بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة الملك سعود / الرياض — الاختبار **النهائي** في المقرر **١٣١** ريض
كلية العلوم / قسم الرياضيات — الفصل الدراسي **الثاني** ١٤٣٤/١٤٣٣ هـ الزمن: **٣ ساعات**

أجب عن الأسئلة الآتية

س١: (٢٠) ١٢

(أ) (١) أثبت صحة أو خطأ كل عبارة فيما يأتي:-

(١) إن $(\mathbb{Z}^-, +)$ نظام مغلق.

(٢) إن صنف التكافؤ الذي ينتمي إليه العدد -421 هو $\overline{8}$ في $\mathbb{Z}_{11}$.

(٣) إن $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ حقل جزئي من الحقل $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$.

(٤) لكل مجموعتين غير خاليتين A و B فإن: $A \times B \neq B \times A$.

(ب) (١) امأ الفراغات الآتية:-

[١] إذا كان 5 عنصراً في النظام $(\mathbb{Z}_{13}^*, \cdot)$ فإن:

(i) $|5| = |\langle 5 \rangle| =$ [...] (ii) $5^{-1} =$ [...] (iii) $(5^{-1})^2 =$ [...]

(iv) $5x = 2 \Rightarrow x =$ [...]

[٢] إذا كان $\sigma \in S_7$، حيث $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ فإن: $|\sigma| = |\langle \sigma \rangle| =$ [...]

[٣] إذا كان $(z, -1, y) = (4, -x, -5)$ فإن: $x + y + z =$ [...].

س٢: (٢٠) ٨

(أ) متى نقول إن S مجموعة قابلة للعد؟

(ب) «نعلم أنه إذا كانت $A \subseteq B$ وكانت B مجموعة قابلة للعد فإن A تكون قابلة للعد أيضاً» وظف العبارة الواردة في (ب) لإثبات أن $\{\frac{1}{2n} \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ مجموعة قابلة للعد، علماً بأن $\mathbb{Q}^+$ مجموعة قابلة للعد.

(ج) انف العبارة الآتية وعين قيمة صوابها بعد النفي:-

$$\forall\, x, y \in \mathbb{Z} : x > y \vee y > x$$

س٣: (٢٠) ١٢

(أ) (١) أعط مثالاً واحداً فقط لكل مما يأتي:-

(١) تطبيقاً $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بحيث يكون f تطبيقاً ثابتاً.

(٢) حقلاً منتهياً بحيث تكون رتبته أكبر من 50.

(٣) تطبيقاً $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ بحيث يكون f متبايناً ولكنه ليس غامراً.

(٤) حلقة إبدالية غير منتهية لا تملك عنصر الوحدة.

(ب) لتكن R علاقة معرفة على $\mathbb{R}^+$ كما يلي:-

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R}^+ : a\, R\, b \Leftrightarrow \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^+$$

أثبت أن R علاقة تكافؤ في $\mathbb{R}^+$. وعين صنف تكافؤ العنصر $\frac{1}{2}$.

س٤: (٢٠) ٨

(أ) متى نقول إن $*$ عملية ثنائية على مجموعة S؟

(ب) إذا كانت $*$ عملية معرفة على المجموعة $\mathbb{Z}$ كما يلي:-

$$\forall\, x, y \in \mathbb{Z} : x * y = x + y - 2$$

فادرس النظام $(\mathbb{Z}, *)$ من حيث كونه:-

(١) ذا عملية ثنائية (٢) إبدالياً (٣) تجميعياً (٤) يملك عنصراً محايداً.

(٥) يملك نظيراً لكل عنصر فيه (٦) محققاً لشروط الزمرة الإبدالية.