تمارين (١ ، ١)

لتكن $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ ،

$D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ ، $E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

في التمارين من (١) إلى (٣٠) احسب المصفوفة المبينة إن أمكن ذلك.

(١) $D + E$.

(٢) $D - E$.

(٣) $5A$.

(٤) $-7C$.

(٥) $2B - C$.

(٦) $4E - 2D$.

(٧) $-3(D + 2E)$.

(٨) $C - C$.

(٩) $tr(D)$.

(١٠) $tr(D - 3E)$.

(١١) $4tr(7B)$.

(١٢) $tr(A)$.

(١٣) $2A^T + C$.

(١٤) $D^T - E^T$.

(١٥) $(D - E)^T$.

(١٦) $B^T + 5C^T$.

(١٧) $\frac{1}{4}C^T - \frac{1}{2}A$.

(١٨) $C^T - C$.

(١٩) $3E^T - 2D^T$.

(٢٠) AB .

(٢١) BA .

(٢٢) $A(BC)$.

(٢٣) $(C^T B)A^T$.

(٢٤) $tr(C^T A^T + 2E^T)$.

(٢٥) $4BC + 2B$.

(٢٦) $B^T(CC^T - A^T A)$.

(٢٧) $D^T E^T - (ED)^T$.

(٢٨) $3A - B^T C^T$.

(٢٩) $tr(DE + ED)$.

(٣٠) $tr(DE - ED)$.

(٣١) إذا كانت $2A - 3B = 6(A + 3B)$ فعين A بدلالة B .

(٣٢) إذا كانت B مصفوفة من الدرجة $m \times n$ حيث $B + A = A$ لكل مصفوفة A من الدرجة $m \times n$ فأثبت أن $B = 0$.

(٣٣) أثبت أن $A = -A$ إذا وفقط إذا كانت $A = 0$.

(٣٤) إذا كانت كل من A و B مصفوفة قطرية فأثبت أن كلاً من المصفوفات التالية قطرية :

(أ) $A + B$. (ب) $A - B$. (ج) kA حيث $k \in \mathbb{R}$.

(٣٥) إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ فأثبت أن $A^2 - A - 6I = 0$.

(٣٦) عين جميع المصفوفات من الدرجة 2 التي تحقق $A^2 = 0$.

(٣٧) عين جميع المصفوفات من الدرجة 2 التي تحقق $A^2 = I$.

(٣٨) عين جميع المصفوفات من الدرجة 2 التي تحقق $A^2 = A$.

(٣٩) عين مصفوفتين A و B من الدرجة 2 بحيث يتحقق $AB = 0$ ولكن $BA \neq 0$.

(٤٠) إذا كانت A مصفوفة من الدرجة $m \times n$ و B مصفوفة من الدرجة $n \times 1$ وكان $AB = 0$ فهل من الممكن أن تكون $A = 0$ ؟

(٤١) بين إستحالة وجود مصفوفتين A و B من الدرجة 2 بحيث أن $AB - BA = I$.

(٤٢) إذا كانت B مصفوفة من الدرجة n و A مصفوفة من الدرجة $m \times n$ حيث $AB = 0$ فأثبت إستحالة وجود مصفوفة C من الدرجة n تحقق $BC = I$.

(٤٣) اثبت فقرات المبرهنة (٤ ، ١) .

(٤٤) إذا كانت كل من A و B مصفوفة قطرية من الدرجة n فأثبت أن AB مصفوفة قطرية وأن $AB = BA$.

(٤٥) لتكن كل من A و B مصفوفة من الدرجة n. أثبت أن :

(أ) $AB = BA$ إذا وفقط إذا كانت $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

(ب) $AB = BA$ إذا وفقط إذا كانت $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$.

(ج) $AB = BA$ إذا وفقط إذا كانت $A^T B^T = B^T A^T$.

(٤٦) لتكن A مصفوفة من الدرجة 2 ولتكن $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(أ) إذا كانت $AB = BA$ فأثبت أن $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$ حيث $a, b \in \mathbb{R}$.

(ب) إذا كانت $AC = CA$ فأثبت أن $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & a \end{bmatrix}$ حيث $a, b \in \mathbb{R}$.

(٤٧) لتكن A مصفوفة من الدرجة2.إذا كانت $AB = BA$ لكل مصفوفة B من الدرجة2 فأثبت أن $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ حيث $a \in \mathbb{R}$.

(٤٨) إذا كانت A مصفوفة من الدرجة $m \times n$ على الأعداد الحقيقية حيث $AA^T = 0$ فأثبت أن $A = 0$.

(٤٩) إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n حيث $A = A^T$ و $A^2 = 0$ فأثبت أن $A = 0$.

(٥٠) إذا كانت كل من A و B مصفوفة مربعة حيث $AB = A$ و $BA = B$ فأثبت أن $A^2 = A$ وأن $B^2 = B$.

(٥١) إذا كانت A مصفوفة مربعة حيث $A^2 = A$ فأثبت أن $(I - A)^2 = I - A$.

