جامعة الملك سعود / كلية العلوم	بســم الله الرحمن الرحيم	الفصل الثاني ١٤٢٩ / ١٤٣٠ هـ
قســـــم الرياضيات	الاختبار النهائي في المقرر ١٣١ ريض	الزمن : ثلاث ساعات

السؤال الأول : [١٢ درجة]

أثبت صحة أو خطأ كل عبارة فيما يأتي :-

(١) إن $P \cap 2\mathbb{Z}^{+} = \phi$ ، حيث P مجموعة الأعداد الأولية.

(٢) لأي تقريرين A, B فإن $\sim(A \to B) \equiv \sim A \wedge B$.

(٣) إذا كانت $N \subseteq M$ فإن $N^4 \subseteq M^5$.

(٤) إن $(\mathbb{R},*)$ نظام غير مغلق، حيث $a*b=\sqrt{2a+b}$ لكل $a,b \in \mathbb{R}$.

(٥) إن $(\{0,1,2\},+,.)$ ليس حقلا جزئيا من الحقل $\mathbb{Z}_5$.

(٦) إذا كان $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in S_5$ فان : $|\sigma| = |\langle \sigma \rangle| \neq 5$

السؤال الثاني : [١٣ درجة]

(أ) أجب عما يلي :-

(١) متى نقول عن مجموعتين T, S إنهما متكافئتان $(T \approx S)$ ؟

(٢) متى نقول عن تطبيق $f: A \to B$ إنه تطبيق محايد ؟

(٣) متى نقول عن تطبيقين إنهما متساويان ؟

(٤) متى نقول إن * عملية ثنائية على مجموعة S ؟

(ب) أكمل الفراغات الآتية :-

(١) إذا كان $f: A \to B$ تطبيقا وكانت $C, D \subseteq B$ فان :

$f^{-1}(C \cap D) = \{.............|.......................................\}$.

(٢) إذا كان 2 عنصرا في النظام $(\mathbb{Z}_9, \odot)$ فإن :

$(i)\, 2^4 = ...$ $\quad (ii)\, |2| = ...$ $\quad (iii)\, (2^{-1})^3 = ...$

السؤال الثالث : [١٥ درجة]

(أ) إذا كانت A, B مجموعتين غير منتهيين وقابلتين للعد فأثبت أن $A \approx B$.

(ب) إذا كانت R حلقة فأثبت أن $0x=0$ لكل $x \in R$.

(جـ) إذا عرفنا علاقة R علاقة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $\forall a,b \in \mathbb{R} : aRb \Leftrightarrow a^2 - b^2 = 2(b-a)$ فأثبت أن R علاقة تكافؤ في $\mathbb{R}$ ، وجد صنف تكافؤ العدد ٤.

السؤال الرابع : [١٠ درجات]

(أ) متى نقول إن النظام $(G,*)$ زمرة إبدالية ؟

(ب) إذا كانت * عملية معرفة على $\mathbb{Z}$ كما يلي : $\forall x, y \in \mathbb{Z} : x*y = x+y+1$ فأثبت أن النظام $(\mathbb{Z},*)$ زمرة إبدالية.

جامعة الملك سعود / كلية العلوم	بسم الله الرحمن الرحيم	الفصل الثاني ١٤٢٩ / ١٤٣٠ هـ
قســـــم الرياضيات	الاختبار النهائي في المقرر ١٣١ ريض (نموذج الإجابة)	الزمن : ثلاث ساعات

السؤال الأول : [١٢ درجة]

أثبت صحة أو خطأ كل عبارة فيما يأتي :-

(١) عبارة خاطئة حيث إن $P \cap 2\mathbb{Z}^+ = \{2\}$.

(٢) عبارة خاطئة مرفق جدول الصواب.

A	B	$A \to B$	$\sim(A \to B)$	$\sim(A)$	$\sim A \wedge B$
T	T	T	F	F	F
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	F	T	F

ولذا يكون $\sim(A \to B)$ T $\sim A \wedge B$.

(٣) عبارة خاطئة حيث أن عناصر N^4 لها أربع مركبات وعناصر M^5 لها خمس مركبات ولذلك $N^4 \not\subset M^5$.

(٤) عبارة صائبة البرهان بمثال

$$a = -1, b = 0, \Rightarrow a * b = \sqrt{-2} \notin \mathbb{R}$$

ولذلك فإن $(\mathbb{R}, *)$ نظام غير مغلق.

(٥) عبارة صائبة حيث إن $(\{0,1,2\}, +, .)$ ليس مغلقاً لان $2 + 2 = 4 \notin \{0,1,2\}$.

(٦) عبارة صائبة لان : $|\sigma| = |\langle\sigma\rangle| = 3$.

السؤال الثاني : [١٣ درجة]

(أ) أجب عما يلي :-

(١) متى نقول عن مجموعتين T, S إنهما متكافئتان $(T \approx S)$ ؟

$(T \approx S) \Leftrightarrow$ إذا أمكن إيجاد تطبيق $f : T \to S$ يكون تطبيق تقابل.

