تصميم المربع الاتيني

Latin Square Design

1-متى يستخدم؟

إذا كان هناك مصدرين للإختلاف متعامدين ويتم وضعها في شكل صفوف وأعمدة.

2- الهدف من التصميم

دراسة وتحليل تأثير ثلاث متغيرات وصفية بغرض تقليل تباين الخطأ التجريبي وهذه المتغيرات هي:

- أثر اختلاف الصفوف
- أثر اختلاف الأعمدة.
- أثر اختلاف المعالجات.

3-التعشية.

تطبيق :

- **التجربة تتكون من:**

نوع السماد (المعالجات)			
T1	T2	T3	T_4
بدون	يوريا	فوسفات	عضوي

أنواع الترب (الصفوف)			
R_1	R_2	R_3	R4
رملية	طينية	سلتية	نوع آخر

- **الظاهرة محل الدراسة:** (انتاجية محصول القمح لكل وحدة تجريبية)
- **الوحدة التجريبية :** أحواض مساحة كل منها 10م^2

طرق الحراثة			
C_1	C_2	C_3	C4
يدوي	الإبل	الميكنة	نوع آخر

- **عدد الوحدات التجريبية**

عدد الوحدات التجريبية $t^2 = 16$	*عدد المعالجات*	*t =4*
	عدد الصفوف عدد الأعمدة	r=4 c=4

- **توزيع المعالجات**

يتم توزيع المعالجات على الصفوف والأعمدة، بحيث تكرر المعالجة مرة احدة في الصف ومرة واحدة في العمود. ويكون عدد التوليفات الممكنة للمربعات اللاتينية هي $t! = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ (24) مربع لاتيني هي التوليفات التالية.

