جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الفيزياء والفلك

مقرر 210 فيز

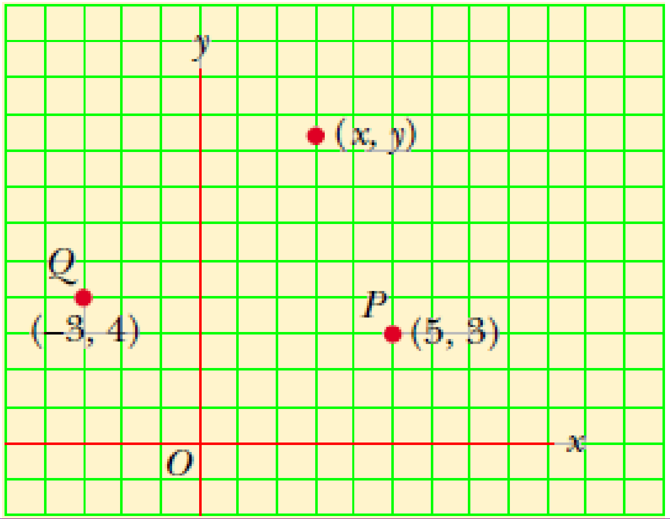
د. ناصر بن صالح الزايد

nalzayed@ksu.edu.sa

المحاضرة رقم: 6

الفصل الثالث: المتجهات Chapter 3: Vectors
3.1 نظام الإحداثيات

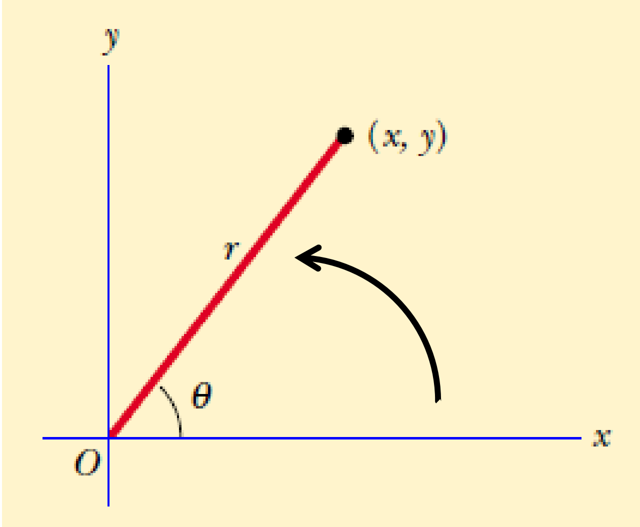
- يتم التعبير عادة عن مواقع الأجسام باستخدام نظم تسمى نظم الإحداثيات. ومن هذه النظم ما يلي:
- 1- نظام الإحداثيات الكارتيزية Cartesian Coordinates (x,y)
- 2- نظام الإحداثيات القطبية Polar Coordinates (r,θ)

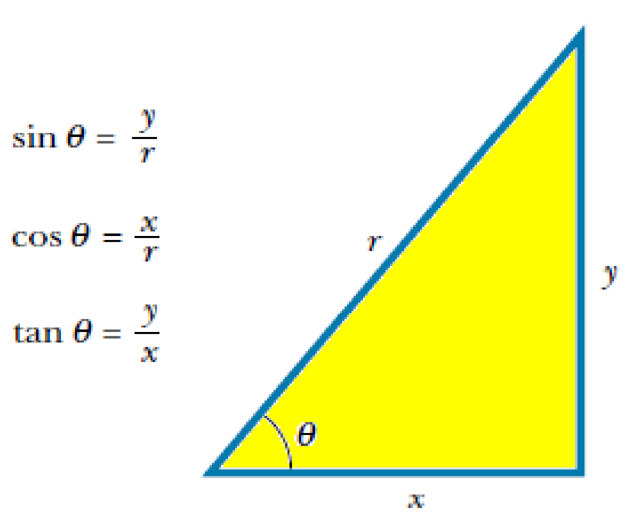


- على اليسار: يتم التعبير عن موقع أية نقطة في المستوى x-y باستخدام نقطة من أحداثيين: (x,y)
- مثلا نقطة P تقع عند: (5,3) بينما Q عند: (-3,4)
- ومعنى ذلك أن نقطة P تبعد عن نقطة الأصل بـ 5 وحدات على محور x و 3 وحدات على محور y.
- لاحظ أشارة (-) عندما تكون النقطة على يسار نقطة الأصل وكذلك عندما تكون تحتها بالنسبة لمحور y.