(٢) متى نقول عن تطبيق $f:A\to B$ إنه تطبيق محايد ؟

$A=B, f(x)=x, \forall x\in A$

(٣) متى نقول عن تطبيقين إنهما متساويان ؟

التطبيقان f, g متساويان $\Leftrightarrow$

مجال $f =$ مجال g

و المجال المقابل ل f $=$ المجال المقابل ل g

و $f(x)=g(x), \forall x$.

(٤) متى نقول إن * عملية ثنائية على مجموعة S ؟

نقول إن * عملية ثنائية على مجموعة S $\Leftrightarrow$ * تطبيق من S^2 إلى S.

(ب) أكمل الفراغات الآتية :-

(١) إذا كان $f:A\to B$ تطبيقا وكانت $C,D\subseteq B$ فإن :

$f^{-1}(C\cap D)=\{x\in A | f(x)\in C\cap D\}$.

(٢) إذا كان 2 عنصرا في النظام $(\mathbb{Z}_9, \odot)$فإن :

$(i)\, 2^4=7 \quad (ii)\, |2|=6 \quad (iii)\, (2^{-1})^3=8$

<u>السؤال الثالث</u> : [١٥ درجة]

(أ) إذا كانت A, B مجموعتين غير منتهيين وقابلتين للعد فأثبت أن $A\approx B$.

$A\approx\mathbb{N}$ و $B\approx\mathbb{N}$ وعلاقة $\approx$ علاقة متعدية ولذلك $A\approx B$.

(ب) إذا كانت R حلقة فأثبت أن $0x=0$ لكل $x\in R$.

$$0x=(0+0)x$$
$$0x=0x+0x$$
$$0x+(-0x)=(0x+0x)+(-0x)$$
$$0x+(-0x)=0x+(0x+(-0x))$$
$$0=0x$$

(جـ) إذا عرفنا علاقة R علاقة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $\forall a,b\in\mathbb{R} : aRb \Leftrightarrow a^2-b^2=2(b-a)$ فأثبت أن R علاقة تكافؤ في $\mathbb{R}$ ، وجد صنف تكافؤ العدد ٤.

- R علاقة عاكسة لأن $\forall a,b\in \mathbb{R}: aRa \Leftrightarrow a^2-a^2=2(a-a)$.

- R علاقة تناظرية لأن $\forall a,b\in \mathbb{R}: aRb \Leftrightarrow a^2-b^2=2(b-a) \Leftrightarrow b^2-a^2=2(a-b) \Leftrightarrow bRa$.

- R علاقة متعدية لأن $\forall a,b,c\in \mathbb{R}: aRb, bRc$

$aRb \Leftrightarrow a^2-b^2=2(b-a)$ و $bRc \Leftrightarrow b^2-c^2=2(c-b)$ بالجمع نحصل على

$aRc \Leftrightarrow a^2-c^2=2(c-a)$

إذن R علاقة تكافؤ في $\mathbb{R}$.

ولإيجاد فصل التكافؤ للعدد ٤ نحل المعادلة $a^2-4^2=2(4-a)$ فنجد الحلين هما فصل التكافؤ

$[4]=\{4,-6\}$.

<u>السؤال الرابع</u> : [١٠ درجات]

(أ) متى نقول إن النظام $(G,*)$ زمرة إبدالية ؟

$(G,*)$ زمرة إبدالية $\Leftrightarrow$

$\forall a,b,c\in G$ فإن

- الانغلاق $a*b\in G$
- الدمج $a*(b*c)=(a*b)*c$
- المحايد $\exists e\in G: a*e=e*a=a, \forall a$
- النظير $\forall a\in G, \exists a^{-1}\in G: a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$
- الإبدال $a*b=b*a$.

(ب) إذا كانت * عملية معرفة على $\mathbb{Z}$ كما يلي : $\forall x,y\in \mathbb{Z}: x*y=x+y+1$ فأثبت أن النظام $(\mathbb{Z},*)$ زمرة إبدالية.

- الانغلاق $\forall x,y\in \mathbb{Z}: x+y+1\in \mathbb{Z} \Rightarrow x*y\in \mathbb{Z}$
- الدمج $\left.\begin{array}{l} x*(y*z)=x*(y+z+1)=x+y+z+2 \\ (x*y)*z=(x+y+1)*z=x+y+z+2 \end{array}\right\} \Rightarrow x*(y*z)=(x*y)*z$
- المحايد $x*e=e*x=x, \Rightarrow x+e+1=x \Rightarrow e=-1\in \mathbb{Z}$
- النظير $x*x^{-1}=x^{-1}*x=-1 \Rightarrow x+x^{-1}+1=-1 \Rightarrow x^{-1}=-2-x$
- الإبدال $x+y+1=y+x+1 \Rightarrow x*y=y*x$.

إذن $(\mathbb{Z},*)$زمرة إبدالية.