جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الفيزياء والفلك

مقرر 210 فيز

د. ناصر بن صالح الزايد
nalzayed@ksu.edu.sa

المحاضرة رقم: 7

Chapter 4: 2-D Motion الفصل الرابع: الحركة في بعدين
4.1 Displ., Velocity and Acc. Vectors متجهات الإزاحة والسرعة والتسارع

- سبق استعراض متجهات الإزاحة والسرعة والتسارع ولكن في بعد واحد فقط.
- عندما نتحدث عن نفس المتجهات ولكن في بعدين، فنحن نقوم بالاستفادة من المتجهات متعددة المركبات ونستخدم نفس خصائصها وصفاتها.

$$\vec{\Delta}x = x_f - x_i \qquad \Rightarrow \vec{\Delta}r = r_f - r_i \qquad (4.1)$$

$$\vec{\bar{v}}_x = \frac{\vec{\Delta}x}{\Delta t} \qquad \Rightarrow \vec{\bar{v}} = \frac{\vec{\Delta}r}{\Delta t} \qquad (4.2)$$

$$\vec{v}_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\Delta}x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \qquad \Rightarrow \vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\Delta}r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt} \qquad (4.3)$$

$$\vec{\bar{a}}_x = \frac{\vec{\Delta}v_x}{\Delta t} \qquad \Rightarrow \vec{\bar{a}} = \frac{\vec{\Delta}v}{\Delta t} \qquad (4.4)$$

$$\vec{a}_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\Delta}v_x}{\Delta t} = \frac{dvx}{dt} \qquad \Rightarrow \vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\Delta}v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \qquad (4.5)$$

Chapter 4: 2-D Motion الفصل الرابع: الحركة في بعدين

2-D motion at const Acc. 4.1 الحركة بتسارع ثابت في بعدين

- كل الكميات والمعادلات التي نكتبها تكون أجمالا في بعدين هما x,y
- بالنسبة للموضع: يعبر عنه في الفراغ الثنائي بالطريقة التالية: $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} \quad (4.6)$
- كذلك الحال مع السرعة التي يجب أن تكون في بعدين: $\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} \quad (4.7)$
- عندما نريد كتابة معادلات الحركة المنتظمة في بعد واحد فأننا نطبق نفس المعادلات في بعدين ولكن كما لو كان كل بعد مستقلا عن الآخر.
- معادلة السرعة النهائية تصبح بالشكل التالي:

$$\begin{aligned}
\vec{v}_f &= (v_{xi} + a_x t)\hat{i} + (v_{yi} + a_y t)\hat{j} \\
&= (v_{xi}\hat{i} + v_{yi}\hat{j}) + (a_x\hat{i} + a_y\hat{j})t \\
&= \vec{v}_i + \vec{a}t \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

- إذن السرعة الابتدائية لها مركبتان، والتسارع كذلك ، والسرعة النهائية أيضا لها مركبتان.
- كذلك الحال مع معادلة الموقع النهائي x_f فيعبر عنه في بعدين كما يلي:

$$\begin{aligned}
\vec{r}_f &= (x_i + v_{xi}t + 1/2\, a_x t^2)\hat{i} + (y_i + v_{yi}t + 1/2\, a_y t^2)\hat{j} \\
&= (x_i\hat{i} + y_i\hat{j}) + (v_{xi}\hat{i} + v_{yi}\hat{j})t + 1/2(a_x\hat{i} + a_y\hat{j})t^2 \\
&= \vec{r}_i + \vec{v}_i t + 1/2\,\vec{a}t^2 \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

الفصل الرابع: الحركة في بعدين Chapter 4: 2-D Motion
4.1 الحركة بتسارع ثابت في بعدين 2-D motion at const Acc.

• ملخص المعادلات:

$$\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_i + \mathbf{a}t \qquad \begin{cases} v_{xf} = v_{xi} + a_x t \\ v_{yf} = v_{yi} + a_y t \end{cases} \qquad (4.8a)$$

$$\mathbf{r}_f = \mathbf{r}_i + \mathbf{v}_i t + \tfrac{1}{2}\mathbf{a}t^2 \qquad \begin{cases} x_f = x_i + v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \\ y_f = y_i + v_{yi}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \end{cases} \qquad (4.9a)$$

• **مثال**: بدأ جسيم حركته مبتدءا من نقطة الأصل عند اللحظة الزمنية **t = 0 s** وسرعة ابتدائية مركبتها في اتجاه x هي: **20 m/s** و مركبتها في اتجاه y هي: **-15 m/s** .

