جامعة الملك سعود | الاختبار النهائي | الفصل الدراسي الأول ١٤٣٢/١٤٣٣هـ

كلية العلوم- قسم الرياضيات | في المقرر ١٣١ريض | الزمن : ٣ ساعات

أجب عن الأسئلة الآتية

س(١) : (أ) أثبت صحة أو خطأ كل عبارة فيما يأتي: -

(١) إذا كان $f : A \to B$ تطبيقاً فإن $f^{-1} : B \to A$ تطبيق.

(٢) إذا كانت $(0,1) \subseteq \mathbb{R}$ فترة غير قابلة للعد فإن الفترة $(0,3) \subseteq \mathbb{R}$ غير قابلة للعد.

(٣) لأي مجموعتين S وَ T فإن $|S| = |T| \Leftrightarrow S = T$. **(٤)** $\forall x \in S : \{x\} \subseteq P(S)$.

(٥) إن $(\mathbb{Z}_4,+,\cdot)$ حلقة جزئية من الحلقة $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$. **(٦)** إن $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ حقل جزئي من الحقل $(\mathbb{Q},+,\cdot)$.

(ب) أكمل الفراغات الآ تية بما يجعل كل عبارة صائبة:-

(١) $\mathbb{Q}^3 \cap \mathbb{Z}^3 = \cdots$ **(٢)** $\mathbb{R}^3 \cap \mathbb{R}^2 = \cdots$

(٣) لأي مجموعتين غير خاليتين A وَ B فإن : $(A' \cup B)' = \cdots$ وَ $A^2 \times B = \{\cdots\}$

س(٢) : (أ) انفِ التقرير الآتي:-

" $\varnothing \notin P(S) \vee \varnothing \subseteq P(S)$ " وعيّن قيمة صوابه بعد النفي.

(ب) إذا كان $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \in S_6$ فاملأ الفراغ $|\sigma| = \cdots$.

(جـ) املأ الفراغ فيما يلي:-

إذا كان $\left(\frac{1}{2}, -\sqrt{2}, \frac{4}{5}, -5\right)$ عنصراً في النظام $(\mathbb{R}^4, \oplus)$ فإن نظيره هو ..... .

(د) إذا كان $1 \neq x \in \mathbb{R}^*$ فأثبت صحة ما يلي باستخدام الاستقراء الرياضي:-

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}, \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

(هـ) ناقش صحة العبارة الآتية:- إن علاقة قاسم لِـ " | " هي علاقة ترتيب جزئي على $\mathbb{Z}^*$.

س(٣) : (أ) متى نقول إن النظام $(G,\cdot)$ زمرة ؟

(ب) إذا كانت $S = \{1,2,3,\cdots,n\}$ وكان $f : S \to S$ تطبيقاً متبايناً فأجب عمّا يأتي :-

(١) أثبت أن f غامر ومن ثم يكون f تقابلاً (أو تبديلة).

(٢) أثبت أن $(S_n, \circ)$ زمرة، حيث: $S_n = \left\{f : S \xrightarrow[\text{تقابل}]{f} S\right\}$.

(جـ) إذا كانت كل من A وَ B مجموعة غير منتهية وقابلة للعد فأثبت أن $A \approx B$.

(د) أعطِ مثالاً واحداً **فقط** لكل مما يأتي:- **(١)** حقل منتهٍ **(٢)** زمرة ضربية رتبتها 40 **(٣)** حلقة غير منتهية لا تملك عنصر الوحدة. **(٤)** زمرة دائرية غير منتهية.