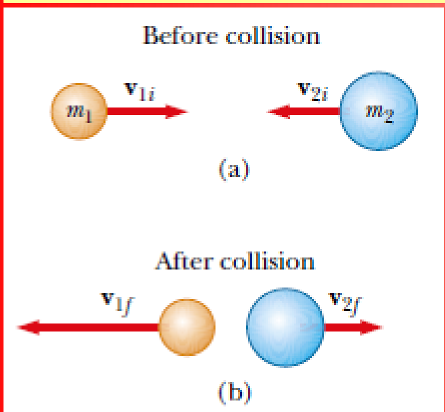

جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الفيزياء والفلك
مقرر 210 فيز
د. ناصر بن صالح الزايد
nalzayed@ksu.edu.sa
المحاضرة رقم: 16

9.4 التصادمات المرنة وغير المرنة Elastic and Inelastic Collisions

- بكل بساطة التصادم المرن هو التصادم الذي يحفظ كلا من الاندفاع وطاقة الحركة، في حين أن التصادم عندما يكون غير مرن فهو لا يحفظ الطاقة الحركية، حيث يضيع جزء منها بسبب التشوهات أو الاحتكاك أو غير ذلك.
- لو تصورنا جسمان m_1 و m_2 يتحركان ضد بعضهما وحصل بينهما تصادم مرن فأن حفظ قوانين الاندفاع والطاقة الحركية تكتب كما يلي:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \tag{9.15}$$

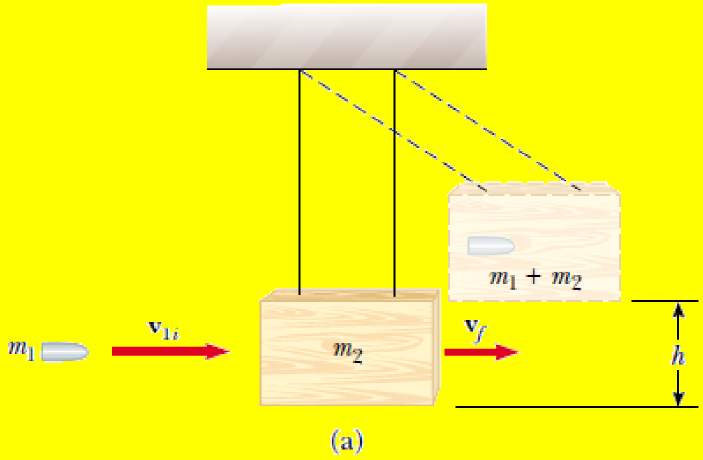
$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^{2} + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^{2} = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^{2} + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^{2} \tag{9.16}$$



- في حالة التصادم المرن كلا من المعادلتين (9.15) و (9.16) صحيحة وقابلة للتطبيق.
- أما في حالة كون التصادم غير مرن فأننا نستخدم فقط المعادلة (9.15).
- يتم تحديد نوعية التصادم وكونه مرنا أو غير مرن من السؤال أو من طبيعة التصادم. مثلا جميع تصادمات السيارات غير مرنة. في حين أن تصادمات كرات البلياردو تعد تصادمات مرنة.

- عندما يلتصق الجسمان بعد التصادم نعامل الجسمين كجسم واحد كتلته مجموع الكتلتين

الفصل التاسع: الاندفاع الخطي والتصادمات Linear Momentum & Collisions
9.6 مثال البندول البالستي The Ballistic Pendulum



• مثال 9.6 البندول البالستي: يستخدم هذا البندول عادة لقياس سرعة الأجسام السريعة جدا مثل طلقة البندقية. يم أطلاق الجسم باتجاه خشبة كبيرة معلقة بحبال خيفة حيث تستقر الطلقة في اللوح الخشبي الذي يتأرجح مع الطلقة ويرتفع مسافة h . إذا علمت بأن $m_1= 5$ g, $m_2= 1$ kg, h =5 cm احسب:

•(أ) سرعة الطلقة الأصلية؟ (ب) الفقد في الطاقة الحركية نتيجة لهذا التصادم

• الحل: استراتيجيه الحل: كما هو واضح فأن هذا التصادم غير مرن، لذلك نستخدم فقط معادلة حفظ الاندفاع (كمية الحركة). إذن الاندفاع قبل الطلقة = الاندفاع بعد الطلقة

• أولا: سوف نستخدم مبدأ حفظ الطاقة حيث أن الطاقة الحركية للخشب + الطلقة مباشرة بعد دخول الطلقة في الخشب = طاقة الوضع عند الارتفاع المعطى . ومنه نحسب سرعة اللوح والطلقة مباشرة بعد دخول الطلقة في اللوح

• ثانيا: نستخدم هذه النتيجة في قانون حفظ الاندفاع ونعوض عن السرعة التي حصلنا عليها ومنها نحصل على سرعة الطلقة.

• ثالثا: من معرفة سرعة الطلقة نحسب الطاقة الكلية للنظام قبل التصادم، ومن أولا نحسب طاقة النظام بعد التصادم مباشرة. والفرق بين الطاقتين هو الطاقة الضائعة (مفقودة)

Linear Momentum & Collisions الفصل التاسع: الاندفاع الخطي والتصادمات

The Ballistic Pendulum 9.6 مثال البندول البالستي

$given : m_1 = 1\ g,\ \ m_2 = 1\ kg,\ h = 5\times10^{-2}\ m$

$$(a) \because m_1 v_{1_i} + m_2 v_{2_i} = m_1 v_{1_f} + m_2 v_{2_f} = (m_1 + m_2) v_f \qquad (1)$$

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_f^{\ 2} = (m_1 + m_2) gh$$

$$= (m_1 + m_2)(9.8)(5\times10^{-2})$$

$$\rightarrow v_f = 0.99\ m/s \qquad (2)$$

$$(2)\ \text{in}\ (1) : (0.005)\ v_{1_i} + 0 = (1 + 0.005)0.99$$

$$\rightarrow v_{1_i} = 1.005\times0.99 / 0.005 = 199\ m/s \qquad (3)$$

$$(b)\ \ k_i = \frac{1}{2} m_1 v_{1_i}^{\ 2} = \frac{1}{2}(0.005)199^2 = 99\ J \qquad (4)$$

$$k_f = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_f^{\ 2} = \frac{1}{2}(1.005)0.99^2 = 0.5\ J \qquad (5)$$

$$\Delta k = k_i - k_f = 99 - 0.5 = 98.5\ J \qquad (6)$$

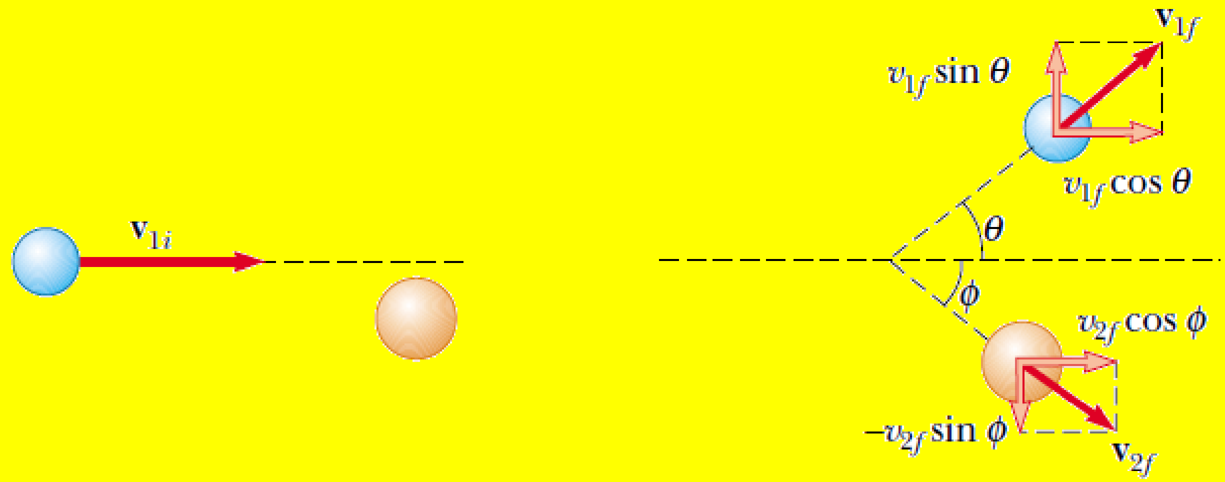
الفصل التاسع: الاندفاع الخطي والتصادمات Linear Momentum & Collisions