- يمكن وصف نفس النقاط باستخدام نظام الإحداثيات القطبية Polar Coordinates (r,θ)
- كما يمكن التحويل بن النظامين باستخدام معادلات رياضية كما سوف نبين بعد قليل.
- سوف يتم استخدام النظامين في نفس الوقت بحسب الحاجة خلال هذا المقرر أن شاء الله.

الفصل الثالث: المتجهات Chapter 3: Vectors
3.1 نظام الإحداثيات القطبية





- كما في الأشكال المجاورة، تم التعبير عن الموقع بدلا من (x,y) باستخدام أحداثي r يبين المسافة بين المركز والنقطة وكذلك باستخدام زاوية قطبية هي θ .
- للتحويل بين النظامين يمكن استخدام حساب المثلثات:

$$x = r\cos\theta \qquad (3.1)$$

$$y = r\sin\theta \qquad (3.2)$$

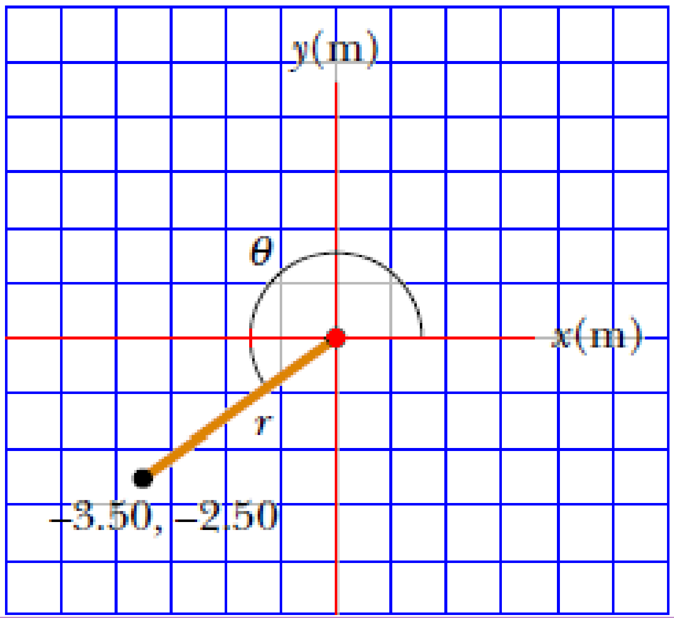
$$\tan\theta = \frac{y}{x} \qquad (3.3)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (3.4)$$

- لاحظ أن الزاوية θ تقاس بالنسبة لمحور x وباتجاه ضد عقارب الساعة دائما . ويجب وضع القيمة الحقيقية لكل من x و y بما في ذلك الإشارات الجبرية.

Chapter 3: Vectors الفصل الثالث: المتجهات
3.1 نظام الإحداثيات: مثال للتوضيح

- مثال 3.1 الإحداثيات القطبية:
- إذا علمت بأن الإحداثيات الكارتيزية لنقطة ما في الفراغ هي: (x,y) = (-3.5, -2.5) كما هو مبين في الشكل، فاحسب الإحداثيات القطبية المعادلة لها.



