بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة الملك سعود — الاختبار النهائي في المقرر ١٣١ ريض

قسم الرياضيات — الفصل الثاني ١٤٣٠/١٤٣١هـ — الزمن: ٣ ساعات

---

١٤ س١: (أ) أثبت صحة أو خطأ كل عبارة فيما يأتي :-

(١) إذا كان A و B تقريرين فإن : $A \to B \not\equiv \sim A \to \sim B$

(٢) إذا كانت $A \subseteq B$ فإن $A^4 \subseteq B^5$.

(٣) إذا كانت $A \neq \phi$ و $S = \phi$ فإن $A \times S = \phi$.

(٤) إن التطبيق $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ غامر حيث $f(x) = 2x - 1$.

(ب) أعط مثالاً واحداً فقط لكل مما يلي :-

(١) زمرة ضربية منتهية رتبتها أكبر من 50 (٢) حلقة منتهية رتبتها أكبر من 80 .

(٣) زمرة غير إبدالية رتبتها 120 (٤) حقل منته رتبته أكبر من 42 .

---

١١ س٢: (أ) متى نقول إن S مجموعة غير قابلة للعد ؟ أعط مثالاً لـ S بحيث $S \subset \mathbb{R}$.

(ب) متى نقول إن A مجموعة غير منتهية ؟ أعط مثالاً لـ A بحيث $A \not\subseteq \mathbb{Z}^+$.

(جـ) متى نقول إن R علاقة ترتيب كلي على مجموعة S ؟ أعط مثالاً واحداً فقط لذلك.

(د) إذا كان $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ تطبيقين متباينين، فأثبت أن $g \circ f$ تطبيق متباين من A إلى C.

---

١٤ س٣: (أ) استخدم الاستقراء الرياضي لإثبات صحة التقرير الآتي :

$$P(n) \equiv n < n! \ , \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+ - \{1, 2\}$$

(ب) إذا عرّفنا عملية $\otimes$ على $\mathbb{Q}^*$ كما يلي :

$$\forall a, b \in \mathbb{Q}^* : a \otimes b = \frac{ab}{4}$$

فادرس النظام $(\mathbb{Q}^*, \otimes)$ من حيث كونه: ① مغلقاً ② إبدالياً ③ تجميعياً ④ فيه عنصر محايد ⑤ لكل عنصر فيه يوجد نظير.

(جـ) هل تستنتج من الفقرة (ب) أن النظام $(\mathbb{Q}^*, \otimes)$ زمرة إبدالية ؟

---

١١ س٤: (أ) إذا كانت $B = \{5^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ فأثبت أن B مجموعة قابلة للعد.

(ب) أكمل الفراغات فيما يلي :-

(١) إذا كانت R علاقة تكافؤ في A فإن :

$(i)\ a \in A \Rightarrow \bar{a} = \{\cdots \mid \cdots\}$ $\quad (ii)\ b \in A \wedge b \notin \bar{a} \Rightarrow \bar{a} \cap \bar{b} = \cdots$

(٢) إذا كان $\sigma \in S_6$ ، حيث $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ فإن $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

(جـ) إذا كانت $H = \{0, 2, 4, 6\}$ مجموعة جزئية من الحلقة $\mathbb{Z}_8$ فأثبت أن $(H, +, \cdot)$ نظام مغلق.

(د) هل $H \leq \mathbb{Z}_8$ ؟