9.5 التصادمات في بعدين TWO-DIMENSIONAL COLLISIONS

- بالنسبة لقانون حفظ الاندفاع: نعيد نفس القانون السابق ولكن في كل اتجاه (مركبة) على حده.

$$m_1 v_{1ix} + m_2 v_{2ix} = m_1 v_{1fx} + m_2 v_{2fx} \qquad (9.15)$$

- بالنسبة لقانون حفظ الطاقة الحركية، لا يتغير لأن السرعة مربعة وبالتالي فلا قيمة للاتجاه.

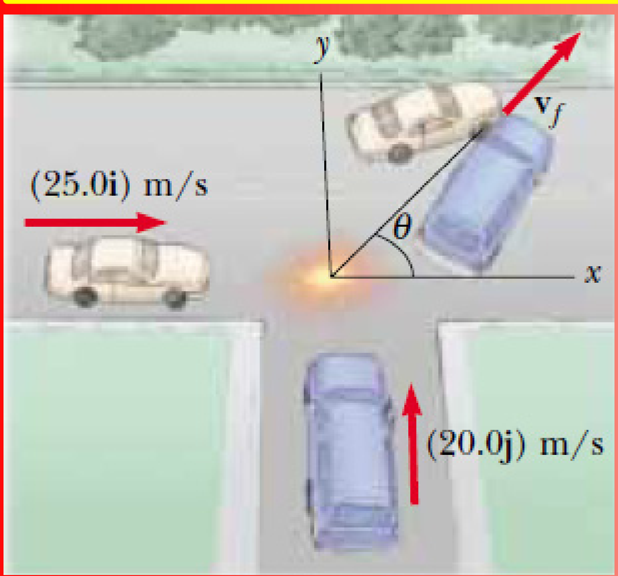


(a) Before the collision (b) After the collision

- لاحظ من الشكل على اليسار كيف نحلل المركبات كما سبق أكثر من مرة. المركبات في نفس الاتجاه تحقق حفظ الاندفاع. لاحظ أشارة سالب في المركبة الرأسية عندما تكون إلى أسفل.

- عندما نحتاج إلى حل مسائل في بعدين، فيجب أن نعامل كل اتجاه (مثلا x) على حده. أي نقوم بتطبيق قانون حفظ الاندفاع في ذلك الاتجاه فقط. ثم نكرر نفس العمل في الاتجاه الآخر. ثم نقوم بحساب الكميات المطلوبة، مثلا الاندفاع الكلي باستخدام نظرية فيثاغورس، الاتجاه باستخدام قانون الظل وهكذا.
- الشكل أعلاه، الجسم الأول لديه فقط مركبة في اتجاه x ولكن بعد التصادم صارت هناك مركبتان.

9.9 مثال على التصادم في بعدين Collision at an Intersection



- مثال 9.9: تتحرك سيارة كتلتها 1500 kg باتجاه الشرق بسرعة مقدارها 25 m/s تتصادم عند التقاطع مع سيارة كتلتها 2500 kg تتحرك باتجاه الشمال بسرعة مقدارها 20 m/s . احسب مقدار واتجاه سرعة السيارتين بعد التصادم إذا علمت بأنهما التصقتا ببعضهما.