• إذا علمت بأن الجسيم يتحرك في المستوى x-y بحيث يتسارع فقط باتجاه x بتسارع مقداره: **$a_x = 4\ m/s^2$** .

• (أ) حدد مركبات متجه السرعة وكذلك متجه السرعة عند أية لحظة زمنية.
• (ب) احسب سرعة الجسم المتجهة وكذلك سرعته القياسية عند اللحظة الزمنية t = 5 s .
• (ج) قم بحساب قيم x و y للجسيم عند أية لحظة زمنية، وكذلك عبر عن متجه الموضع عند أي وقت t .

- الحل:
- (أ) معطيات هذه الفقرة: v_{xi}=20 m/s, v_{yi}=-15 m/s, a_x=4 m/s^2, a_y = 0 m/s^2
- نقوم بالحل كل اتجاه على حده حتى نحصل على مركبات السرعة ثم نضعها في متجه:

$$x : v_{xf} = v_{xi} + a_x t = (20 + 4.0t)\, m/s$$

$$y : v_{yf} = v_{yi} + a_y t = (-15 + 0t)\, m/s$$

$$\therefore \vec{v}_f = v_{xf}\,\hat{i} + v_{yf}\,\hat{j} = \left[(20 + 4.0t)\hat{i} - 15\,\hat{j}\right] \qquad (1)$$

- الحل:
- (ب) نعوض في المعادلة (1) أعلاه عن الزمن بالقيمة t = 5 s :

$$\therefore \vec{v}_f(5) = \left[(20 + 4.0 * 5)\hat{i} - 15\,\hat{j}\right] = (40\hat{i} - 15\,\hat{j}) \qquad (1)$$

$$\theta = \tan^{-1}(-15/40) = -21^o\ (\therefore \theta = 360 - 21 = 339^o) \qquad (2)$$

$$u_f = \left|\vec{v}_f(5)\right| = \sqrt{40^2 + (-15)^2} = 43\, m/s \qquad (3)$$

الفصل الرابع: الحركة في بعدين Chapter 4: 2-D Motion
4.1 الحركة بتسارع ثابت في بعدين 2-D motion at const Acc.

- (1) السرعة المتجهة و (2) اتجاه السرعة المتجهة و (3) السرعة القياسية عند نفس الزمن.
- (ج) نريد حساب قيم x و y وكذلك للموضع عند أية لحظة زمنية، كما نريد التعبير عن متجه الموضع:

$$x \because\because\; x_f = x_i + v_{xi} t + 1/2\, a t^2$$

$$but \;: x_i = 0,\; y_i = 0$$

$$\therefore \quad x_f = v_{xi} t + \frac{1}{2} a t^2 = 20\,t + 2\,t^2 \qquad (1)$$

$$y : y_f = v_{yi} t + \frac{1}{2} a t^2 = -15\,t \qquad (2)$$

$$\because\; \vec{r}_f = x_f \hat{i} + y_f \hat{j} = \left[(20\,t + 2t^2)\hat{i} - 15\,t\hat{j} \right] \qquad (3)$$

