)^4(0.8)^{4-4}=\frac{1}{625}=0.0016$$

$$\sum P(x)=\frac{256}{625}+\frac{256}{625}+\frac{96}{625}+\frac{16}{625}+\frac{1}{625}=1$$

٢) متوسط عدد المصابيح الجيدة.

$$\mu = np = 4 \times 0.8 = \frac{16}{5} = 3.2$$

٣) الانحراف المعياري للتوزيع.

$$\sigma = \sqrt{nqp} = \sqrt{4 \times 0.2 \times 0.8} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} = 0.8$$

٤) احتمال اختيار مصباحين على الأكثر جيدة.

$$P(X \leq 2) = C_0^4(0.8)^0(0.2)^{4-0}+C_1^4(0.8)^1(0.2)^{4-1}+C_2^4(0.8)^2(0.2)^{4-2}= \frac{113}{625} = 0.1808$$

٥) احتمال اختيار مصباح رديء على الأكثر.

$$P(Y \leq 1) = C_0^4(0.2)^0(0.8)^{4-0}+C_1^4(0.2)^1(0.8)^{4-1}= \frac{512}{625} = 0.8192$$

7.4.3. شركة لتعبئه المنتجات الزراعية، احتمال أن يكون أحد الصناديق المعبأة به سلع تالفة هو (0.3) اخترنا عينة من (4) صناديق. وكان التوزيع الاحتمالي لعدد الصناديق السليمة (X) كما هو موضح في الجدول الآتي:

عدد الصناديق السليمة X	0	1	2	3	4
الاحتمال $P(x)$	0.0081	?	0.2646	?	0.2401

1. أذكر اسم التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (X) و اكتب دالته الاحتمالية.
2. استكمل البيانات الناقصة في الجدول.
3. أحسب متوسط التوزيع و تباينه.
4. أحسب احتمال الحصول على (3) صناديق على الأقل بها سلع تالفة.

$n = 4 \qquad p = 0.3 \qquad q = 1 - p = 1 - 0.3 = 0.7$

X (الحدث): عدد الصناديق السليمة

X متغير عشوائي منفصل يأخذ القيم 0,1,2,3,4 ويتبع توزيع ذي الحدين الذي دالته الاحتمالية:

$$P(x) = C_x^n q^x p^{n-x} = C_x^4 (0.7)^x (0.3)^{4-x} \quad ; X = 0,1,2,3,4$$

عدد الصناديق السليمة X	0	1	2	3	4
P(x) الاحتمال	0.0081	0.0756	0.2646	0.4116	0.2401

3) متوسط التوزيع وتباينه.

$$\mu = 4 \times 0.7 = \frac{14}{5} = 2.8$$

$$\sigma^2 = 4 \times 0.7 \times 0.3 = \frac{21}{25} = 0.84$$

٤) احتمال الحصول على (3) صناديق على الأقل بها سلع تالفة.

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0.0837$$

7.4.4. إذا كان متوسط عدد الحوادث الشهرية على إحدى الطرق السريعة هو **(4)** حوادث، احسب:

$(e^{-4} = 0.018)$

1. احتمال عدم وقوع أي حادثة.
2. احتمال وقوع حادثين على الأقل.
3. احتمال وقوع حادثين على الأكثر.
4. تباين التوزيع.

الحل:

نلاحظ أن $\lambda = 4$

X (الحدث): عدد الحوادث الشهرية

X: متغير عشوائي منفصل يأخذ القيم ...,0,1,2 ، ويتبع توزيع بواسون الذي دالته الاحتمالية:

$$P(x) = \frac{e^{-4}4^x}{x!} \quad ; \mathrm{X} = 0,1,2,\ldots$$

احتمال عدم وقوع أي حادثة (X=0)

$$P(X=0) = \frac{(0.018)4^0}{0!} = 0.018$$

احتمال وقوع حادثين على الأقل.

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + \cdots \\ &= 1 - \{P(X=1) + P(X=0)\} \\ &= 1 - \{0.072 + 0.018\} \\ &= 1 - .09 \\ &= 0.91 \end{aligned}$$

احتمال وقوع حادثين على الأكثر.

$$P(X \leq 2) = P(X = 2) + P(X = 1) + P(X = 0)$$
$$= 0.144 + 0.072 + 0.018$$
$$= 0.234$$

تباين التوزيع.

$$\sigma^2 = \lambda = 4$$