جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الرياضيات

4

الاختبار الفصلي الأول في المقرر ١٣١ ريض
الفصل الدراسي الأول ١٤٢٨/١٤٢٩ هـ
الزمن : ساعة ونصف

أجب عن الأسئلة الآتية

السؤال الأول :

(أ) أثبت صحة أو خطأ كل عبارة فيما يأتي :

١) لأي تقريرين p و q فإن : $\sim p \to \sim q \Leftrightarrow q \to p$

٢) إذا كانت A و B مجموعتين بحيث $|B| = |A| = 8$ فإن :
عدد العلاقات الثنائية من A إلى B يساوي 2^8 .

٣) إذا كانت R علاقة تكافؤ على مجوعة S فإن : $[x] = \bar{x} \neq \emptyset$ ، حيث $x \in S$.

(ب) أكمل الفراغات فيما يأتي :

١) $\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q} = \cdots$

٢) $\mathbf{R}^5 = \{\dots\dots\dots\}$

٣) لأي مجموعتين S و T فإن :
$(S' \cup T)' = \cdots$

٤) لأي مجموعتين A و B فإن :
$A^m \cap B^n = \cdots$ ، حيث $m \neq n$

السؤال الثاني :

(أ) أثبت صحة كل عبارة فيما يأتي :

١) إذا كانت $M, N \subseteq U$ فإن : $M \cap N' = M - N$

٢) إذا كانت A و B مجموعتين بحيث $B \neq A$ فإن : $A \times B = B \times A$ تقرير خاطئ

٣) إذا كانت R علاقة تكافؤ في مجموعة A وكان $a, b \in A$
فإن : $\bar{a} \neq \bar{b} \Rightarrow \bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$ ، علماً بأن : $y \in \bar{a} \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{y}$

(ب) أكمل الفراغات فيما يأتي :

١) إذا كان $\bar{r} \in \mathbb{Z}_6$ وكان $-26 \in \bar{r}$ فإن $\bar{r} = \dots$.

٢) نقول إن R علاقة ترتيب كلي على مجموعة S إذا حققت الشروط الأربعة الآتية :
١) ....
٢) ....
٣) ....
٤) ....

1

إجابة أسئلة الاختبار النهائي في المقرر ١٣١ريض- الفصل الثاني ١٤٢٩/١٤٣٠هـ

إجابة السؤال الأول :

١) عبارة خاطئة ، لأن : $P \cap 2\mathbb{Z}^+ = \{2\}$

٢) عبارة خاطئة ، لأن : $\sim(A \to B) \equiv A \wedge \sim B \not\equiv \sim A \wedge B$

٣) عبارة خاطئة ، لأن : $N^4 \cap M^5 = \emptyset$ عندما $N \neq \emptyset$

٤) عبارة صائبة ، لأنه بجعل $a = 1$ و $b = -3$ نجد أن : $1 * -3 = \sqrt{2-3} = \sqrt{-1} \in \mathbb{R}$

٥) عبارة صائبة ، لأن : $2 + 2 = 4 \in \{0, 1, 2\}$

٦) عبارة صائبة ، لأن : $|\sigma| = |(\sigma)| = 3 \neq 5$

إجابة السؤال الثاني :

(أ) :

١) وحتى ٤) تعاريف في الكتاب المقرر " المدخل إلى البنى الجبرية "

(ب) :

١) $f^{-1}(C \cap D) = \{x \in A \mid f(x) \in C \cap D\}$

٢) إذا كان 2 عنصراً في النظام $(\mathbb{Z}_9, \odot)$ فإن :
(i) $2^4 = 7$ (ii) $|2| = 6$ (iii) $(2^{-1})^3 = 8$

إجابة السؤال الثالث :

(أ) لما كانت كل من B و A غير منتهية وقابلة للعد فإن $A \approx \mathbb{Z}^+$ وكذلك $\mathbb{Z}^+ \approx B$ ومن التعدي تكون $A \approx B$.

(ب) :

١) إن R انعكاسية ، لأنه :
$$\forall a \in \mathbb{R} : a R a \Leftrightarrow a^2 - a^2 = 2(a - a) = 0$$

٢) إن R تناظرية ، لأنه :
$$a R b \Rightarrow a^2 - b^2 = 2(b - a) \Leftrightarrow b^2 - a^2 = 2(a - b) \Rightarrow b R a$$

٣) إن R متعدية ، لأنه :
$$a R b \wedge b R c \Rightarrow a^2 - b^2 = 2(b - a) \wedge (b^2 - c^2) = 2(c - b) \Rightarrow a^2 - c^2 = 2(c - a) \Rightarrow a R c$$

صف تكافؤ 4 $= \bar{4} = \{x \in \mathbb{R} : x R 4 \Leftrightarrow x^2 - 16 = 2(4 - x) \Leftrightarrow x^2 + 2x - 24 = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x+6) = 0\} = \{4, -6\}$

إجابة السؤال الرابع :

(أ) : التعريف موجود في الكتاب المقرر .

(ب) إن $(\mathbb{Z}, *)$ زمرة إبدالية ، حيث $\forall x, y \in \mathbb{Z} : x * y = x + y + 1$ لأن $*$ عملية ثنائية على $\mathbb{Z}$
وإبدالية لأن $\forall x, y \in \mathbb{Z} : x * y = x + y + 1 = y + x + 1 = y * x$

كما أن $*$ عملية تجميعية لأنه
$$\forall x, y, z \in \mathbb{Z} : (x * y) * z = (x + y + 1) * z = (x + y + 1) + z + 1$$
$$= x + (y + z + 1) + 1 = x * (y + z + 1) = x * (y * z)$$

إن $e = -1$ هو العنصر المحايد لأنه $\forall x \in \mathbb{Z} : x * (-1) = x + (-1) + 1 = x$

كما أن $x^{-1} = -x - 2$ لأن :
$$x * (-x - 2) = x + (-x - 2) + 1 = -1$$

1

إجابة السؤال الأول :

(أ) : عبارة صائبة ، لأن : $(1,2,3,4) \in \mathbb{R}^4$ في حين لا ينتمي إلى $\mathbb{R}^5$.