- الحل : لاحظ كيف نعامل الاندفاع أولا في اتجاه x ثم في اتجاه y ثم نحصل على النتيجة النهائية من هاتين النتيجتين. تماما كما كنا نفعل مع جميع الكميات المتجهة في مستوى x-y .
- لاحظ كذلك كيف كتبنا المعطيات في الحل أدناه.

$$v_{1ix} = 25\ m/s,\ v_{1iy} = 0,\ v_{2ix} = 0,\ v_{2iy} = 20\ m/s,\ m_1 = 1500\ kg,\ m_2 = 2500\ kg$$

$$x:\quad m_1 v_{1ix} + m_2 v_{2ix} = m_1 v_{1fx} + m_2 v_{2fx} \qquad (1)$$

$$\rightarrow (1500)(25) + 0 = (1500 + 2500)\, v_{fx} \rightarrow v_{fx} = 9.38\ m/s \qquad (2)$$

$$y: 0 + (2500)(20) = (1500 + 2500)\, v_{fy} \rightarrow v_{fy} = 12.5\, m/s \qquad (3)$$

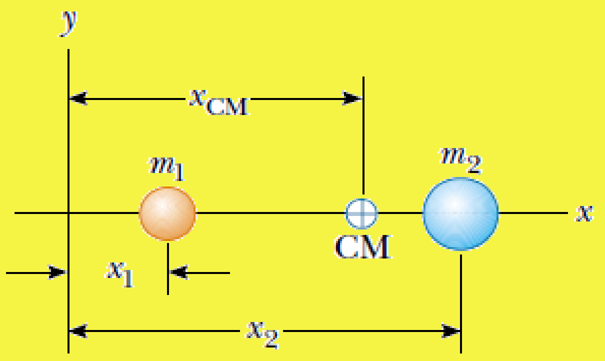
$$\therefore vf = \sqrt{v_{fx}^2 + v_{fy}^2} = \sqrt{9.38^2 + 12.5^2} = 15.63\, m/s$$

$$\vartheta = \tan^{-1}\left(\frac{v_{fy}}{v_{fx}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{12.5}{9.38}\right) = 53.1^o \qquad (4)$$

الفصل التاسع: الاندفاع الخطي والتصادمات Linear Momentum & Collisions

9.6 مركز الكتلة The Center of Mass (CM)

• مركز الكتلة ويسمى أيضا مركز الثقل، هو النقطة التي تتوزع حولها الكتلة بشكل متساو. وليست بالضرورة نقطة تقع دائما في وسط الجسم. إذا كان لدينا عدة أجسام، فان مركز كتلة تلك الأجسام هي نقطة تقع بينها بحيث تتوزع كتلة الأجسام بالتساوي حول تلك النقطة.



• في الشكل المجاور، لدينا جسمان يقعان على محور x تماما، يبعد الأول عن نقطة الأصل مسافة x_1 في حين يبعد الثاني x_2 و مركز الكتلة CM يجب أن يقع في مكان ما بين الجسمين.

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \qquad (9.27)$$

• عندما يكون لدينا عدد كبير من الأجسام، وكذلك عندما تكون تلك الأجسام تقع في ثلاثة أبعاد فأن

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + ... + m_n x_n}{m_1 + m_2 + m_3 + ... + m_n} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} \qquad (9.28)$$

$$y_{CM} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} \qquad z_{CM} = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i} \qquad (9.29)$$

9.6 مركز الكتلة The Center of Mass (CM)

- بشكل عام، وعندما نتحدث عن فراغ ثلاثي متغير الموقع فيه هو ***r*** فأن مركز الكتلة يعبر عنه كما يلي:

$$r_{CM} = x_{CM}\,\hat{i} + y_{CM}\,\hat{j} + z_{CM}\,\hat{k}$$

$$= \frac{\sum_i m_i x_i \hat{i} + \sum_i m_i y_i \hat{j} + \sum_i m_i z_i \hat{k}}{M}$$

$$r_{CM} \equiv \frac{\sum_i m_i r_i}{M} \qquad (9.30)$$

$$\text{where} \quad r_i = x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k}$$