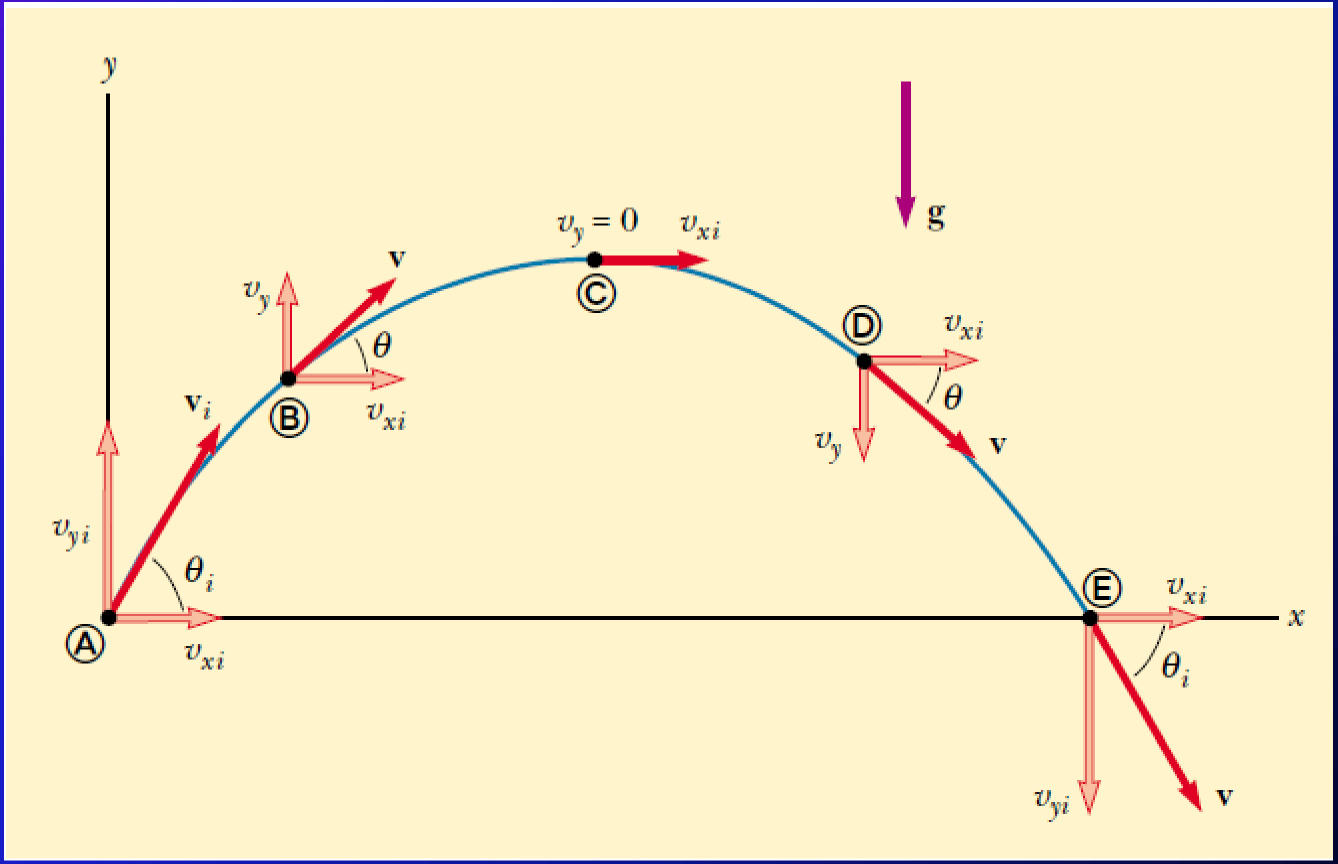
- معادلة رقم (3) ممكن كذلك أيجادها مباشرة من المعادلة السابقة (4.9) .
- لو أردنا حساب **مقدار الإزاحة** بالنسبة لنقطة الأصل والموقع بعد مرور 5 ثواني فهي:

$$\because\; \vec{r}_f = \left[(20 * 5 + 2 * 25)\hat{i} - 15 * 5\,\hat{j} \right]$$

$$= 150\, i - 15\, j \Rightarrow r = \sqrt{150^2 + (-75)^2} = 170\ m$$

Chapter 4: 2-D Motion الفصل الرابع: الحركة في بعدين
Projectile Motion 4.3 حركة المقذوفات

- عندما يتم رمي جسم ما في الجو فأنه يتحرك بصورة حرة في مسار منحن تحت تأثير الجاذبية الأرضية. يتم عادة إهمال أثر الهواء من أجل تسهيل وكتابة معادلات الحركة.
- نقوم بدراسة الحركة وكأن هناك حركتين مستقلتين واحدة رأسية y والثانية أفقية x .