(ب) : عبارة خاطئة ، لأن :

$f^{-1}(B) \subset A \Rightarrow \exists x \in A \ni f(x) \notin B \Rightarrow$ ليس تطبيقاً f .

(ج) : عبارة صائبة ، لأن : $\mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- \neq \mathbb{R}$.

(د) : عبارة خاطئة ، فمثلاً S_4 زمرة غير إبدالية رتبتها 24 .

إجابة السؤال الثاني :

(أ) : $A \subseteq \mathbb{Z}^+ \ni (1 \in A \ \wedge \ t \in A \Rightarrow t+1 \in A) \Rightarrow A = \mathbb{Z}^+$

الإثبات في برهان نظرية (٢-٣) صفحة ٤٧ في المرجع الرئيسي للمقرر ١٣١ريض .

(ب) : $\forall \ n \in \mathbb{Z}^+ : P(n) \equiv 2 + 6 + 10 + \cdots + 2(2n-1) = 2n^2$

$\equiv 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$

أولاً : عندما $n = 1$ نجد أن طرفي المساواه كل منهما يساوي 1 ، أي أن $P(1)$ صائب عندما $n = 1$.

ثانياً : نفرض أن $P(n)$ صائب عندما $n = K$ ونبرهن أن هذا يقتضي كون $P(K+1)$ صائباً كما يلي :

$P(K) \equiv 1 + 3 + 5 + \cdots + (2K-1) = K^2$ صائب فرضاً ——— (1)

$P(K+1) \equiv 1 + 3 + 5 + \cdots + (2K-1) + [2(K+1)-1] = (K+1)^2$ ——— (2)

بإضافة الحد $[2(K+1)-1]$ إلى طرفي المساواة في (1) نجد أن الطرف الأيسر من (1) يساوي الطرف الأيسر في (2)

كما أن الطرف الأيمن في (1) يصبح :

$K^2 + 2(K+1) - 1 = K^2 + 2K + 1 = (K+1)^2 =$ الطرف الأيمن في(2)

ومنه يكون $P(K+1)$ صائباً .

(ج) : $|\sigma| = |\langle\sigma\rangle| = 3$.

إجابة السؤال الثالث :

(أ) : تكون P تجزئة لـ S عندما تتحقق الشروط الآتية :

١) $|B_i| \neq \emptyset$ لكل $B_i \in P$.

٢) $i \neq j \Leftrightarrow B_i \cap B_j = \emptyset$.

٣) $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = S$

(ب) : $\cdots = \{2,4\} \times \{2,4\} \cup \{1,3,5\} \times \{1,3,5\} =$ عناصر R

(ج) :

١) R انعكاسية ، لأن : $\forall a \in \mathbb{R} : a - a = 0 \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow aRa$

٢) R تناظرية ، لأن : $a, b \in \mathbb{R} \ni aRb \Rightarrow a - b \in \mathbb{Q} \Rightarrow b - a \in \mathbb{Q} \Rightarrow bRa$

٣) R متعدية ، لأن :

$a, b, c \in \mathbb{R} \ni aRb \wedge bRc \Rightarrow (a-b) \in \mathbb{Q} \wedge (b-c) \in \mathbb{Q} \Rightarrow a - c \in \mathbb{Q} \Rightarrow aRc$

صنف تكافؤ o $= [o] = \bar{o} = \{x \in \mathbb{R} : xRo \Leftrightarrow x - o \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow x \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q}$

إجابة السؤال الرابع :

(أ) : $B \approx A \Leftrightarrow$ وجد تطبيق تقابل $f : A \to B$

(ب) : لتكن $S = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ و $D = \{4, 6, 8, \ldots\}$ ولنعرف التطبيق :

$f : S \to D$ بالقانون $f(x) = x + 2$ فيكون f تقابل لأن :

1) $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + 2 = x_2 + 2 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow$ متباين f

2) $y \in D \Rightarrow \exists x = y - 2 \in S \ni f(x) = x + 2 = (y-2) + 2 = y \Rightarrow$ غامر f

(ج) : ١) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ، حيث $f(x) = 1$ ٢) $\mathbb{Z}_{19}$ ٣) $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ٤) $(\mathbb{Z}, -)$

(د) :

٣) المحايد الجمعي في النظام $(\mathbb{R}^4, \oplus)$ هو $(0, 0, 0, 0)$.

٤) النظير الجمعي للعنصر $\left(-\frac{4}{3}, 1, -\sqrt{2}, \frac{1}{3}\right)$ هو $\left(\frac{4}{3}, -1, \sqrt{2}, -\frac{1}{3}\right)$ لأن مجموع العنصرين يساوي العنصر المحايد .

إجابة السؤال الأول :

(أ) : نقول عن تطبيقين f و g إنهما متساويان إذا كان لهما مجموعة التعريف نفسها A ، مثلاً ولهما المستقر نفسه ولهما التأثير نفسه على أي عنصر في A .

(ب) : نقول عن التطبيق $f : A \to B$ إنه تطبيق محايد إذا كانت $A = B$ وكان $f(x) = x$ لكل $x \in A$.

(ج) : نقول عن التطبيق $f : \ (S, *) \to (T, \circ)$ إنه تشاكل إذا حقق الشرط :

$\forall x, y \in S : f(x * y) = f(x) \circ f(y)$

(د) : إن التطبيق $f : \ (\mathbb{R}^*, \cdot) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$ المعرف بالقاعدة $f(x) = \frac{1}{x}$:

١) متباين ، لأن :

$x, y \in \mathbb{R}^* \ni f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{y} \Rightarrow x = y$

٢) غامر ، لأن :

$y \in \mathbb{R}^* = \exists x = \frac{1}{y} \in \mathbb{R}^* \ni f(x) = \frac{1}{x} = 1 \div x = 1 \div \frac{1}{y} = y$

٣) تشاكل ، لأن :

$\forall x, y \in \mathbb{R}^* : f(xy) = \frac{1}{xy} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = f(x) f(y)$

إجابة السؤال الثاني :

(أ) : نقول إن " $\circ$ " تتوزع على $*$ في النظام $(S, *, \circ)$ إذا تحقق الشرطان :

$\forall x, y, z \in S : x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z)$