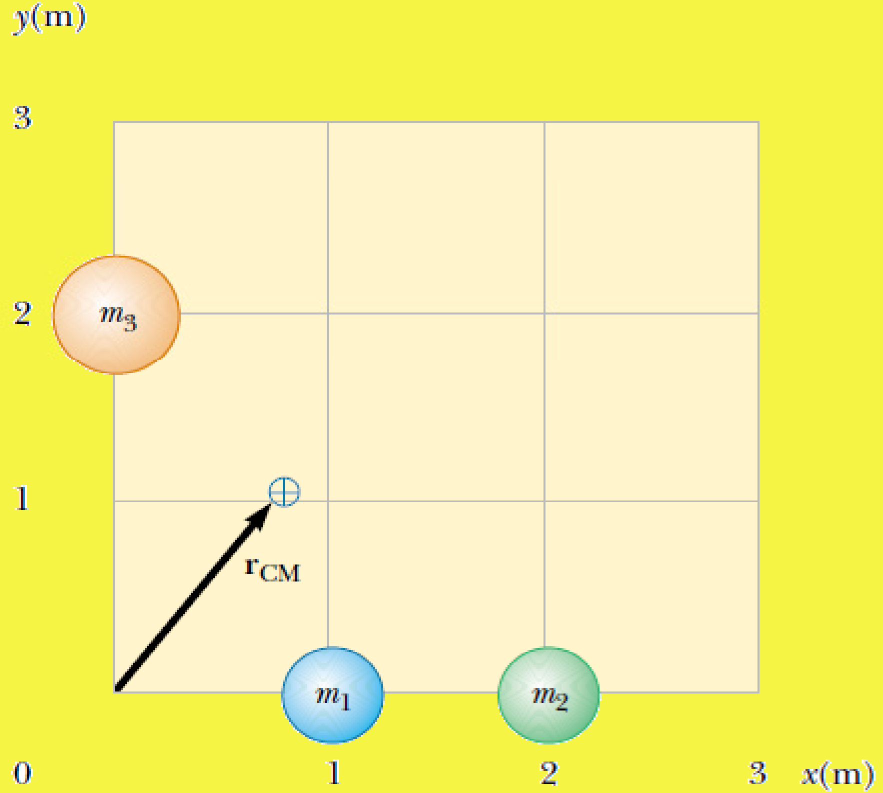
- وهذا عندما تكون الأجسام قابلة للعد. أما عندما يكون هناك توزيع للكتلة في الفراغ فنستخدم التكامل:

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\,dm \qquad y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\,dm \qquad z_{CM} = \frac{1}{M}\int z\,dm \qquad (9.32)$$

$$\text{in 3-D}: \quad r_{CM} = \frac{1}{M}\int r\,dm \qquad (9.33)$$

- نسمي *dm* بعنصر الكتلة، وهو أهم شئ نبحث عنه حتى يصبح التكامل ممكنا.

• **مثال 9.12**: الشكل يبين ثلاثة أجسام عند مواقع مختلفة في المستوى x-y ونريد حساب مركز الكتلة على المحورين. $m_1 = m_2 = 1\ kg,\ m_3 = 2kg$



$$\because\ x_{CM} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= \frac{1\times 1 + 1\times 2 + 2\times 0}{1+1+2} = \frac{3}{4} = 0.75\ m \qquad (1)$$

$$\because\ y_{CM} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= \frac{1\times 0 + 1\times 0 + 2\times 2}{1+1+2} = \frac{4}{4} = 1\ m \qquad (2)$$

$$\because\ r_{CM} = x_{CM}\,\hat{i} + y_{CM}\,\hat{j}$$

$$\therefore\ r_{CM} = 0.75\,\hat{i} + 1\,\hat{j}$$

• لاحظ الصيغة المتجهة الأخيرة التي كتبنا بها مركز الكتلة. هذه الصيغة هي المطلوبة دائما عندما نتحدث عن بعدين أو أكثر.