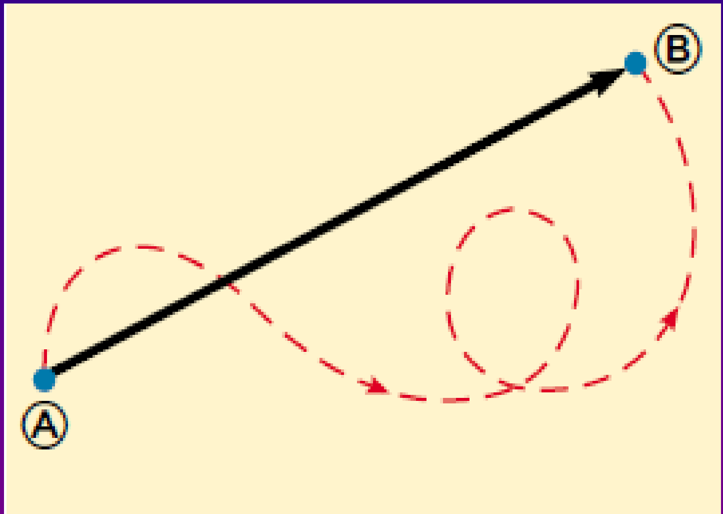
$$\because r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$= \sqrt{(-3.5^2) + (-2.5^2)}$$
$$= 4.3\, m$$
$$\because \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-2.5}{-3.5} = 0.714$$
$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1} 0.714 = 216^o$$

.

- لاحظ أهمية الاحتفاظ بالإشارات في الكميات الداخلة في المعادلات السابقة. بحسب الزاوية التي وصلنا إليها، فنحن في الربع الثالث.
- وكان من المفروض أن نتوقع هذه الزاوية حيث أن قيمة كل من x و y سالبة.

Chapter 3: Vectors الفصل الثالث: المتجهات
3.2 الكميات المتجهة والكميات القياسية

- سبقت الإشارة إلى الفرق بين الكميات المتجهة والقياسية.
- الكمية المتجهة لها مقدار + اتجاه
- الكمية القياسية لها مقدار فقط.



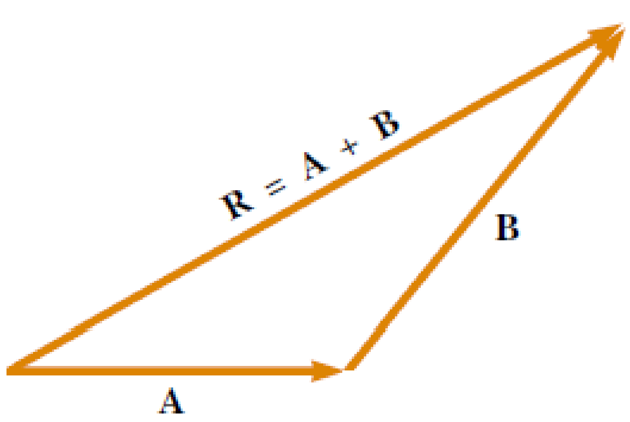
Vectors	Scalars
Displacement, **Δx**	Speed, u
Velocity, **V**	Distance, d
Acceleration, **a**	Temperature, T
Force, **F**	Density, ρ
Torque, τ	Time, t

- في الشكل المرفق: لاحظ الفرق الكبير بين الكميات المتجهة والقياسية. طول الخط الأحمر يمثل المسافة وهي كمية قياسية، في حين أن المسافة المباشرة بين نقطتي *A* و *B* مضافا لها الاتجاه تمثل الإزاحة.
- هناك فرق كبير بين أن يكون رأس السهم عند نقطة *B* أو عند نقطة *A* .

الفصل الثالث: المتجهات Chapter 3: Vectors
3.3 تساوي المتجهين وجمع المتجهات

- **تساوي متجهين Equality of Two Vectors :**
- هناك شرطان لتساوي المتجهين **A** و **B** أي لتحقق: **A = B** هما:
- 1- يجب أن يكون مقدار **A** = مقدار **B** أي: $|A|=|B|$
- 2- يجب أن يكون اتجاه **A** هو نفسه اتجاه **B** .

- **جمع متجهين أو أكثر Adding Vectors :**
- هناك ثلاث طرق على الأقل لجميع المتجهات، طريقتان هندسيتان وأخرى حسابية.
- الطريقتان الهندسيتان هما:
- **أولا: طريقة المثلث:**
- وفكرتها أن تقوم برسم المتجه الأول على رسم بياني ومن نهايته تقوم برسم المتجه الثاني، ثم تقوم بأقفال المثلث بمتجه يبدأ من ذيل المتجه الأول وينتهي عند رأس الثاني.