وكذلك

$(y * z) \circ x = (y \circ x) * (z \circ x)$

(ب) : العملية " $-$ " لا تتوزع على العملية " $\cap$ " في النظام $(P(A), \cap, -)$ لأنه :

$\forall A_1, A_2, A_3 \in P(A) : \ A_1 - (A_2 \cap A_3) = A_1 \cap (A_2 \cap A_3)'$ ——— نظرية

$= A_1 \cap (A_2' \cup A_3')$ ——— نظرية

$= (A_1 \cap A_2') \cup (A_1 \cap A_3')$ ——— خاصة التوزيع

$= (A_1 - A_2) \cup (A_1 - A_3)$ ——— نظرية

$\neq (A_1 - A_2) \cap (A_1 - A_3)$

(ج) : في النظام $(\mathbb{Z}_7, \odot)$:

أولاً : أكمل الفراغات الآتية :

٤) $\bar{2}^4 = \bar{2}$

٥) $(\bar{4})^{-2} = \bar{4}$

٦) $\bar{5}^0 = \bar{1}$

ثانياً :

$\bar{3} \odot \bar{x} = \bar{5} \Rightarrow \bar{x} = (\bar{3})^{-1} \odot \bar{5} = \bar{5} \odot \bar{5} = \bar{4}$

جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الرياضيات

الاختبار النهائي في المقرر ١٣١ ريض
الفصل الدراسي الأول ١٤٢٨/١٤٢٩ هـ
الزمن : ثلاث ساعات

أجب عن الأسئلة الآتية

السؤال الأول :

أثبت صحة أو خطأ كل عبارة فيما يلي :

(أ) إن $\mathbb{R}^4 \not\subseteq \mathbb{R}^5$

(ب) إذا كان $f: A \to B$ تطبيقاً فإن $f^{-1}(B) \subset A$

(ج) إن $\{\mathbb{R}^-, \mathbb{R}^+\}$ ليست تجزئة لـ $\mathbb{R}$

(د) لا توجد زمرة غير إبدالية رتبتها 24

السؤال الثاني :

(أ) إذا كانت $A \subseteq \mathbb{Z}^+$ تحقق الشرطين :

١) $1 \in A$ ٢) $t \in A \Rightarrow t+1 \in A$

فأثبت أن $A = \mathbb{Z}^+$.

(ب) استخدم الاستقراء الرياضي لإثبات صحة ما يلي :

$$\forall\, n \in \mathbb{Z}^+ : P(n) \equiv 2 + 6 + 10 + \cdots + 2(2n-1) = 2n^2$$

(ج) إذا كان $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in S_6$ فأكمل الفراغ : $|\sigma| = |\langle\sigma\rangle| = \cdots$

السؤال الثالث :

(أ) متى نقول إن P تجزئة لمجموعة S ، حيث $P = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$.

(ب) إذا كانت $P = \{\{1,3,5\},\{2,4\}\}$ تجزئة لمجموعة A فاكتب جميع عناصر R حيث R علاقة التكافؤ الناتجة عن التجزئة P .

(ج) إذا كانت R علاقة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R} : aRb \iff a - b \in \mathbb{Q}$$

فأثبت أن R علاقة تكافؤ على $\mathbb{R}$ ، وجد صنف تكافؤ العدد 0 .

السؤال الرابع :

(أ) متى نقول عن مجموعتين A و B إنهما متكافئتان $(B \approx A)$ ؟

(ب) " نقول عن مجموعة S إنها غير منتهية إذا كانت $S \approx D$ ، حيث $D \subset S$ " .
وظف التعريف السابق في إثبات أن المجموعة $\{2, 4, 6, 8, \dots\dots\}$ غير منتهية .

(ج) أعط مثالا واحدا فقط لكل مما يأتي :

١) تطبيقا ثابتا f من $\mathbb{R}$ الى $\mathbb{R}$.
٢) زمرة ضربية رتبتها 18 .
٣) حلقة غير منتهية لا تملك عنصر الوحدة .
٤) عملية ثنائية غير إبدالية معرفة على $\mathbb{Z}$.

(د) أكمل الفراغات داخل النظام $(\mathbb{R}^4, \oplus)$:

١) المحايد الجمعي في هذا النظام هو (.........) .
٢) النظير الجمعي للعنصر $\left(-\frac{4}{3}, 1, -\sqrt{2}, \frac{1}{3}\right)$ هو (..........) لأن ....

جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الرياضيات

الاختبار الفصلي الثاني في المقرر ١٣١ ريض
الفصل الدراسي الأول ١٤٢٨/١٤٢٩ هـ
الزمن : ساعة ونصف

أجب عن الأسئلة الآتية

السؤال الأول :

(أ) متى نقول عن تطبيقين f و g إنهما متساويان ؟

(ب) متى نقول عن تطبيق $f: A \to B$ إنه تطبيق محايد ؟

(جـ) متى نقول عن التطبيق $f : (S,*) \to (T,\circ)$ إنه تشاكل ؟

(د) إذا كان $f : (\mathbb{R}^*,\cdot) \to (\mathbb{R}^*,\cdot)$ تطبيقاً معرفا كما يلي :

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

فادرس ما إذا كان التطبيق f :

١) متباينا
٢) غامراً
٣) تشاكلاً ، مع التبرير لكل خطوة

السؤال الثاني :

(أ) إذا كان $(s,*,\circ)$ نظاما ذا عمليتين ثنائيتين فمتى نقول إن " $\circ$ " تتوزع على " $*$ " ؟

(ب) إثبت أن العملية " $-$ " لا تتوزع على العملية " $\cap$ " في النظام $(P(A),\cap,-)$.

(جـ) أجب عما يأتي داخل النظام $(\mathbb{Z}_7,\odot)$:

أولاً : أكمل الفراغات الآتية :

١) $\overline{2}^4 = \cdots$
٢) $(\overline{4})^{-2} = \cdots$
٣) $\overline{5}^0 = \cdots$

ثانياً : حل المعادلة : $\overline{3} \odot \overline{x} = \overline{5}$

جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الرياضيات

الاختبار النهائي في المقرر ١٣١ ريض
الفصل الدراسي الثاني ١٤٢٩/١٤٣٠ هـ
الزمن : ثلاث ساعات

1

أجب عن الأسئلة الآتية

السؤال الأول :

أثبت صحة أو خطأ كل عبارة فيما يأتي :-

$P \cap 2Z^+ = \{2\}$ عبارة خاطئة ، لأن

١) إن $P \cap 2\mathbb{Z}^+ = \emptyset$ ، حيث P مجموعة الأعداد الأولية .