(٥٢) أثبت أن $A^3 - I = (A - I)(A^2 + A + I)$ حيث A مصفوفة مربعة .

(٥٣) لنفرض أن A مصفوفة من الدرجة $n \times 1$ حيث $A^T A = I$ ولنفرض أن $H = I - 2A A^T$. أثبت أن : (أ) $H = H^T$. (ب) $H^T H = I$.

(٥٤) إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ فأثبت أن

ولكن $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$.

(٥٥) لتكن $[AB] = AB - BA$ لكل A و B من الدرجة n. أثبت أن

(أ) $[[AB]C] + [[BC]A] + [[CA]B] = 0$.

(ب) $[(A+B)C] = [AC] + [BC]$.

(ج) هل من الضروري أن يكون $[[AB]C] = [A[BC]]$.

(٥٦) لتكن كل من A , B و C مصفوفة من الدرجة 2.

(أ) أثبت أن $tr(AB - BA) = 0$.

(ب) إذا كان $tr(A) = 0$ فأثبت أن $A^2 = kI$ حيث $k \in \mathbb{R}$.

(ج) أثبت أن $(AB - BA)^2 C = C (AB - BA)^2$.

(٥٧) إذا كانت A مصفوفة مربعة وكانت $A^2 = A$ و $(A - A^T)^2 = 0$ فأثبت أن $(A A^T)^2 = A A^T$.

(١،٢) العمليات الصفية الأولية

Elementary Row Operations

سندرس في الفصل الثالث أنظمة المعادلات الخطية وطرق حلها حيث نستخدم لهذا الغرض مصفوفة خاصة تعرف بالمصفوفة المختزلة وهي ما نحن بصدد التعرف عليها في هذا البند. سنجري ثلاث عمليات على صفوف المصفوفة تسمى العمليات الصفية الأولية (elementary row operation) وهي :

(١) تغيير ترتيب أي صفين من المصفوفة .

(٢) ضرب أي صف من صفوف المصفوفة بعدد غير صفري .

$$\xrightarrow{3R_2}\begin{bmatrix}1 & \frac{7}{3} & -1\\ 0 & 1 & 9\\ 0 & \frac{4}{3} & 12\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{-7}{3}R_{21},\ \frac{-4}{3}R_{23}}\begin{bmatrix}1 & 0 & -22\\ 0 & 1 & 9\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

ولذا فإن المصفوفة الأخيرة هي الصيغة الدرجية الصفية المختزلة للمصفوفة A. □

ملحوظات

(١) نلفت انتباه القارئ إلى أن الصيغة الدرجية الصفية المختزلة لمصفوفة A وحيدة.

(٢) عدد الصفوف غير الصفرية في الصيغة الدرجية الصفية المختزلة مهم جداً ويسمى رتبة (rank) المصفوفة ولكننا سنؤجل دراسة الرتبة إلى فصل قادم.

تمارين (٢ ، ١)

ضع كلاً من المصفوفات الآتية على صيغة درجية صفية مختزلة .

(١) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 4 & 2\\ 2 & 1 & 3 & 1\\ -3 & 1 & 1 & 4\end{bmatrix}$.

(٢) $\begin{bmatrix}1 & 3 & 1 & 7\\ 3 & -2 & 4 & 1\\ 4 & 1 & 9 & 6\end{bmatrix}$.

(٣) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 5\\ 2 & 5 & 6\\ 3 & 7 & 7\end{bmatrix}$.

(٤) ✓ $\begin{bmatrix}0 & 2 & 4\\ 1 & -3 & 5\\ 3 & -1 & -1\end{bmatrix}$.

(٥) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 \end{bmatrix}$.

(٦) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(٧) $\begin{bmatrix} 6 & 4 & -5 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$.

(٨) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.

(٩) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

(١٠) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & -1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & -2 & 8 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 6 & 0 & 7 \end{bmatrix}$.

(٣ ، ١) معكوس المصفوفة

Inverse of Matrix

في هذا البند نقصر دراستنا على المصفوفات المربعة ونبين متى يكون لمصفوفة مربعة معكوس ثم نستخدم العمليات الصفية الأولية لإيجاد معكوس المصفوفة. ولكننا ننوه عن وجود طرق أخرى لإيجاد معكوس المصفوفة ندرسها في الفصل القادم.

تعريف (١٣ ، ١)

لتكن A مصفوفة مربعة من الدرجة n . نقول إن المصفوفة B معكوس (inverse) للمصفوفة A إذا كانت B مصفوفة مربعة من الدرجة n وكان $AB = BA = I$.

تمارين (٣،١)

(١) إذا كانت $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ وكان $ad - bc \neq 0$ فأثبت أن للمصفوفة A معكوساً وأن

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} .$$

(٢) استخدم التمرين (١) لإيجاد معكوس كل من المصفوفات التالية (إن وجد).