9.13 حساب مركز كتلة عمود The Center of Mass of a Rod

• **مثال 9.13**: أثبت أن مركز كتل عمود كتلته M وطوله L منتظم يقع عند منتصفه.

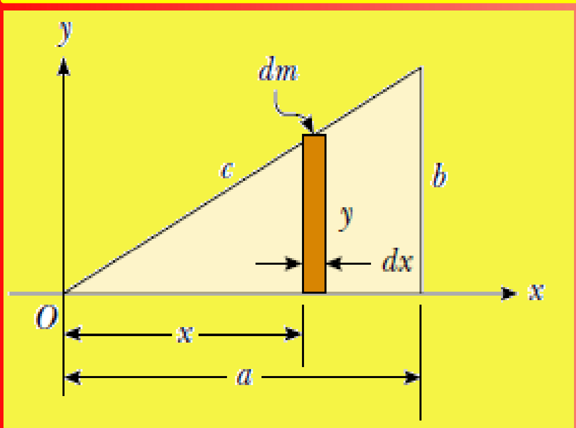
• **الحل**: كما ذكرنا سابقا، في الأجسام التي كتلتها متوزعة في الفراغ، أهم شئ أن نحدد عنصر الكتلة *dm* .
• في حالة العمود المنتظم، نفترض بأن كتلة وحدة الأطوال منه هي λ =M/L وعلى ذلك فأن: *dm = λ dx*

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\,dm = \frac{1}{M}\int_0^L x\,\lambda dx = \frac{\lambda}{M}\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^L = \frac{\lambda L^2}{2M} = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{L}{M}\right)L = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{\lambda}\right)L = \frac{L}{2}$$

• **ملاحظة**: لاحظ أن التكامل الأصلي غير محدود.
• قمنا بعد ذلك بوضع حدود التكامل وذلك بحسب الجسم المدروس.
• بالنسبة للعمود، حيث نحتاج إلى التكامل على سائر العمود، فتكون حدود التكامل أحد خيارين:
(1) أما أن يكون طرف العمود عند نقطة الأصل وبالتالي فالحدود هي: *0 to L*
(2) أو أن يكون منتصف العمود عند نقطة الأصل وبالتالي فالحدود هي: *-L/2 to L/2*
• إن النتيجة التي نحصل عليها في الحالتين سوف تكون نفسها.
• كذلك لاحظ أن عنصر الكتلة *dm* يجب أن يحتوي على نفس عنصر التكامل. مثلا إذا كان التكامل على *x* فلابد أن يحتوي عنصر الكتلة على *dx* ولو كان التكامل على *r* فنتوقع أن يحتوي عنصر الكتلة على *dr*
• باختصار: الخطأ في تحديد عنصر الكتلة *dm* سوف يقود حتما إلى خطأ في حساب موقع مركز الكتلة

الفصل التاسع: الاندفاع الخطي والتصادمات Linear Momentum & Collisions
9.14 حساب مركز كتلة مثلث قائم الزاوية CM of a Right Triangle

• **مثال 9.14**: لدينا المثلث المنتظم المبين الذي كتلته M والمطلوب حساب مركز ثقله



• **الحل**: حيث أن المثلث واقع في بعدين x و y فلابد من أجراء التكامل مرتين.

• من أجل اختيار عنصر الكتلة، نختار الشريحة المبينة في الرسم باللون البرتقالي، سمكها dx وارتفاعها y وبالتالي فمساحتها ydx . إذا اعتبرنا بأن كتلة وحدة المساحات من المثلث هي ρ فأن $dm = \rho ydx$