- حاصل جمع المتجهين هو ***R***
- وتسمى هذه الكمية: المحصلة
- إذن المحصلة كمية متجهة وهي تشبه الإزاحة تماما.

3.3 خاصية التبديل والمصاحبة في الجمع

- جمع متجهين أو أكثر Adding Vectors :
- ثانيا: طريقة أكمال المتوازي:
- وهي لا تختلف كثيرا عن الأولى حيث يتم رسم المتجه الأول على ورق رسم بياني، ومن ذيل هذا المتجه يتم رسم المتجه الثاني، ثم نقوم بإكمال المتوازي، وقطر هذا المتوازي الواصل بين ذيلي المتجهين والزاوية المقابلة يمثل المحصلة.

- قانون التبديل في الجميع commutative law of addition:
- المقصود هو أن: $A + B = B + A$

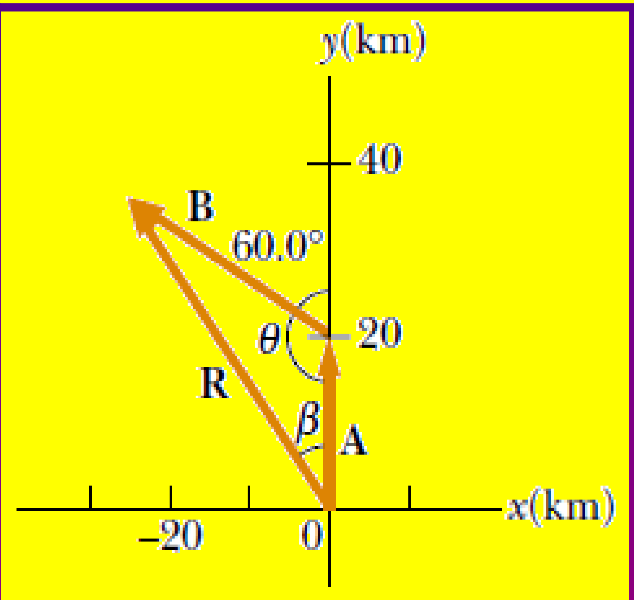
- قانون المصاحبة في الجميع Associative law of addition:
- المقصود هو أن: $A + (B+C) = (A+B) + C$

- متجه أمامه أشارة سالب Negative of a Vector:
- هو متجه يحمل نفس مواصفات المتجه الأصلي ولكن بالاتجاه المعاكس. لاحظ أن جمع متجه A ونفس المتجه بإشارة سالب يعطي صفرا: $A + (-A)= 0$

Chapter 3: Vectors الفصل الثالث: المتجهات
3.3 خاصية طرح المتجهات Subtracting Vectors

- طرح متجهين أو أكثر Subtracting Vectors :
- نفس طريقة الجمع ولكن أحد المتجهين يحمل أشارة سالب (معكوس)
- أي أن: **A – B = A + (-B)**

- **مثال:**
- تتحرك سيارة باتجاه الشمال لمسافة 20 km ، ثم 35 Km باتجاه الشمال الغربي وبزاوية 60^o مع الشمال. احسب مقدار واتجاه المحصلة.



- **مثال:**
- تتحرك سيارة باتجاه الشمال لمسافة 20 km ، ثم 35 Km باتجاه الشمال الغربي وبزاوية 60^o مع الشمال. احسب مقدار واتجاه المحصلة.

- **الحل:**
- يمكن القيام بالحل بطريقتين: الثانية سوف نؤجلها حتى نتحدث عن مركبات المتجه.

