بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة الملك سعود	الاختبار النهائي في المقرر ١٣١ ريض
كلية العلوم	الفصل الدراسي الأول ١٤٢٩/١٤٣٠ هـ
قسم الرياضيات	الزمن : ثلاث ساعات

أجب عن الأسئلة الآتية

السؤال الأول :

(أ) انف التقرير الآتي وعين قيمة صوابه بعد النفي :

$$\exists x, y \in \mathbb{Z}^+ \ni x \nmid y \ \wedge \ y \nmid x$$

(ب) أثبت باستخدام الاستقراء الرياضي ما يلي :

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ : n < 2^n$$

(ج) استفد من الفقرة (ب) في برهان صحة العبارة الآتية :

مجموعة منتهية $S \Longrightarrow |S| < |P(S)|$

السؤال الثاني :

(أ) أعط مثالاً واحداً فقط لكل مما يأتي :

١) زمرة غير إبدالية		**٢) زمرة دائرية ضربية رتبتها 22 .**

٣) حقل ملته F بحيث $|F| > 20$.		**٤) تطبيقاً $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ بحيث يكون متبايناً وغير غامر .**

(ب) إذا كانت R علاقة معرفة على $\mathbb{R}^+$ كما يلي :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+ : aRb \Leftrightarrow \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^+$$

فأثبت أن R علاقة تكافؤ على $\mathbb{R}^+$ ، ومن ثم جد صنف تكافؤ العدد 1 .

(ج) املأ الفراغ الآتي :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 5\,4\,6\,2\,3\,1 \end{pmatrix} \in S_6 \Longrightarrow |\sigma| = \cdots$$

السؤال الثالث :

(أ) أثبت صحة أو خطأ كل عبارة فيما يأتي :

١) إذا كان $f: A \longrightarrow B$ تطبيقاً فإن $f^{-1}(B) \subset A$.

٢) إن علاقة قاسم لـ "|" على $\mathbb{Z}^*$ ليست علاقة تخالفيه .

٣) يوجد عنصر محايد في النظام $(\mathbb{Q}, *)$ ، حيث $x * y = xy + 1$ لكل $x, y \in \mathbb{Q}$.

٤) إن $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R} \nRightarrow \mathbb{Z}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$.

(ب) ليكن $f : (\mathbb{R}^*, \cdot) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$ تطبيقاً ، حيث $f(x) = x^{-1}$ ، أجب عما يلي :

١) املأ الفراغ $\mathrm{x}^{-1} = \cdots$.

٢) أثبت أن f تشاكل .

٣) عيّن نواة $\ker f =$.

السؤال الرابع :

(أ) متى نقول إن S مجموعة غير منتهية ؟

(ب) إذا كان $f: D \to \mathbb{Z}^+$ تطبيقاً قاعدته $f(x) = \frac{x+1}{2}$ ، حيث D مجموعة الأعداد الفردية الموجبة فأجب عما يلي :

١) أثبت أن f تقابل .

٢) أثبت أن $\mathbb{Z}^+$ مجموعة غير منتهية مستفيداً من (أ) وَ (ب) .

٣) عيّن قاعدته التطبيق f^{-1} من $\mathbb{Z}^+$ إلى D .

٤) هل $|\mathbb{Z}^+| = |\mathrm{D}|$ ؟ ولماذا ؟

بسم الله الرحمن الرحيم

إجابة أسئلة الاختبار النهائي في المقرر ١٣١ريض- الفصل الأول ١٤٢٩/١٤٣٠هـ

إجابة السؤال الأول :

(أ) : النفي هو $\forall\, x, y \in \mathbb{Z}^+ : x | y \;\vee\; y | x$ وقيمة صوابه هي F .

(ب) :

١) عندما n=1 نجد أن الطرف الأيسر =1 والطرف الأيمن =2 لذا فإن التقرير صائب عندما n=1 .