• **ونكرر نفس الطريقة مع التكامل الآخر على y** . $y_{CM}=1/3\ b$

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\,dm = \frac{1}{M}\int_0^a x\,\rho\,y\,dx \qquad (1)$$

$$\because \frac{y}{b} = \frac{x}{a} \rightarrow y = x\frac{b}{a} \qquad (2)$$

$$\therefore x_{CM} = \frac{1}{M}\int_0^a x\,\rho\,y\,dx = \frac{\rho}{M}\frac{b}{a}\int_0^a x^2 dx = \frac{\rho}{M}\frac{b}{a}\frac{x^3}{3}\Big|_0^a = \frac{\rho}{M}\frac{b}{a}\frac{a^3}{3} \qquad (3)$$

$$\because \frac{1}{2}ab\,\rho = M \rightarrow x_{CM} = \frac{1}{2}\rho ba\frac{1}{Ma}\frac{2}{3}a^2 = \frac{\cancel{M}}{\cancel{M}\cancel{a}}\frac{2}{3}a^{\cancel{2}} = \frac{2}{3}a \qquad (4)$$

الفصل التاسع: الاندفاع الخطي والتصادمات Linear Momentum & Collisions

9.7 حركة نظام مكون من عدة أجسام MOTION OFA SYSTEM OFP ARTICLES

• أخذنا سابقا تعريف موقع مركز الكتلة في ثلاثة أبعاد r_{CM} كما أخذنا تعريف السرعة أيضا و هو أنها مشتقة الموقع بالنسبة للزمن. سوف نطبق نفس المعلومات على حركة نظام مكون من عدة أجسام، حيث أن تلك الحركة تختزل في حركة مركز الثقل.

$$V_{CM} = \frac{dr_{CM}}{dt} \quad \frac{1}{M}\sum_i m_i \frac{dr_i}{dt} \qquad (9.34)$$

$$\rightarrow M V_{CM} = \sum_i m_i \frac{dr_i}{dt} = \sum_i m_i v_i = \sum_i p_i = P_{tot} \qquad (9.35)$$

$$a_{CM} = \frac{dV_{CM}}{dt} \quad \frac{1}{M}\sum_i m_i \frac{dv_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i a_i \qquad (9.36)$$

$$\rightarrow M a_{CM} = \sum_i m_i \frac{dv_i}{dt} = \sum_i m_i a_i = \sum_i F_i \qquad (9.37)$$

$$\sum F_{ext} = M a_{CM} = \frac{dP_{tot}}{dt} \qquad (9.38)$$

•المعادلات أعلاه تحوي جميع المعلومات الضرورية للحل. لاحظ أن الكتلة الكلية للنظام (كتل جميع الأجسام) مضروبة في سرعة النظام = الاندفاع الكلي. كذلك نلاحظ أن مجموع القوى المؤثرة خارجيا تقود إلى تسارع مركز كتلة النظام.

• **مثال 9.13:** صاروخ أرسل راسيا إلى أعلى وعندما كان على ارتفاع 1000 m وسرعة 300 m/s انفجر إلى ثلاث قطع متساوية. أحد تلك القطع استمرت في الحركة راسيا وبسرعة مقدارها 450 m/s ، القطعة الثانية تحرت إلى الشرق بسرعة مقدارها 240 m/s . أحسب سرعة القطعة الثالثة.

• **الحل:** فقط قوانين حفظ الاندفاع تصلح للتطبيق هنا بسبب كون الانفجار (غير مرن).
• الاندفاع في كل اتجاه محفوظ قبل وبعد الانفجار.

$$y\ : MV_i = \frac{1}{3}Mv_{1f} + \frac{1}{3}Mv_{3fy} \qquad (9.34)$$

$$\therefore 300 = \frac{1}{3}(450) + \frac{1}{3}v_{3fy} \rightarrow v_{3fy} = 450\, m/s \qquad (9.34)$$

$$x\ :\ M_2 v_{ix} + M_3 v_{3ix} = M_2 v_f + M_3 v_{3fx} \qquad (9.34)$$

$$\rightarrow 0 + 0 = 240 + v_{3fx} \rightarrow v_{3fx} = -240\, m/s$$

$$\therefore v_{3f} = -240\hat{i} + 450\hat{j}\ \ m/s \qquad (9.34)$$