عبارة خاطئة ؛ لأن $\sim(A \to B) \not\equiv \sim A \wedge B \not\equiv A \wedge \sim B$

٢) لأي تقريرين A و B فإن $\sim(A \to B) \equiv \sim A \wedge B$.

عبارة خاطئة ، لأن $N^4 \cap M^5 = \emptyset$ عندما $N \neq \emptyset$

٣) إذا كانت $N \subseteq M$ فإن $N^4 \subseteq M^5$.

٤) إن $(\mathbb{R}, *)$ نظام غير مغلق ، حيث $a * b = \sqrt{2a + b}$ لكل $a, b \in \mathbb{R}$.

$2 + 2 = 4 \neq \{0, 1, 2\}$ عبارة صحيحة

٥) إن $(\{0,1,2\}, +, \cdot)$ ليس حقلاً جزئياً من الحقل $\mathbb{Z}_5$

$|\sigma| = |(\sigma)| = 3 \neq 5$ عبارة صحيحة لأن

٦) إذا كان $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ فإن : $|\sigma| = |(\sigma)| \neq 5$.

السؤال الثاني :

(أ) أجب عما يلي :-

١) متى نقول عن مجموعتين S و T إنهما متكافئتان $(T \approx S)$ ؟

٢) متى نقول عن تطبيق $f : A \to B$ إنه تطبيق محايد ؟

٣) متى نقول عن تطبيقين إنهما متساويان ؟

٤) متى نقول إن $*$ عملية ثنائية على مجموعة S ؟

$f^{-1}(C \cap D) = \{x \in A \mid f(x) \in C \cap D\}$

(ب) أكمل الفراغات الآتية :-

١) إذا كان $f : A \to B$ تطبيقاً وكانت $C, D \subseteq B$ فإن : $f^{-1}(C \cap D) = \{\ldots \mid \ldots\}$

٢) إذا كان 2 عنصراً في النظام $(\mathbb{Z}_9, \odot)$ فإن :

إذا كان 2 عنصراً في النظام $(\mathbb{Z}_9, \odot)$

(i) $2^4 = 7$

(ii) $|2| = 6$

(iii) $(2^{-1})^3 = 8$

1

السؤال الثالث :

(أ) إذا كانت A و B مجموعتين غير منتهيتين وقابلتين للعد فأثبت أن $A \approx B$.

(ب) إذا كانت R حلقة فأثبت أن $0x = 0$ لكل $x \in R$.

(جـ) إذا عرفنا علاقة R على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : a R b \iff a^2 - b^2 = 2(b - a)$$

فأثبت أن R علاقة تكافؤ في $\mathbb{R}$ ، وجد صنف تكافؤ العدد 4 .

السؤال الرابع :

(أ) متى نقول إن النظام $(G, *)$ زمرة إبدالية ؟

(ب) إذا كانت $*$ عملية معرفة على $\mathbb{Z}$ كما يلي :

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : x * y = x + y + 1$$

فأثبت أن النظام $(\mathbb{Z}, *)$ زمرة إبدالية .

$P \cap 2Z^+ = \{2\}$ عبارة خاطئة لأن

$\sim(A \to B) \not\equiv \sim A \wedge B \not\equiv A \wedge \sim B$ لأن

$N \neq \emptyset$ عندما $N^4 \cap M^5 \neq \emptyset$ لأن

لأن بجعل $a = 1$ ، $b = -3$

$1 * -3 = \sqrt{2-3} = \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$ ، إذاً الجبر

---

٤ عبارة صحيحة :

لأن بجعل $b = -3$ ، $a = 1$

$1 * -3 = \sqrt{2-3} = \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$ إذاً الجبر

السؤال الثاني :

II

نقول كان لكل من B و A غير منتهية وقابلة للعد ... $A \approx \mathbb{Z}^+$ وكذلك $B \approx \mathbb{Z}^+$ ومن التعدي نستنتج $A \approx B$.

R انعكاسية لأن

R تناظرية لأن

$aRb \Rightarrow a^2 - b^2 = 2(b-a) \Rightarrow b^2 - a^2 = 2(a-b) = bRa$

$\forall a \in \mathbb{R} : aRa \iff a^2 - a^2 = 2(a-a) = 0$

---

٤ $* : S \times S \to S$

$2 \times 2 \times 2 \times 2 =$

$4 \times 4 = 16 - 9$

7

$2 \times 2 \times 2 =$

$4 \times 2 = 8$

$* : S \times S \to S$

hassan

I love

$* : S \times S \to S$

إجابة السؤال الأول :

(أ) : النفي هو " $\forall x, y \in \mathbb{Z}^+ : x \nmid y \ \vee \ y \nmid x$ " وقيمة صوابه هي F .

(ب) :

١) عندما n=1 نجد أن الطرف الأيسر =1 والطرف الأيمن =2 لذا فإن التقرير صائب عندما n=1 .

٢) عندما $n = K$ نفرض أن $K < 2^K$ صائب ونثبت أن هذا يقتضي كون التقرير صائباً عندما تكون $n = K + 1$ كما يلي : $K < 2^K \Rightarrow K + 1 < 2^K + 1 = K + 1 < 2^K \cdot 2 = K + 1 < 2^{K+1}$.

(ج) : عندما تكون S منتهية فإن $|S| = n$ وحينئذ يكون $|P(S)| = 2^n$ (نظرية) وباستخدام فقرة (ب) يكون لدينا $|S| = n < 2^n = |P(S)|$. كما أن هذا صحيح عندما تكون $S = \emptyset$ ، لأن $|S| = 0 < 2^0 = 1$.