Chapter 4: 2-D Motion الفصل الرابع: الحركة في بعدين
4.3 حركة المقذوفات Projectile Motion

• المعطيات الابتدائية لحركة المقذوفات هي كما يلي:

$$a_x = 0 \ , a_y = -9.8\, m/s^2 \ , \ x_i = 0 \ , \ y_i = 0$$

• كما في الشكل السابق: متجه السرعة الابتدائية v_i يعمل زاوية مقدارها θ_i مع محور x الموجب ولذلك فيمكن تحليل هذا المتجه إلى مركبتين، مركبة في كل اتجاه. إذن معادلات الحركة يمكن كتابتها في كل اتجاه كما يلي:

$$x: \ x_i = 0, \ a_x = 0$$

$$v_{xi} = v_i \cos\theta_i = \text{constant}$$

$$x = v_{xi} t = (v_i \cos\theta)t \qquad (4.10)$$

$$y: y_i = 0, a_y = g\,(-\,9.8\ m/s^2)$$

$$v_{iy} = v_i \sin\theta_i$$

$$y = v_{iy} t + \frac{1}{2} a_y t^2 = (v_i \sin\theta_i)t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (4.11)$$

$$v_{yf} = v_{yi} - 9.8t = v_i \sin\theta_i - 9.8t \qquad (4.11b)$$

$$v_{yf}^2 = v_{yi}^2 - 2\times 9.8\,y = (v_i \sin\theta_i)^2 - 2\times 9.8\,y \qquad (4.11c)$$

• فنلاحظ من المعادلات (4.10) و (4.11) أن المسافة الأفقية المقطوعة هي عبارة عن سرعة ثابتة مضروبة في الزمن، في حين أن الحركة الرأسية هي عبارة عن حركة حرة تحت تأثير الجاذبية الأرضية.

• اشتقاق معادلة منحنى المسار:

Eq. (4.10) for t :

$$t = \frac{x}{(v_i \cos\theta_i)}$$

put this in Eq. (4.11) we get :

$$y = (v_i \sin\theta_i)\left(\frac{x}{v_i \cos\theta}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_i \cos\theta}\right)^2$$

$$\Rightarrow \; y = x\tan\theta_i - \left(\frac{g}{2 v_i^2 \cos^2\theta}\right) x^2$$

$$\Rightarrow \; y = a x_i - b x^2 \qquad (4.12)$$

• إذن معادلة المسار (4.12) هي معادلة قطاع مكافئ.

Chapter 4: 2-D Motion الفصل الرابع: الحركة في بعدين
4.3 حركة المقذوفات Projectile Motion