1

T1	T2	T3	T4
T2	T1	T4	T3
T3	T4	T2	T1
T4	T3	T1	T2

2

T1	T3	T4	T2
T2	T1	T3	T4
T3	T4	T2	T1
T4	T2	T1	T3

3

T2	T1	T3	T4
T1	T2	T4	T3
T3	T4	T2	T1
T4	T3	T1	T2

4

T2	T3	T4	T1
T1	T4	T3	T2
T3	T2	T1	T4
T4	T1	T2	T3

5

T3	T1	T2	T4
T4	T2	T1	T3
T2	T4	T3	T1
T1	T3	T4	T2

6

T3	T2	T4	T1
T4	T1	T3	T2
T2	T3	T1	T4
T1	T4	T2	T3

7

T4	T1	T2	T3
T3	T2	T1	T4
T1	T4	T3	T2
T2	T3	T4	T1

8

T4	T2	T3	T1
T3	T1	T4	T2
T1	T3	T2	T4
T2	T4	T1	T3

9

T1	T2	T4	T3
T2	T1	T3	T4
T3	T4	T1	T2
T4	T3	T2	T1

10

T1	T4	T2	T3
T2	T3	T1	T4
T3	T1	T4	T2
T4	T2	T3	T1

11

T2	T1	T4	T3
T1	T2	T3	T4
T3	T4	T1	T2
T4	T3	T2	T1

12

T2	T4	T1	T3
T1	T3	T2	T4
T3	T1	T4	T2
T4	T2	T3	T1

13

T3	T1	T4	T2
T4	T2	T3	T1
T2	T4	T1	T3
T1	T3	T2	T4

14

T3	T4	T1	T2
T4	T3	T2	T1
T2	T1	T4	T3
T1	T2	T3	T4

15

T4	T1	T3	T2
T3	T2	T4	T1
T1	T4	T2	T3
T2	T3	T1	T4

16

T4	T3	T1	T2
T3	T4	T2	T1
T1	T2	T4	T3
T2	T1	T3	T4

17

T1	T3	T2	T4
T2	T1	T4	T3
T3	T4	T1	T2
T4	T2	T3	T1

18

T1	T4	T3	T2
T2	T3	T4	T1
T3	T2	T1	T4
T4	T1	T2	T3

19

T2	T3	T1	T4
T1	T4	T2	T3
T3	T2	T4	T1
T4	T1	T3	T2

20

T2	T4	T3	T1
T1	T3	T4	T2
T3	T1	T2	T4
T4	T2	T1	T3

21

T3	T2	T1	T4
T4	T1	T2	T3
T2	T3	T4	T1
T1	T4	T3	T2

22

T3	T4	T2	T1
T4	T3	T1	T2
T2	T1	T3	T4
T1	T2	T4	T3

23

T4	T2	T1	T3
T3	T1	T2	T4
T1	T3	T4	T2
T2	T4	T3	T1

24

T4	T3	T2	T1
T3	T4	T1	T2
T1	T2	T3	T4
T2	T1	T4	T3

وبفرض أن الرقم 3 هو الرقم العشوائي الذي تم اختياره من بين الأرقام (1-24) ، يكون المربع رقم 3 هو الذي وقع عليه الاختيار، ويأخذ الصورة الموضحة التالية.

مربع لاتيني قياسي رقم 3

			طرق الحراثة			
			يدوي	الإبل	الميكنة	نوع آخر
			C_1	C_2	C_3	C4
نوع التربة	رملية	R_1	T2	T1	T3	T4
	طينية	R_2	T1	T2	T4	T3
	سلتية	R_3	T3	T4	T2	T1
	آخر	R_4	T4	T3	T1	T2

- **تسجيل كميات الإنتاج**

بعد الانتهاء من التجربة يتم تسجيل كميات الإنتاج بالكيلوجرام للوحدات التجريبية كما في الجدول المقابل.

	C_1	C_2	C_3	C_4
R_1	(72) T_2	(62) T_1	(87) T_3	(92) T_4
R_2	(71) T_1	(70) T_2	(90) T_4	(89) T_3
R_3	(76) T_3	(71) T_4	(83) T_2	(75) T_1
R_4	(85) T_4	(77) T_3	(68) T_1	(90) T_2

- **إعداد جدول مناسب للبيانات**

بعد تسجيل كميات الإنتاج للوحدات التجريبية، يمكن عرضها في شكل مناسب، لإجراء تحليلها واستخلاص النتائج كما هو وارد بالجدولين المقابلين:

R_i \ C_j	C_1	C_2	C_3	C_4	Total
R_1	71	70	87	92	320
R_2	72	62	90	89	313
R_3	76	71	68	90	305
R_4	85	77	83	75	320
Total	304	280	328	346	1258

T_k	T_1	T_2	T_3	T_4
1	71	70	87	92
2	62	72	89	90
3	68	90	76	71
4	75	83	77	85
Total	276	315	329	338

تعريف المشاهدة $Y_{ij(k)}$

$Y_{ij(k)}$: المشاهدة التي سجلت على الوحدة التجريبية التي استلمت المعالجة رقم k وتقع في الصف رقم i والعمود رقم j ، وفي هذا التطبيق تعبر المشاهدة $Y_{ij(k)}$ عن كمية الإنتاج من البطاطس لقطعة الأرض التي استلمت المعالجة رقم k، وتنتمي للتربة i وحرثت بالطريقة رقم j .

4-النموذج الرياضي

- **صياغة النموذج**

من المعلوم أن الاختلاف الكلي في المشاهدة $(Y_{ij(k)} - \mu)$ يرجع إلى أربعة مصادر يمكن التعبير عنها كما يلي.

$$\begin{aligned}(Y_{ij(k)} - \mu) &= C_i + R_j + \tau_{(k)} + \varepsilon_{ij(k)} \\ Y_{ij(k)} &= \mu + C_i + R_j + \tau_{(k)} + \varepsilon_{ij(k)}\end{aligned} \qquad (1)$$

حيث أن:

μ: متوسط عام

R_i: أثر الصف i ، وتقديره هو $\hat{R}_i = (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})$ على سبيل المثال تقدير أثر الصف الثاني (التربة الطينية R_2) $\hat{R}_2 = (\bar{Y}_{2.} - \bar{Y}_{..})$ يحسب كما يلي:

$$\hat{R}_2 = (\bar{Y}_{2.} - \bar{Y}_{..}) = \frac{313}{4} - \frac{1258}{16} = 78.3 - 78.6 = -0.3$$

C_j: أثر العمود j ، وتقديره هو $C_j = (\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..})$ على سبيل المثال تقدير أثر العمود الثالث (الحراثة باستخدام الميكنة C_3) $C_3 = (\bar{Y}_{.3} - \bar{Y}_{..})$ يحسب كما يلي:

$$\hat{C}_3 = (\bar{Y}_{.3} - \bar{Y}_{..}) = \frac{328}{4} - \frac{1258}{16} = 82 - 78.6 = 3.4$$

$\tau_{(k)}$: هو أثر المعالجة رقم k وتقديرها هو: $\hat{\tau}_{(k)} = (\bar{Y}_{(k)} - \bar{Y}_{..})$ ، وعلى سبيل المثال تقدير أثر المعالجة $T_{(4)}$ (السماد العضوي) $\hat{\tau}_{(4)} = (\bar{Y}_{(4)} - \bar{Y}_{..})$ هو:

$$\hat{\tau}_{(4)} = (\overline{Y}_{(4)} - \overline{Y}..) = \frac{338}{4} - \frac{1258}{12} = 84.5 - 78.6 = 5.9$$

$\varepsilon_{ij(k)}$: خطأ تجريبي.

- **افتراضات النموذج:**

$$\sum R_i = \sum C_j = \sum \tau_{(k)} = 0,$$
$$\varepsilon_{ij(k)} \sim N(o, \sigma^2)$$

- تقدير تباين الخطأ العشوائي هو متوسط مربعات الأخطاء، $\hat{\sigma}^2 = S_e^2 = MSE$ وتوجد قيمته في جدول تحليل التباين:
- معامل الاختلاف النسبي CV هو:

$$CV = \frac{S_e}{\overline{Y}..} \times 100$$

5-الاستدلال الإحصائي:

في هذا التصميم يتم إجراء الآتي:

أ- اختبار أهمية أخذ الصفوف (أنواع الترب) في الاعتبار عند التصميم:
ب-اختبار أهمية أخذ الأعمدة (طرق الحراثة) في الاعتبار عند التصميم:
ت-اختبار تساوي متوسطات المعالجات (نوع السماد)
ث-إجراء المقارنات الثنائية بين متوسطات الإنتاج لأنواع السماد باستخدام طريقة LSD إذا إحتاج التحليل ذلك.

ولتحقيق هذه الأهداف يجب تكوين جدول تحليل التباين

- **تكوين جدول تحليل التباين**

يمكن تجزئه مجموع المربعات الكلي $SSTo$ إلى أربع مكونات كما هي مبينة بالطرف الأيمن للنموذج (1) و هي:

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}(Y_{ij(k)} - \overline{Y}..)^2 = t\sum_{i=1}^{r}(\overline{Y}_i. - \overline{Y}..)^2 + t\sum_{j=1}^{c}(\overline{Y}._j - \overline{Y}..)^2 + t\sum_{k}^{t}(\overline{Y}_{(k)} - \overline{Y}..)^2 + \sum_{i}^{b}\sum_{j}^{t}\varepsilon_{ij(k)}^2$$

$$SSTo = SSR + SSC + SSTr + SSE, \qquad r = c = t$$

حيث أن:

$SSTo$: هو مجموع المربعات الكلي، SSR: هو مجموع المربعات التي تعزى للصفوف.

SSC : مجموع المربعات التي تعزى للأعمدة.