إجابة السؤال الثاني :

(أ) : ١) S_3 ٢) $(\mathbb{Z}_{23}^*, \cdot)$ ٣) $(\mathbb{Z}_{23}, +, \cdot)$ ٤) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ، حيث $f(x) = 2x$

(ب) :

١) R انعكاسية ، لأن : $\forall a \in \mathbb{R}^+ : \frac{a}{a} = 1 \in \mathbb{Q}^+ \Rightarrow aRa$

٢) R تناظرية ، لأن : $a, b \in \mathbb{R}^+ \ni aRb \Rightarrow \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^+ \Rightarrow \frac{b}{a} \in \mathbb{Q}^+ \Rightarrow bRa$

٣) R متعدية ، لأن :

$$a, b, c \in \mathbb{R}^+ \ni aRb \wedge bRc \Rightarrow \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^+ \wedge \frac{b}{c} \in \mathbb{Q}^+ \Rightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{c} \in \mathbb{Q}^+ \Rightarrow aRc$$

إذن R علاقة تكافؤ في $\mathbb{R}^+$ ويكون :

$$\bar{1} = [1] = \left\{x \in \mathbb{R}^+ : xR1 \Leftrightarrow \frac{x}{1} \in \mathbb{Q}^+ \Leftrightarrow x \in \mathbb{Q}^+\right\} = \mathbb{Q}^+$$

(ج) : $|\sigma| = 4$.

إجابة السؤال الثالث :

(أ) :

١) عبارة خاطئة ، لأن $f^{-1}(B) \subset A$ يقتضي وجود $x \in A$ بحيث $f(x) \notin B$ وهذا يتناقض مع كون f تطبيقاً .

٢) عبارة صائبة ، فمثلا : $2 = -2 \nRightarrow (-2|2) \ \wedge \ (2|-2)$.

٣) عبارة خاطئة ، لأنه بفرض $e \in \mathbb{Q}$ عنصر محايد يكون لدينا :

$$\forall x \in \mathbb{Q} : x * e = x = xe + 1 \Rightarrow xe = x - 1 \Rightarrow e = \frac{x-1}{x} \notin \mathbb{Q} \qquad (\text{عندما } x = 0)$$

٤) عبارة صائبة ، فمثلا $(2,3) \in \mathbb{Z}^2$ ولكن $(2,3) \notin \mathbb{R}^3$.

(ب) :

١) $x^{-1} = \frac{1}{x}$

٢) $\forall x, y \in \mathbb{R}^* : f(xy) = (xy)^{-1} = \frac{1}{xy} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = f(x)f(y)$

٣) f نواة $= \ker f = f^{-1}(1) = \left\{x \in \mathbb{R}^* : f(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1\right\} = \{1\}$

إجابة السؤال الرابع :

(أ) : إذا كانت S تكافئ مجموعة جزئية فعلية منها .

(ب) :

١) f متباين ، لأن : $x, y \in D \ni f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{2} \Rightarrow \dots \Rightarrow x = y$

f غامر ، لأن : $y \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow \exists x = 2y - 1 \in D \ni f(x) = \frac{x+1}{2} = \frac{(2y-1)+1}{2} = y$

مما تقدم نجد أن f تقابل .

٢) من (١) نجد أن $D \approx \mathbb{Z}^+$ مع كون $D \subset \mathbb{Z}^+$ و بالتالي فإن $\mathbb{Z}^+$ مجموعة غير منتهية .

٣) $f^{-1} : \mathbb{Z}^+ \to D$ قاعدته هي $f^{-1}(x) = 2x - 1$.

٤) نعم ، لأن $D \approx \mathbb{Z}^+$ من (١) $\Leftrightarrow |D| = |\mathbb{Z}^+|$.

إجابة السؤال الأول :

(أ) : عبارة خاطئة ، فمثلا : $-1 * {}^{1}/_{2} = -1^{1/2} = \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$

(ب) : عبارة خاطئة ، لأن $\bar{2}$ في $\bar{\mathbb{Z}}_9$ له نظير ضربي هو $\bar{5}$ في حين أن $\bar{6}$ ليس له نظير ضربي في $\bar{\mathbb{Z}}_9$ ، لأن $(6,9) \neq 1$.

(ج) : عبارة صائبة ، لأنه بفرض أن H و K مجموعتان غير منتهيتين وقابلتين للعد يكون لدينا :

$$H \approx \mathbb{Z}^+ \wedge K \approx \mathbb{Z}^+ \ (\text{تعريف})$$
$$\Rightarrow H \approx \mathbb{Z}^+ \wedge \mathbb{Z}^+ \approx K \ (\text{لأن} \approx \text{تناظرية})$$
$$\Rightarrow H \approx K \qquad (\text{لأن} \approx \text{متعدية})$$

(د) : عبارة خاطئة ، لأن " $-$ " لا تتوزع من اليسار على " $\cup$ " في النظام $(P(S), \cup, -)$ كما يلي :

$$A_1, A_2, A_3 \in P(S) \Rightarrow A_1 - (A_2 \cup A_3) = A_1 \cap (A_2 \cup A_3)' \quad \text{———(نظرية)}$$
$$= A_1 \cap (A_2' \cap A_3') \quad \text{———(قانونا دومورجان)}$$
$$= (A_1 \cap A_2') \cap (A_1 \cap A_3') \quad \text{———(خاصة التوزيع)}$$
$$= (A_1 - A_2) \cap (A_1 - A_3) \quad \text{———(نظرية)}$$
$$\neq (A_1 - A_2) \cup (A_1 - A_3)$$

إجابة السؤال الثاني :

(أ) : $\mathbb{Z}_{47}^*$.

(ب) : إذا كانت $S \approx D$ ، حيث $D \subset S$.

لتكن $B = \{6, 8, 10, \dots\} \subset A = \{4, 6, 8, 10, \dots\}$

ولنعرف التطبيق $f : A \to B$ بالقانون $f(x) = x + 2$

إن f غامر لأن :

$$y \in B \Rightarrow \exists x = y - 2 \in A \ni f(x) = x + 2 = (y - 2) + 2 = y$$

كما أن f متباين ، لأن :

$$x, y \in A \ni f(x) = f(x) \Rightarrow x + 2 = y + 2 \Rightarrow x = y$$

مما تقدم نجد أن f تقابل وبالتالي فإن : $A \approx B$ ومنه تكون A غير منتهية .