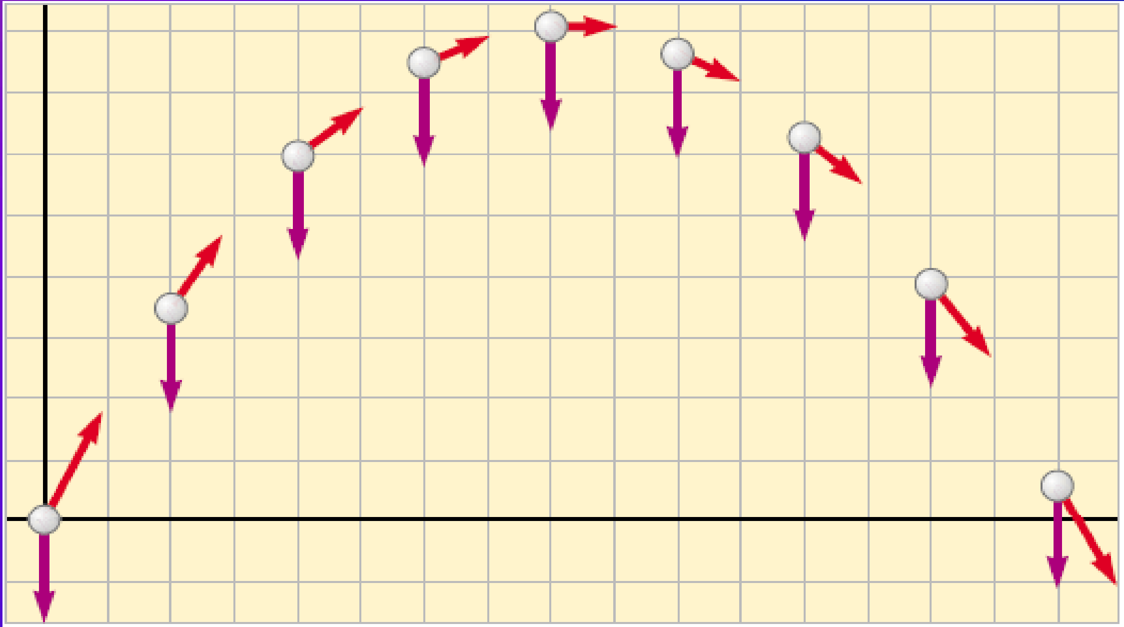


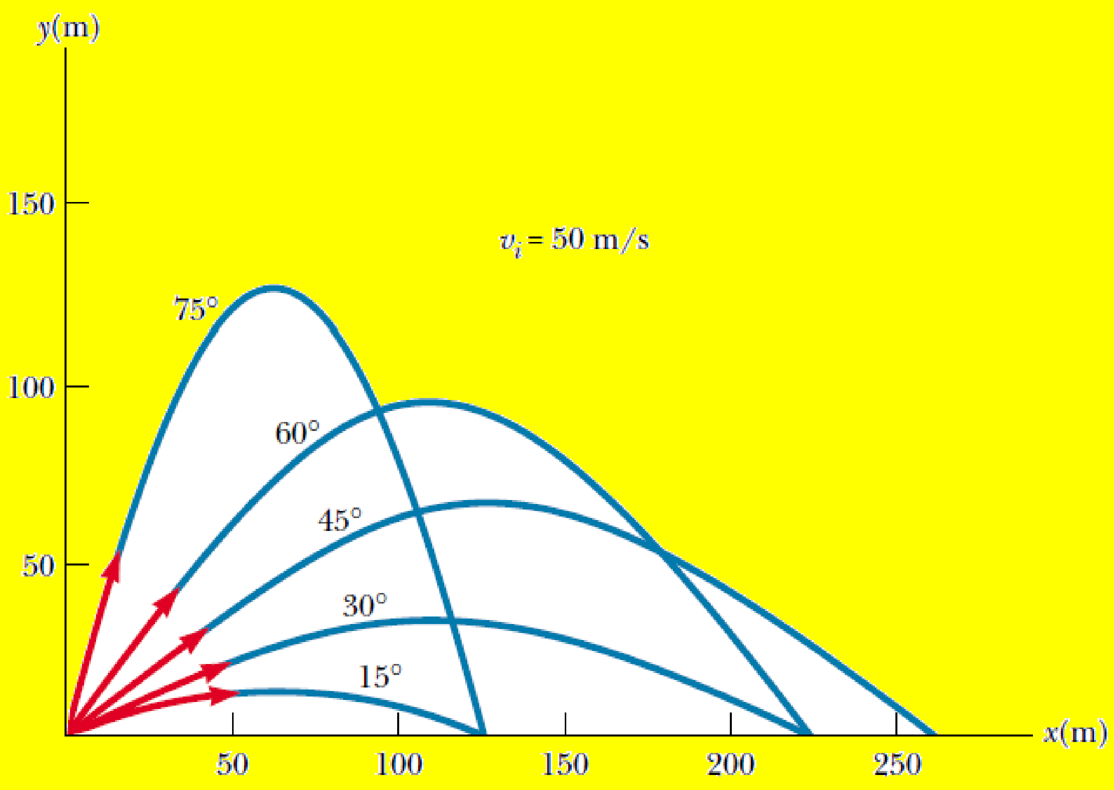
Figure 4.8 Motion diagram for a projectile.

- على اليسار رسم توضيحي لحركة مقذوف. لاحظ أن التسارع إلى الأسفل ثابت اتجاها ومقدارا وهو يمثل تسارع الجاذبية الأرضية.
- في حين أن متجه السرعة بشكل عام يتغير مقدارا واتجاها (السهم الأحمر) وهو يحمل مركبة أفقية فقط عند أعلى نقطة. المركبة الرأسية يتغير اتجاهها من الأعلى للأسفل مرورا بالتوقف اللحظي عند القمة العظمى (أقصى ارتفاع يصل إليه المقذوف).

- **كويز**: تم ترك كرة من ارتفاع معين عن الأرض تسقط بشكل حر، وفي نفس الوقت تم رمي كرة أخرى ومن نفس الارتفاع ولكن بصورة أفقية. فأي الكرتين تصل إلى سطح الأرض أسرع من الأخرى؟

- **حل الكويز**: حيث أن الحركة الرأسية نفسها في الحالتين، والسرعة الأفقية للكرة الثانية لا تؤثر في الزمن اللازم للوصول إلى سطح الأرض.
- إذن تصل الكرتان في نفس الوقت ونفس السرعة إلى سطح الأرض.