Subtracting Vectors 3.3 خاصية طرح المتجهات

- بما أن المثلث الناتج هو مثلث منفرج الزاوية
- إذن نطبق العلاقة التالية:

$$\because\ R = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}$$

$$= \sqrt{(20^2) + (35^2) - 2(20)(35)\cos 120} = 48.2\,km$$

for direction of R, we use the rule of Sines :

$$\frac{\sin\beta}{B} = \frac{\sin\theta}{R}$$

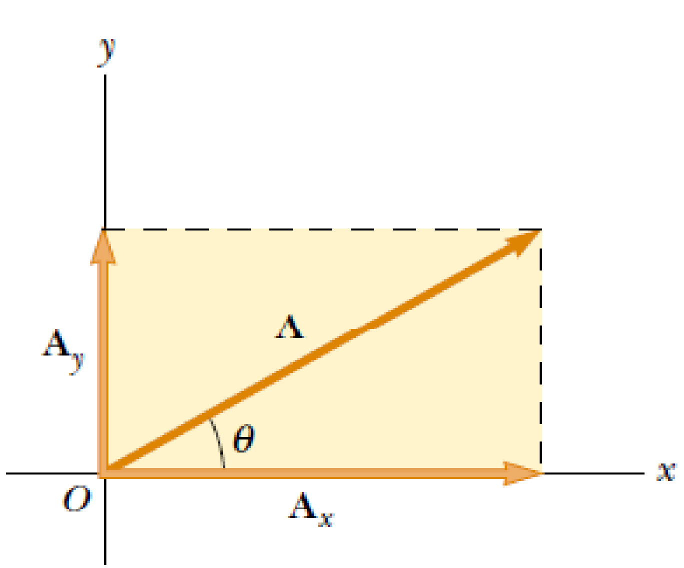
$$\Rightarrow \sin\beta = \frac{B}{R}\sin\theta = \frac{35\,km}{48.2\,km}\sin 120 = 0.629$$

$$\Rightarrow \beta = \sin^{-1}(0.629) = 38.9^o$$

- عندما نستعرض مركبات المتجه، سوف نقوم بإيجاد الزاوية بطريقة ثانية

Chapter 3: Vectors المتجهات :الفصل الثالث
Components of a Vector المتجه مركبات 3.4

- سوف تبدو الأمور أسهل كثيرا عندما نبدأ في استخدام مركبات المتجهات وكذلك وحدات المتجهات، لأنها سوف تمكننا من التعامل الحسابي مع المتجهات.



- في الشكل المجاور، هناك متجه هو ***A*** موجود في المستوى x-y ويعمل زاوية ϑ مع محور x .
- سبق وأن تحدثنا عن جمع المتجهات. ونلاحظ من الرسم ان المتجه ***A*** هو في الحقيقة مجموع المتجهين: A_x و A_y.
- ونفس ما قلناه عن العلاقة بين الأحداثيات الكارتزية والقطبية ينطبق هنا حيث:

A = A_x + A_y

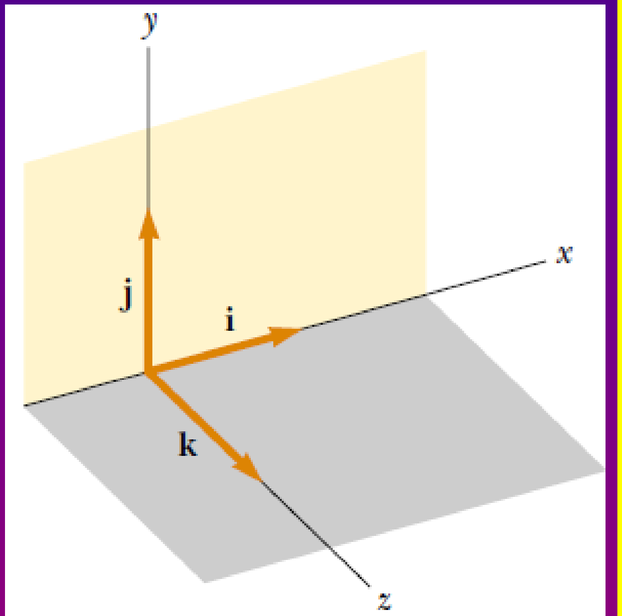
نسمي كلا من **A_x** و **A_y** مركبات المتجه **A**. لاحظ أن هذه المركبات متجهات بحد ذاته.

$$\vec{A}_x = \vec{A}\cos\theta \qquad \vec{A}_y = \vec{A}\sin\theta$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right) \qquad A = \sqrt{A_x^{\ 2} + A_y^{\ 2}}$$

الفصل الثالث: المتجهات Chapter 3: Vectors
3.4 متجهات الوحدة Unit Vectors

- وحدة الكمية الفيزيائية شئ أساسي ومستخدم على نطاق واسع. مثلا وحدة المسافة هي m ووحدة الكلتة هي kg ووحدة الوقت هي s .
- كذلك بالنسبة للمتجه، فالمتجه يتكون من وحدات تشكله، مثلا متجه قميته 2 على اتجاه x الموجب يتكون من وحدتين. وهكذا.
- سوف نستخدم ثلاث وحدات متجهه (كل متجه مقداره وحده واحدة ويقع على طول أحد المحاور الكارتيزية).