(ج) : إذا كان $f : (\mathbb{Z}, +) \to (\bar{\mathbb{Z}}_8, \oplus)$ تطبيقاً ، حيث : $f(x) = \bar{x}$ فإن f تشاكل لأنه :

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : \ f(x + y) = \overline{x + y} = \bar{x} \oplus \bar{y} = f(x) \oplus f(y)$$

كما أن f تطبيق غير متباين ، فمثلا :

$$f(0) = f(8) = \bar{0} \nRightarrow 0 = 8$$

مما سبق نجد أن f تشاكل غير متباين .

2

إجابة السؤال الأول :

(أ) :

١) $\sim[\forall\, a \in \mathbb{R} : a^2 - 2a + 1 \geq 0] \equiv \exists\, a \in \mathbb{R} \ni a^2 - 2a + 1 < 0$

٢) $\mathbb{R}^5 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : x_i \in \mathbb{R}, \forall\, i\}$

٣) $|A| = 4 \wedge |B| = 3 \Rightarrow |P(A \times B)| = 2^{12}$

٤) نقول إن R علاقة ترتيب كلي على مجموعة S إذا حققت الشروط الآتية : R انعكاسية وتخالفية ومتعدية بالإضافة للشرط الآتي :

$\forall\, x, y \in S : xRy \vee yRx$

(ب) :

١) عبارة خاطئة ، فمثلا : $(1,2) \in \mathbb{Z}^2 \nRightarrow (1,2) \in \mathbb{Q}^4$

٢) عبارة خاطئة لأن 2 عدد أولي و $2 \in 2\mathbb{Z}^+$

٣) عبارة صائبة لأن :

$-25 \equiv 3(mod\, 7) \Leftrightarrow -25 - 3 = -28 = (-4) \times 7$

٤) عبارة صائبة لأن :

$y \in A \Rightarrow yRy$ (لأن R انعكاسية) $\Rightarrow y \in \bar{y}$ (تعريف $\bar{y}$)

$\Rightarrow \bar{y} \neq \emptyset$

إجابة السؤال الثاني :

(أ) : نقول إن المجموعتين A و B منفصلتان $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.

(ب) :

A	B	$A \Delta B$	$A \cup B$	$A \cap B$	$(A \cup B) - (A \cap B)$
$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$

من العمودين الثالث والسادس يتم برهان التساوي .

(ج) :

٣) $S = \{1,2,3,4,5\}$

٤) $R = \{(1,1), (1,3), (1,5), (3,1), (3,3), (3,5), (5,1), (5,3), (5,5), (2,2), (2,4), (4,2), (4,4)\}$

(د) : R علاقة تكافؤ في A و $aRb \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{b}$ ، إن :

أولا : إثبات أن : $b \in \bar{a} \Rightarrow \bar{a} = \bar{b}$

(معطى) —— $b \in \bar{a} \Rightarrow bRa$ (تعريف $\bar{a}$) $\Rightarrow aRb$ (تناظرية R) $\Rightarrow \bar{a} = \bar{b}$

ثانيا : إثبات أن : $\bar{a} = \bar{b} \Rightarrow b \in \bar{a}$

(لأن $\bar{a} = \bar{b}$ معطى) —— $\Rightarrow b \in \bar{a}$ (تعريف $\bar{b}$) —— bRb (انعكاسية R) $\Rightarrow b \in \bar{b}$

من أولا وثانيا نجد أن : $b \in \bar{a} \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{b}$.

3

إجابة السؤال الأول :

(أ) :

١) قيمة الصواب T ، فمثلا : لتكن $A = \{1,3\}$ و $B = \{2,3\}$ فيكون : $|A| = |B| \nRightarrow A = B$

٢) قيمة الصواب F فمثلا : $B = \{1\} \Rightarrow P(B) = \{\emptyset, B\} \Rightarrow |P(B)| = 2 < 3$

٣) قيمة الصواب F ، لأنه : $\forall\, a \in A : \{a\} \in P(A)$

٤) قيمة الصواب T ، لأن الرابط "$\vee$" و $\emptyset \subseteq P(A)$ عبارة صائبة .

(ب) : $\sim[\exists n \in \mathbb{Z} \ni n^2 - 2 < -3] \equiv \forall n \in \mathbb{Z} : n^2 - 2 \geq -3$ وقيمة الصواب T

(ج) : $|S| = n \Rightarrow |S^2| = n^2 \Rightarrow |P(S^2)| = 2^{n^2} = 2^{2n} \Rightarrow n = 0 \vee n = 2$

إجابة السؤال الثاني :

(أ) :

١) $f^{-1}(C) = \{x \in A : f(x) \in C\}$

٢) $\prod_{i=1}^{n} A_i = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in A_i\}$

٣) $|\propto| = |\langle\propto\rangle| = 4$

(ب) : نقول إن A مكافئة لـ B إذا وجد تطبيق تقابل $f : A \longrightarrow B$.

(ج) : الإجابة انظر برهان النظرية (٤-٥) صفحة ١٠٤ في المرجع الرئيسي للمقرر ١٣١ريض .

إجابة السؤال الثالث :

(أ) : ١) $\mathbb{Z}^*_{29}$ ٢) S_3 ٣) $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ ٤) $\mathbb{Z}$ ٥) $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$

(ب) : النظام $(\mathbb{Q}^+, *)$ غير مغلق ، لأن : $3, \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}^+ \Rightarrow 3 * \frac{1}{2} = 3^{1/2} = \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}^+$

(ج) : أولاً : عندما $n = 1$ فإن : الطرف الأيسر $= 1$ والأيمن $= \frac{u-1}{u-1} = 1$ ، إذن $P(1)$ تقرير صائب .

ثانياً : نفرض أن $P(k)$ تقرير صائب عندما $n = k$ ونبرهن أن هذا يقتضي كون $P(k+1)$ صائبا كما يلي :

$P(k) \equiv 1 + u + u^2 + \cdots + u^{k-1} = \frac{u^k - 1}{u - 1}$ صائب فرضا —— $\boxed{1}$

بإضافة العدد u^k إلى طرفي المساواة $\boxed{1}$ نجد أن الطرف الأيسر من $\boxed{1}$ يساوي الطرف الأيسر من $P(k+1)$ كما يكون الطرف الأيمن من $\boxed{1}$ كما يلي :

$\frac{u^k - 1}{u - 1} + u^k = \frac{u^k - 1 + u^{k+1} - u^k}{u - 1} = \frac{u^{k+1} - 1}{u - 1} \equiv$ الطرف الايمن من $P(k+1)$

إجابة السؤال الرابع :

(أ) : نقول إن S مجموعة قابلة للعد إذا كانت S منتهية أو مكافئة لـ $\mathbb{Z}^+$.