$SSTr$: هو مجموع المربعات التي تعزى إلى المعالجات،

SSE:هو مجموع مربعات الأخطاء.

وتحسب قيمة كل مجموع أعلاه بتطبيق الصيغ الحسابية التالية:

$$SSTo = \sum_i \sum_j (Y_{ij(k)} - \bar{Y}..)^2 = \sum_i \sum_j Y^2_{ij(k)} - CF$$

$$SSRo = \sum_i \sum_j (\bar{Y}_i. - \bar{Y}..)^2 = \frac{1}{t}\sum_i Y_i.^2 - CF$$

$$SSCo = \sum_i \sum_j (\bar{Y}._{j(k)} - \bar{Y}..)^2 = \frac{1}{t}\sum_j Y.^2_j - CF$$

$$SSTr = \sum_k \sum_j (\bar{Y}_{(k)} - \bar{Y}..)^2 = \frac{1}{t}\sum_k Y^2_{(k)} - CF$$

$$SSE = SSTo - SSRo - SSCo - SSTr$$

كما يحسب معامل التصحيح CF بالمعادلة التالية

$$CF = \frac{Y..^2}{t^2}$$

وبحساب هذه المقادير يمكن تكوين جدول تحليل التباين التالي:

ANOVA				
S.O.V	***df***	***SS***	***MS***	***F****
Row	*t-1*	$SSRo = \frac{1}{t}\sum_i Y_i.^2 - CF$	*MSRo*	$F^*_R = MSRo/MSE$
Colum	*t-1*	$SSCo = \frac{1}{t}\sum_j Y.^2_j - CF$	*MSCo*	$F^*_C = MSCo/MSE$
Treat.	*t-1*	$SSTr = \frac{1}{t}\sum_k Y^2_{(k)} - CF$	*MSTr*	$F^*_T = MSTr/MSE$
Errors	*(t-1)(t-2)*	$SSE = SSTo - SSRo - SSCo - SSTr$	*MSE*	
Total	t^2*-1*	$SSTo = \sum_i \sum_j Y^2_{ij(k)} - CF$		

التطبيق على المثال السابق:

	C_1	C_2	C_3	C_4	Total
R_1	71	70	87	92	320
R_2	72	62	90	89	313
R_3	76	71	68	90	305
R_4	85	77	83	75	320
Total	304	280	328	346	1258

T1	T2	T3	T4
71	70	87	92
62	72	89	90
68	90	76	71
75	83	77	85
276	315	329	338

$$CF = \frac{Y_{..}^{\ 2}}{t^2} = \frac{(1258)^2}{16} = 98910.25$$

$$\sum_i \sum_j Y_{ij(k)}^2 = (71)^2 + \ldots + (75)^2 = 100232$$

$$\sum_i Y_{i.}^{\ 2} = (320)^2 + (313)^2 + (305)^2 + (320)^2 = 395794$$

$$\sum_j Y_{.j}^{\ 2} = (304)^2 + (280)^2 + (328)^2 + (346)^2 = 398116$$

$$\sum_k Y_{(k)}^2 = (276)^2 + (315)^2 + (329)^2 + (338)^2 = 397886$$

وباستخدام نتائج المجاميع يمكن الحصول على مجموع المربعات لكل مصدر من مصادر الاختلاف و هي كالتالي

حساب مجموع مربعات كل مصدر للإختلاف	df	
$SSTo = \sum_i \sum_j Y_{ij(k)}^2 - CF = 100232 - 98910.25 = 1321.75$	t^2-1	15
$SSRo = \frac{1}{t}\sum_i Y_{i.}^{\ 2} - CF = \frac{(395794)}{4} - 98910.25 = 38.25$	(r-1)	3
$SSCo = \frac{1}{t}\sum_j Y_{.j}^{\ 2} - CF = \frac{(398116)}{4} - 98910.25 = 618.75$	(c-1)	3
$SSTr = \frac{1}{t}\sum_k Y_{(k)}^2 - CF = \frac{(397886)}{4} - 98910.25 = 561.25$	(t-1)	3
$SSE = SSTo - SSRo - SSCo - SSTr$ $= 1321.75 - 38.25 - 618.75 - 561.25 = 103.5$	(t-1)(t-2)	6