- المتجه **i** يمثل متجه الوحدة على محور x
- المتجه **j** يمثل متجه الوحدة على محور y
- المتجه **k** يمثل متجه الوحدة على محور z
- مقدار كل متجه من هذه المتجهات 1 أي أن:
- $|\mathbf{i}|=|\mathbf{j}|=|\mathbf{k}|=1$
- إذن صار يمكننا التعبير عن المركبات المتجهة بدلالة هذه المركبات حيث يلزم أخذ مقدار المركبة مضروبا في متجه الوحدة

الفصل الثالث: المتجهات Chapter 3: Vectors
3.4 التعبير عن المتجهات باستخدام متجهات الوحدة

$$\vec{A}_x = A_x \hat{i} \qquad \vec{A}_y = A_y \hat{j} \qquad \vec{A}_z = A_z \hat{k}$$

- أي أن المركبة المتجهة $\boldsymbol{A}_x$ عبارة عن مقدار هذه المركبة A_x مضروبا في وحدة المتجه **i**. فالوحدة حددت أولا أن المتجه على طول محور x وحددت ثانيا أنه متجه.
- إذن يمكن كتابة كامل المتجه ***A*** كما يلي:

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} \qquad (3.12)$$

- كذلك متجه الموقع لأي نقطة في الفراغ الكارتيزي يعبر عنها باستخدام نفس الأسلوب ولذلك فأن:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} \qquad (3.13)$$

- ذكرنا في شريحة سابقة أن جميع المتجهات يمكن أن يتم بطريقة هندسية أو حسابية، وهنا نستعرض ما قصدنا بالطريقة الحسابية، وهي باستخدام متجهات الوحدة.
- لدينا متجهان ***A*** و ***B*** في المستوى الكارتيزي x-y ومطلوب أيجاد صيغة لجمع المتجهين وإيجاد المحصلة ***R*** . نقوم بذلك كما يلي

3.4 المحصلة باستخدام متجهات الوحدة

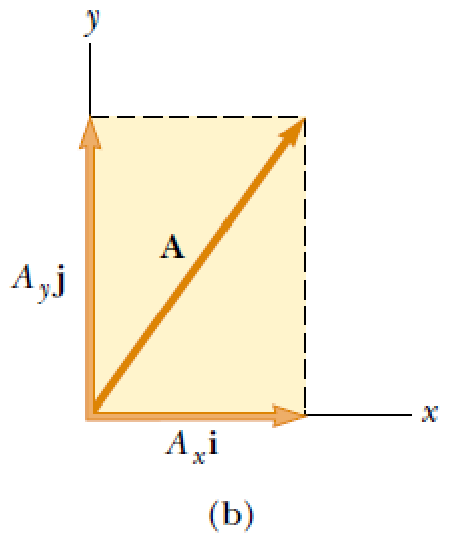
$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$$

$$\because\ \vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} \quad and \quad \vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j}$$

$$\therefore\ \vec{R} = \left(A_x\hat{i} + A_y\hat{j}\right) + \left(B_x\hat{i} + B_y\hat{j}\right)$$

$$= \left(A_x + B_x\right)\hat{i} + \left(A_y + B_y\right)\hat{j} \qquad (3.14)$$

$$with\ :\ R_x = A_x + B_x \quad R_y = A_y + B_y \qquad (3.15)$$



(b)

- R_x هي مركبة المحصلة على محور x و R_y هي مركبة المحصلة على محور y
- مقدار المحصلة يتم الحصول عليه من نظرية فيثاغورس:
- $R = \sqrt{R_x^{\ 2} + R_y^{\ 2}} = \sqrt{(A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2}$
- وكذلك اتجاه المحصلة يمكن حسابه من العلاقه:
- $\theta = \tan^{-1}(R_y / R_x)$

.