٢) عندما $n = K$ نفرض أن $K < 2^K$ صائب ونثبت أن هذا يقتضي كون التقرير صائب عندما تكون $n = K + 1$ كما يلي :

$$K < 2^K \Rightarrow K + 1 < 2^K + 1 \Rightarrow K + 1 < 2^K \cdot 2 \Rightarrow K + 1 < 2^{K+1} \ .$$

(ج) : عندما تكون S منتهية فإن $|S| = n$ وحينئذ يكون $|P(S)| = 2^n$ (نظرية) وباستخدام فقرة (ب) يكون لدينا

$|S| = n < 2^n = |P(S)|$. كما أن هذا صحيح عندما تكون $S = \emptyset$ ، لأن $|S| = 0 < 2^0 = 1$.

إجابة السؤال الثاني :

(أ) : ١) S_3 ٢) $(\mathbb{Z}^*_{23}, \cdot)$ ٣) $(\mathbb{Z}_{23}, +, \cdot)$ ٤) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ، حيث $f(x) = 2x$

(ب) :

١) R انعكاسية ، لأن : $\forall\, a \in \mathbb{R}^+ : \frac{a}{a} = 1 \in \mathbb{Q}^+ \Leftrightarrow aRa$

٢) R تناظرية ، لأن : $a, b \in \mathbb{R}^+ \ni aRb \Rightarrow \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^+ \Rightarrow \frac{b}{a} \in \mathbb{Q}^+ \Rightarrow bRa$

٣) R متعدية ، لأن :

$$a, b, c \in \mathbb{R}^+ \ni aRb \wedge bRc \Rightarrow \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^+ \wedge \frac{b}{c} \in \mathbb{Q}^+ \Rightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{c} \in \mathbb{Q}^+ \Rightarrow bRc$$

إذن R علاقة تكافؤ في $\mathbb{R}^+$ ويكون :

$$\overline{1} = [1] = \left\{ x \in \mathbb{R}^+ :\; xR1 \Leftrightarrow \frac{x}{1} \in \mathbb{Q}^+ \Leftrightarrow x \in \mathbb{Q}^+ \right\} = \mathbb{Q}^+$$

(ج) : $|\sigma| = 4$.

إجابة السؤال الثالث :

(أ) :

١) عبارة خاطئة ، لأن $f^{-1}(\mathrm{B}) \subset \mathrm{A}$ يقتضي وجود $x \in A$ بحيث $f(x) \notin B$ وهذا يتناقض مع كون f تطبيقاً .

٢) عبارة صائبة ، فمثلا : $(2 | -2) \;\wedge\; (-2 | 2) \not\Rightarrow 2 = -2$.

٣) عبارة خاطئة ، لأنه بفرض $e \in \mathbb{Q}$ عنصر محايد يكون لدينا :

$$\forall\, x \in \mathbb{Q} : x * e = x = xe + 1 \Rightarrow xe = x - 1 \Rightarrow e = \frac{x-1}{x} \notin \mathbb{Q} \qquad (\text{عندما } x = 0)$$

٤) عبارة صائبة ، فمثلا $(2,3) \in \mathbb{Z}^2$ ولكن $(2,3) \notin \mathbb{R}^3$.

(ب) :

١) $\mathrm{x}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{x}}$

٢) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^* : f(xy) = (xy)^{-1} = \frac{1}{xy} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = f(x) f(y)$

٣) نواة $f = \ker f = f^{-1}(1) = \left\{ x \in \mathbb{R}^* : f(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1 \right\} = \{1\}$

إجابة السؤال الرابع :

(أ) : إذا كانت S تكافئ مجموعة جزئية فعلية منها .

(ب) :

١) f متباين ، لأن : $x, y \in D \ni f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{2} \Rightarrow \cdots \Rightarrow x = y$

f غامر ، لأن : $y \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow \exists\, x = 2y - 1 \in D \ni f(x) = \frac{x+1}{2} = \frac{(2y-1)+1}{2} = y$

مما تقدم نجد أن f تقابل .

٢) من (١) نجد أن $D \approx \mathbb{Z}^+$ مع كون $D \subset \mathbb{Z}^+$ و بالتالي فإن $\mathbb{Z}^+$ مجموعة غير منتهية .

٣) $f^{-1} : \mathbb{Z}^+ \to D$ قاعدته هي $f^{-1}(\mathrm{x}) = 2\mathrm{x} - 1$.

٤) . نعم ، لأن $D \approx \mathbb{Z}^+$ من (١) $\Leftrightarrow |D| = |\mathbb{Z}^+|$.