(ب) : لنفرض جدلاً أن الفترة $(0,4) \subseteq \mathbb{R}$ قابلة للعد فتكون الفترة $(0,1) \subseteq \mathbb{R}$ قابلة للعد ، لأن $(0,1) \subseteq (0,4)$ وهذا تناقض مع المعطيات لا مخرج منه إلا بالتسليم بأن $(0,4)$ فترة غير قابلة للعد .

(ج) :

١) ليكن $f : \{1,2\} \to \{4\}$ تطبيقا ، حيث $f(1) = f(2) = 4$ إن f^{-1} من $\{4\}$ إلى $\{1,2\}$ ليس تطبيقا لأن الصورة العكسية لـ 4 ليست وحيدة .

٢) إذا كان $f : A \to B$ تقابلاً فإن $f^{-1} : A \to B$ تقابل .

الإجابة : أنظر برهان النظرية (٤-٣) صفحة ٩٨ في المرجع الرئيسي للمقرر ١٣١ريض .

جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الرياضيات

الاختبار الفصلي الأول في المقرر ١٣١ ريض
الفصل الدراسي الأول ١٤٢٩/١٤٣٠ هـ
الزمن : ساعة ونصف

2

أجب عن الأسئلة الآتية

السؤال الأول :

(أ) أكمل الفراغات الآتية بما يجعل العبارات صائبة :

١) $\sim [\forall a \in \mathbb{R} : a^2 - 2a + 1 \geq 0] \equiv \cdots$

٢) $\mathbb{R}^5 = \{\ldots\ldots\ldots\}$

٣) إذا كانت A و B مجموعتين بحيث $|A| = 4$ و $|B| = 3$ فإن $\cdots = |P(A \times B)|$

٤) نقول إن R علاقة ترتيب كلي على مجموعة S إذا حققت الشروط الآتية : ....

(ب) أثبت صحة أو خطأ كل عبارة فيما يأتي :

١) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \Rightarrow \mathbb{Z}^2 \subseteq \mathbb{Q}^4$

٢) إذا كان x عددا أوليا فإن $x \notin 2\mathbb{Z}^+$

٣) إذا كان $\bar{3} \in \overline{\mathbb{Z}}_7$ فإن $-25 \in \bar{3}$

٤) إذا كانت R علاقة تكافؤ في A وكان $y \in A$ فإن $\bar{y} \neq \emptyset$

السؤال الثاني :

(أ) متى نقول عن مجموعتين A و B إنهما منفصلتان ؟

(ب) استخدم جداول الانتماء في إثبات صحة ما يلي :
لأي مجموعتين A و B فإن : $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

(ج) إذا كانت $P = \{\{1,3,5\},\{2,4\}\}$ تجزئة لمجموعة S فأكمل الآتي :

١) $S = \{\ldots\ldots\}$

٢) إذا كانت R هي علاقة التكافؤ الناتجة عن التجزئة P فإن : .... $= R$

(د) إذا كانت R علاقة تكافؤ في A وكان $aRb \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{b}$ فأثبت أن :
$b \in \bar{a} \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{b}$

جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الرياضيات

الاختبار النهائي في المقرر ١٣١ ريض
الفصل الدراسي الثاني ١٤٢٨/١٤٢٩ هـ
الزمن : ثلاث ساعات

3

أجب عن الأسئلة الآتية

السؤال الأول :

(أ) لتكن A و B مجموعتين . عين قيمة الصواب لكل عبارة فيما يأتي ، مع التبرير :-

$1) A = B \Leftrightarrow |A| = |B| \quad 2) B \neq \emptyset \Rightarrow |P(B)| > 3$

$3) \forall a \in A : \{a\} \subseteq P(A) \quad 4) \emptyset \subseteq P(A) \quad \vee \quad \emptyset \notin P(A)$

(ب) انف التقرير الآتي وعين قيمة صوابه بعد النفي :-

$\exists n \in \mathbb{Z} \ni n^2 - 2 < -3$

(جـ) إذا كانت $|S| = n$ فعين قيم n التي تجعل العبارة " $|P(S^2)| = 2^{2n}$ " صائبة .

السؤال الثاني :

(أ) أكمل الفراغات فيما يأتي بما يجعل كل عبارة صائبة :-

١) إذا كان $f : A \longrightarrow B$ تطبيقا و $C \subseteq B$ فإن $f^{-1}(C) = \{\ldots\ldots \}$

٢) إذا كانت A_i مجموعات غير خالية ، حيث $1 \leq i \leq n$ فإن $\prod_{i=1}^{n} A_i = \{\ldots\ldots \}$

٣) إذا كان : $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in S_7$ فإن $|\alpha| = |(\alpha)| = \cdots$

(ب) متى نقول عن مجموعتين A و B إنهما متكافئتان (أي $A \approx B$) ؟

(جـ) إذا عرفنا العلاقة " $\approx$ " على مجموعة M حيث $M = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ فأثبت أن " $\approx$ " هي علاقة تكافؤ في M .

السؤال الثالث :

(أ) أعط مثالا واحدا فقط لكل مما يأتي :-

١) زمرة ضربية رتبتها 28 . ٢) زمرة غير إبدالية . ٣) حقل منته . ٤) زمرة دائرية غير منتهية .

٥) حلقة غير منتهية لا تملك عنصر الوحدة .

(ب) أثبت أن النظام $(\mathbb{Q}^+, *)$ غير مغلق ، حيث $a * b = a^b$ لكل $a, b \in \mathbb{Q}^+$

(جـ) إذا كان $1 \neq u \in \mathbb{R}^+$ فاستخدم الاستقراء الرياضي لإثبات صحة ما يلي :-

$$1 + u + u^2 + u^3 + \cdots + u^{n-1} = \frac{u^n - 1}{u - 1}, \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

السؤال الرابع :

(أ) متى نقول إن S مجموعة قابلة للعد ؟

(ب) أثبت أن الفترة $(0,4) \subseteq \mathbb{R}$ غير قابلة للعد إذا علمت أن الفترة $(0,1) \subseteq \mathbb{R}$ غير قابلة للعد .