وباستخدام مجموع مربعات كل مصدر يمكن تكوين جدول تحليل التباين التالي:

جدول تحليل التباين

ANOVA					
S.O.V	df	SS	MS	F*	F
Row نوع التربة	3	38.25	12.75	0.73913	4.757
Colum طريقة الحراثة	3	618.75	206.25	11.95652	4.757
Treat. نوع السماد	3	561.25	187.0833	10.84541	4.757
Errors	6	103.5	17.25		
Total	15	1321.75			

- تقدير تباين الخطأ العشوائي يساوي متوسط مربعات الأخطاء:

$$S_e^2 = MSE = 17.25$$

- معامل الاختلاف النسبي:

$$CV = \frac{S_e}{\bar{Y}..} \times 100 = \frac{\sqrt{17.25}}{\left(\frac{1258}{16}\right)} \times 100 = \frac{4.153}{(78.625)} \times 100 = 5.28$$

ويدل هذا المعامل على أن المشاهدات التابعة أكثر تجانسا، ويتركز انتشارها حول قيمة المتوسط الحسابي لها.

- **اختبار أهمية أخذ الصفوف (أنواع الترب) في الاعتبار عند التصميم:**

الفرض العدم: أخذ أنواع الترب في الاعتبار عند التصميم ليس له أهمية في التأثير على الإنتاجية:

$$H_0 : \mu_{R_1} = \mu_{R_2} = \mu_{R_3} = \mu_{R_4} = \mu$$

الفرض البديل: أخذ نوع التربة في الاعتبار يؤثر معنويا على الإنتاجية:

$$H_1 : at \ \ least \ \ one \ \ of \ \ \mu_{R_i} \neq \mu$$

إحصائية الاختبار:

$$F_R^* = MSRo/MSE = 12.75/17.25 = 0.74$$

القرار: بما أن القيمة المحسوبة $F_R^* = 0.74$ أكبر من القيمة الجدولية $F_{(0.05,3,6)}=4.757$ لذا نقبل الفرض العدم ونرفض الفرض البديل ويستدل من ذلك على أن أخذ الصفوف (أنواع

الترب) في الإعتبار عند تنفيذ التجربة لا يؤثر معنويا على الإنتاجية. لذا يجب إهمال نوع التربة لأنه لا يقلل معنويا من تباين الخطأ التجريبي.

- **اختبار أهمية أخذ الأعمدة (طرق الحراثة) في الاعتبار عند التصميم:**

الفرض العدم: أخذ طرق الحراثة في الاعتبار عند التصميم ليس له أهمية في التأثير على الإنتاجية:

$$H_0 : \mu_{C_1} = \mu_{C_2} = \mu_{C_3} = \mu_{C_4} = \mu$$

الفرض البديل: أخذ طرق الحراثة في الاعتبار يؤثر معنويا على الإنتاجية:

$$H_1 : at \ \ least \ \ one \ \ of \ \ \mu_{C_j} \neq \mu$$

إحصائية الاختبار:

$$F_C^* = MSCo/MSE = 206.25/17.25 = 11.96$$

القرار: بما أن القيمة المحسوبة $F_C^* = 11.96$ أكبر من القيمة الجدولية $F_{(0.05,3,6)}=4.757$ لذا نرفض فرض العدم ونقبل الفرض البديل ويستدل من ذلك على أن أخذ الأعمدة (طرق الحراثة) في الإعتبار عند تنفيذ التجربة يؤثر معنويا على الإنتاجية. لذا يجب عدم إهمال طرق الحراثة كمصدر للإختلاف لأنه يقلل معنويا من تباين الخطأ التجريبي.