Chapter 3: Vectors الفصل الثالث: المتجهات
3.4 مثال باستخدام متجهات الوحدة

- مثال: 3.3 إذا كان لدينا المتجهان **A** و **B** المعطيان كما يلي:
- **A** =(2.0**i** + 2.0**j**) m and **B** =(2.0**i**-4.0**j**) m
- احسب (مجموع المتجهين) (المحصلة)
- أحسب مقدار واتجاه المحصلة

$$\because \vec{R} = \vec{A} + \vec{B} = (2.0 + 2.0)\hat{i} + (2.0 - 4.0)\,\hat{j}$$

$$= 4.0\hat{i} - 2.0\,\hat{j}$$

$$\Rightarrow R_x = 4.0\,m \quad and \quad R_y = -2.0\,m$$

$$\therefore R = \sqrt{R_x^{\ 2} + R_y^{\ 2}} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 4.5\,m$$

$$\theta = \tan^{-1}(R_y / R_x) = \tan^{-1}(-2.0 / 4.0) = -27^o$$

$$\Rightarrow \theta = 360 - 27 = 333^o$$

- لاحظ أننا اتفقنا على حساب الزاوية ضد عقارب الساعة دائما ابتداء من محور x

3.4 مثال آخر باستخدام متجهات الوحدة

- مثال: 3.4 يتحرك جسم ما كما يلي:
- $\mathbf{d_1}$ =(15**i** + 30**j**+12**k**) cm , $\mathbf{d_2}$ =(23**i**-14**j**-5**k**) cm,$\mathbf{d_3}$ =(-13**i** + 15**j**) cm
- اوجد مركبات المحصلة ومقدارها

$$\because \vec{R} = \vec{d}_1 + \vec{d}_2 + \vec{d}_3$$

$$= (15\hat{i} + 30\hat{j} + 12\hat{k}) + (23\hat{i} - 14\hat{j} - 5\hat{k}) + (-13\hat{i} + 15\hat{j})$$

$$= (15 + 23 - 13)\hat{i} + (30 - 14 + 15)\hat{j} + (12 - 5 + 0)\hat{k}$$

$$= (25\hat{i} + 31\hat{j} + 7\hat{k}) \ \ \mathrm{cm}$$

$$\Rightarrow R_x = 25.0\,cm \quad and \quad R_y = 31\,cm \quad and \quad R_z = 7\ cm$$

$$\therefore R = \sqrt{R_x{}^2 + R_y{}^2 + R_z{}^2} = \sqrt{25^2 + 31^2 + 7^2} = 40\ cm$$

Chapter 3: Vectors الفصل الثالث: المتجهات

3.4 الضرب القياسي للمتجهات Scalar Product (Dot Product)

- يعرف الضرب القياسي لمتجهين كما يلي: $\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$
- حيث *A* يمثل مقدار المتجه ***A*** و *B* يمثل مقدار المتجه ***B***. و θ الزاوية بين المتجهين
- لو طبقنا هذا التعريف على متجهات الوحدة نحصل على: $i.i = j.j = k.k = 1$
- حيث أن الزاوية بين متجهات الوحدة ونفسها تساوي الصفر $i.j = j.k = i.k = 0$
- وبين متجهات الوحدة المختلفة تساوي 90^{o}
- وبالتالي فيصبح الضرب القياسي لمتجهين كما يلي (بدلالة متجهات الوحدة):

$$\begin{aligned}\vec{A}.\vec{B} &= (A_x i + A_y j).(B_x i + B_y j)\\ &= A_x B_x i.i + A_x B_y i.j + A_y B_x j.i + A_y B_y j.j\\ &= A_x B_x + 0 + 0 + A_y B_y = A_x B_x + A_y B_y\end{aligned}$$

- الضرب الاتجاهي لمتجهين:
- يعرف كما يلي:

$$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = AB\sin\theta$$