(جـ) إذا كان $f : A \longrightarrow B$ تطبيقا فأجب عما يلي :-

١) أثبت أن f^{-1} ليس تطبيقا بالضرورة .

٢) عندما يكون $f : A \longrightarrow B$ تقابلا فأثبت أن f^{-1} تقابل من B إلى A .

بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة الملك سعود — الاختبار النهائي في المقرر ١٣١ ريض

قسم الرياضيات — الفصل الأول ١٤٢٦-١٤٢٧هـ — الزمن: ٣ ساعات

أجب عن الأسئلة الآتية

س١: (أ) أثبت صحة أو خطأ كل عبارة فيما يأتي: ١٣

(١) لأي تقريرين A و B فإن $\sim(A \to B) \equiv A \wedge \sim B$ (٢) توجد مجموعة S بحيث $|P(S)| = 24$

(٣) يوجد نظير ضربي للعنصر $\bar{3}$ في النظام $(\mathbb{Z}_8, \odot)$

(ب) أكمل الفراغات فيما يأتي بحيث تحصل على عبارات صائبة:

(١) للمعادلة $\bar{x} \odot \bar{3} = \bar{4}$ حل وحيد في النظام $(\mathbb{Z}_7, \odot)$ هو $\bar{x} = \dots$

(٢) يوجد تطبيق ثابت f من $\mathbb{R}$ إلى نفسه، حيث $f(x) = \dots$

(٣) إذا كانت $\sigma \in S_6$ حيث: $\sigma = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\5&6&1&2&3&4\end{pmatrix}$ فإن $|\sigma| = \dots$

(جـ) أثبت أنه لأي مجموعتين A و B فإن $(A-B)\cap B = \phi$

س٢: (أ) «نعلم أن حاصل ضرب عددين فرديين هو عدد فردي». استفد من العبارة السابقة في إثبات أن: n عدد فردي $\Leftrightarrow$ $3n+4$ عدد فردي ١٢

(ب) متى نقول عن مجموعتين إنهما متكافئتان؟ ومتى نقول إن لهما العدد الرئيسي نفسه؟

(جـ) استفد من إجابتك في (ب) لإثبات أن $\mathbb{Z}$ و $5\mathbb{Z}$ لهما العدد الرئيسي نفسه

س٣: (أ) أعط مثالاً واحداً فقط لكل مما يأتي: ١٢

(١) علاقة R على مجموعة غير خالية X بحيث تكون $R \neq R^{-1}$،

(٢) علاقة ترتيب كلي على مجموعة ما (٣) زمرة منتهية غير إبدالية

(٤) حلقة غير منتهية (٥) حقل منته.

(ب) إذا عرفنا علاقة R على $\mathbb{Z}$ كما يلي:

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : x R y \Leftrightarrow x \equiv y \mod 6$$

فأثبت أن R علاقة تكافؤ على $\mathbb{Z}$ ومن ثم عين صنف تكافؤ 4

س٤: (أ) إذا كان $1 \neq y \in \mathbb{R}$ فأثبت صحة ما يلي: ١٣

$$1 + y + y^2 + y^3 + \dots + y^{n-1} = \frac{y^n - 1}{y - 1}, \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

(ب) إذا كان $f : (\mathbb{Q}^+, \cdot) \to (\mathbb{Z}, +)$ تطبيقاً، حيث $f(\frac{a}{b}) = a + b$

فادرس التطبيق f من حيث كونه:

(١) متبايناً (٢) غامراً (٣) تشاكلاً (هومومورفيزماً).

بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة الملك سعود — الاختبار النهائي للمقرر ١٣١ ريض

قسم الرياضيات — الفصل الأول ١٤٢٣ - ١٤٢٤ هـ — الزمن: ٣ ساعات

أجب عن الأسئلة الآتية

س١: أثبت صحة أو خطأ كل عبارة فيما يأتي :-

(أ) لأي مجموعتين A و B فإن : $A = B \Longleftrightarrow A \approx B$

(ب) إن $S \times \phi = \phi$ مهما كانت المجموعة S.

(ج) إذا كان: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ فإن $|\sigma| = |<\sigma>| = 6$.

(د) إذا كان $f : A \to B$ تطبيقاً وكانت $S \subset A$ فإن $f(S) = f(A)$.

س٢: (أ) إذا كانت $S_1, \ldots, S_n$ مجموعات غير خالية فأكمل الفراغ :

(١) $S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n = \{ \cdots\cdots \}$

(٢) $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n = \{ \cdots\cdots \}$

(ب) إذا كان $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ تطبيق تقابل فأثبت أن $gof : A \to C$ تقابل

س٣: (أ) استخدم الاستقراء الرياضي لإثبات صحة ما يلي :

$$\forall\ n \in \mathbb{Z}^+ : P(n) \equiv 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

(ب) أعط مثالاً واحداً فقط لكل مما يأتي :-

(١) مجموعة S بحيث $|P(S)| = 64$ (٢) زمرة دائرية رتبتها 7

(٣) زمرة غير إبدالية (٤) حلقة إبدالية غير منتهية لا تملك عنصر الوحدة

(٥) تطبيق محايد (٦) مجموعة غير قابلة للعد.

س٤: لتكن $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ولتكن $R \subseteq A^2$ حيث :

$$R = \{(1,1), (1,3), (2,2), (2,4), (3,1), (3,3), (4,2), (4,4)\}$$

(أ) ادرس العلاقة R من حيث كونها :-

(١) انعكاسية (٢) تناظرية (٣) متعدية (٤) تخالفية

(٥) علاقة تكافؤ (٦) علاقة ترتيب جزئي.

(ب) إن كانت R علاقة تكافؤ فأوجد أصناف التكافؤ.

(ج) ولطف فقرة (أ) في تعيين قيمة الصواب للتقرير الآتي :

« R علاقة انعكاسية $\Longleftrightarrow$ R علاقة تخالفية »