- **اختبار تساوي متوسطات المعالجات (نوع السماد)**

الفرض العدم: متوسطات الإنتاج تحت تأثير أنواع السماد متساوية:

$$H_0 : \mu_{T_1} = \mu_{T_2} = \mu_{T_3} = \mu_{T_4} = \mu$$

الفرض البديل: يوجد على الأقل متوسطي للإنتاج مختلفين.

$$H_1 : at \ \ least \ \ one \ \ of \ \ \mu_{T_k} \neq \mu$$

- **إحصائية الاختبار:**

$$F_T^* = MSTr/MSE = 187.083/17.25 = 10.845$$

- **القرار:** بما أن القيمة المحسوبة $F_T^* = 10.845$ أكبر من القيمة الجدولية $F_{(0.05,3,6)}=4.757$ لذا نرفض الفرض العدم ونقبل الفرض البديل ويستدل من ذلك على وجود على الأقل متوسطي للإنتاجية بينها فرق معنوي، ومن ثم يمكن استخدام طريقة أقل فرق معنوي LSD للمقارنة بين كل نوعين من السماد.

- **إجراء المقارنات الثنائية بين متوسطات الإنتاج لأنواع السماد باستخدام طريقة *LSD***

$$LSD = t_{(1-\alpha/2,\, df_{error})} .S.E_{\bar{Y}_{(k)} - \bar{Y}_{(k`)}}$$

$$t_{(1-\alpha/2,\, df\text{error})} = t_{(0.975,\, 6)} = 2.447$$

$$S.E_{\bar{Y}_{(k)} - \bar{Y}_{(k`)}} = \sqrt{\frac{2MSE}{t}} = \sqrt{\frac{2(17.25)}{4}} = 2.94$$

$$LSD = 2.447 \times 2.94 = 7.19$$

متوسطات المعالجات تصاعديا

LSD = 7.19		T_1	T_2	T_3
متوسطات المعالجات تنازليا		69	78.75	82.25
T_4	84.5	15.50	5.75	2.25
T_3	82.25	13.25	3.50	
T_2	78.75	9.75		

- حيث أن الفرق $(\bar{Y}_{T_4} - \bar{Y}_{T_1}) = 15.5$ $LSD = 7.19 <$ ، إذا يوجد فرق معنوي بين متوسطي إنتاج (بدون استخدام سماد T_1، وحالة استخدام سماد عضوي T_4) ، ونوصي باستخدام السماد العضوي لأنه يؤدي إلى حدوث زيادة معنوية وذات دلالة إحصائية في الإنتاج مقارنة بحالة عدم الاستخدام.
- حيث أن الفرق $(\bar{Y}_{T_3} - \bar{Y}_{T_1}) = 13.25$ $LSD = 7.19 <$ ، إذا يوجد فرق معنوي بين متوسطي إنتاج (بدون استخدام سماد T_1، وحالة استخدام سماد فوسفات T_3) ، ونوصي باستخدام سماد فوسفات لأنه يؤدي إلى حدوث زيادة معنوية وذات دلالة إحصائية في الإنتاج مقارنة بحالة عدم الاستخدام.
- حيث أن الفرق $(\bar{Y}_{T_2} - \bar{Y}_{T_1}) = 9.75$ $LSD = 7.19 <$ ، إذا يوجد فرق معنوي بين متوسطي إنتاج (بدون استخدام سماد T_1، وحالة استخدام أنواع أخرى من السماد T_2) ، ونوصي باستخدام هذه الأنواع الأخرى لأنه يؤدي إلى حدوث زيادة معنوية وذات دلالة إحصائية في الإنتاج مقارنة بحالة عدم الاستخدام.
- نوصي باستخدام السماد العضوي ما لم يكن مكلفا مقارنة بسماد الفوسفات والأنواع الأخرى.