الفصل الرابع: الحركة في بعدين Chapter 4: 2-D Motion
حساب زمن الطيران الكلي Time of Flight



- كما هو واضح من الشكل على اليسار فأن زمن الطيران، والمدى (المسافة الأفقية الكلية) وأقصى ارتفاع يصل إليه المقذوف، كل ذلك يعتمد على عنصرين رئيسيين:
- الأول: زاوية الإطلاق الابتدائية
- الثاني: سرعة الانطلاق الابتدائية.
- من المهم جدا أن نعرف المقصود بزمن الطيران. فهو الزمن اللازم لعودة المقذوف لنفس مستوى إطلاقه. إذن لا يشمل أي زمن أضافي للنزول لو حصل.

- كيفية حساب زمن الطيران:
- سوف نقوم باستخدام المعادلات السابقة (الرأسية). ونفترض أن السرعة الرأسية تساوي الصفر عندما يصل المقذوف ارتفاعه الأقصى.
- ومن ثم نحسب الزمن اللازم للوصول إلى هذه النقطة، ونضرب الناتج في 2 (زمن الصعود والنزول)

Time of Flight حساب زمن الطيران الكلي

$$\because\ v_{yf} = v_i \sin\theta_i - 9.8t$$

$$\therefore\ if\ v_{yf} = 0 \quad \text{(at max. height)}$$

$$\Rightarrow\ 0 = v_i \sin\theta_i - 9.8t$$

$$\Rightarrow\ t = \frac{v_i \sin\theta_i}{9.8}$$

$$\therefore\ \text{Time of Flight}:\ \boxed{t_F = \frac{2v_i \sin\theta_i}{9.8}}$$

- من الاشتقاق على اليسار نلاحظ أن:
- زمن الطيران يكون أطول ما يمكن عندما يكون جيب الزاوية أكبر ما يمكن.
- وهذا يحصل عندما يكون الإطلاق رأسيا تماما أي أن الزاوية = 90 درجة. عندما تكون الزاوية تساوي الصفر، لا توجد حركة رأسية أصلا.
- كذلك طبعا يعتمد هذا الزمن على السرعة الابتدائية للإطلاق.

• حساب الارتفاع الأقصى Maximum Height *h*

$$\because\ y = (v_i \sin\theta_i)t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (\text{Using } t \text{ above and } h \text{ for } y):$$

$$h = (v_i \sin\theta_i)\left(\frac{v_i \sin\theta_i}{9.8}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_i \sin\theta_i}{9.8}\right)^2 = \frac{v_i^2 \sin\theta_i^2}{9.8} - \frac{v_i^2 \sin\theta_i^2}{2\times 9.8}$$

$$\boxed{\Rightarrow\ h = \frac{v_i^2 \sin\theta_i^2}{2g} \qquad (4.13)}$$

Chapter 4: 2-D Motion الفصل الرابع: الحركة في بعدين

حساب المدى Range R

• باستخدام معادلة الحركة الأفقية وزمن الطيران نحصل على المدى كما يلي:

$$\because\ x = v_{xi}t = (v_i \cos\theta_i)t$$

$$\therefore\ R = (v_i \cos\theta_i)\left(2\times\frac{v_i \sin\theta_i}{9.8}\right) = \frac{2v_i^{\ 2}}{g}\sin\theta_i \cos\theta_i$$

$$\because\ \sin 2\theta_i = 2\sin\theta_i \cos\theta_i$$

$$\boxed{\therefore\ R = \frac{v_i^{\ 2}}{g}\sin 2\theta_i \qquad (4.14)}$$

• لاحظ أن المدى يأخذ قيمته القصوى عندما تكون زاوية الإطلاق = 30 درجة

• لاحظ كذلك أن المدى المقصود هو فقط المسافة الأفقية بين نقطة الإطلاق والنقطة المقابلة لها في طريق السقوط. ومعنى ذلك أنه لو سقط في بئر أو من فوق مستوى سطح مبنى فأن الجزء السفلي لا يدخل في حساب المدى.

• كويز: هل توجد أية نقطة على مسار المقذوف بحيث يتعامد عندها متجه التسارع ومتجه السرعة؟ و هل توجد نقطة يتوازى فيها هذان المتجهان؟

• يتعامدان فقط عندما يكون المقذوف في نقطة الارتفاع الأقصى. ويتوازيان فقط في حالة الحركة الرأسية.