(أ) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

(ج) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

(٣) أحسب معكوس كل من المصفوفات التالية (إن وجد).

(أ) $\begin{bmatrix} 1 & 7 & 12 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 7 & 1 \end{bmatrix}$

(ج) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

(ل) $\begin{bmatrix} -1 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ (هـ) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

(و) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ي) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

(٤) أكتب كلاً من المصفوفات التالية كحاصل ضرب مصفوفات أولية (إن أمكن ذلك).

(أ) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & 15 \end{bmatrix}$.

(٥) إذا كانت E مصفوفة أولية فأثبت أن E^T مصفوفة أولية أيضًا.

(٦) إذا كان لكل من A و B معكوس فهل من الضروري أن يكون للمصفوفة $A + B$ معكوس ؟

(٧) إذا كان للمصفوفة A معكوس وكان $AB = AC$ فأثبت أن $B = C$.

(٨) إذا كان للمصفوفة A معكوس وكان $A^2 - 3A + I = 0$ فأثبت أن $A^{-1} = \frac{1}{2}(3I - A)$.

(٩) ليكن للمصفوفة A معكوس .

(أ) إذا كانت $A^2 = 0$ فأثبت أن $(I - A)^{-1} = I + A$.

(ب) إذا كانت $A^3 = 0$ فأثبت أن $(I - A)^{-1} = I + A + A^2$.

(ج) هل تستطيع تعميم الفقرتين (أ) و (ب) ؟

(١٠) إذا كانت كل من A و B مصفوفة من الدرجة n وكانت $AB = BA$ فأثبت أن $(AB)^2 = A^2 B^2$.

(١٠) إذا كانت كل من A و B مصفوفة من الدرجة n وكانت $AB = BA$ فأثبت أن $(AB)^2 = A^2 B^2$.

(١١) إذا كانت كل من A و B مصفوفة من الدرجة n ولكل منهما معكوس وكان $(AB)^2 = A^2 B^2$ فأثبت أن $AB = BA$.

(١٢) لتكن كل من A و B مصفوفة من الدرجة n ولكل منهما معكوس.

(أ) أثبت أن $A^{-1} + B^{-1} = A^{-1} (A + B) B^{-1}$.

(ب) إذا كان للمصفوفة $A + B$ معكوس أيضًا فأثبت أنه يوجد معكوس للمصفوفة $A^{-1} + B^{-1}$ وأن $(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = B (A + B)^{-1} A$.

(١٣) لتكن كل من A و B مصفوفة من الدرجة n .

(أ) أثبت أن $A (I + BA) = (I + AB) A$.

(ب) أثبت أن $(I + BA) B = B (I + AB)$.

(ج) إذا كان للمصفوفة $I + AB$ معكوس ، فأثبت أنه يوجد معكوس للمصفوفة $I + BA$ وأن $(I + BA)^{-1} = I - B (I + AB)^{-1} A$.

(١٤) عين ثماني مصفوفات من الدرجة 3 بحيث يكون $A^2 = I$.

(١٥) أكتب كلاً من المصفوفات التالية بأبسط صورة ممكنة :

(أ) $A (B + A^{-1}) (B^{-1} A^{-1})$. (ب) $(A + B) (A^{-1} - B^{-1})$.

(١٦) إذا كانت كل من A و B من الدرجة n وكان لكل من A و B و $A + B$ معكوس ، فهل من الضروري أن يكون $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$ ؟

(١٧) حل المعادلة المصفوفية التالية لإيجاد X :

$$A (X + B) A^{-1} = C .$$

(١٨) إذا كان للمصفوفة A معكوس ، فأثبت أن لكل من $A A^T$ و $A^T A$ معكوسًا.

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{31}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

فمثلاً إذا كانت A هي المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

فإن

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 2 & 4 & -1 \end{matrix}$$

ولذا فإن :

$$\det A = 8 + 0 + (-3) - 16 - 0 - 0 = -11$$

تمارين (١ ، ٢)

في التمارين من (١) إلى (٨) أحسب محدد المصفوفة.

(١) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

(٢) $\begin{bmatrix} 3a & a \\ 3b & b \end{bmatrix}$

(٣) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & 4 \end{bmatrix}$

(٤) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

(٥) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

(٦) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

(٧) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

(٨) $\begin{bmatrix} -1 & 4 & 5 & -2 \\ 3 & -12 & 7 & -3 \\ 2 & -8 & 8 & 4 \\ 1 & -4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

(٩) عين k بحيث يكون $\begin{vmatrix} k-1 & 1 \\ 2 & k \end{vmatrix} = 0$.

(١٠) عين k بحيث يكون $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & k & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

(١١) عين k بحيث يكون $\begin{vmatrix} k-4 & 0 & 0 \\ 0 & k & 2 \\ 0 & 3 & k-1 \end{vmatrix} = 0$.

(١٢) عين قيم λ بحيث يكون $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & \lambda & -6 \\ 1 & 3 & \lambda-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix}$.

(١٣) عين $\begin{vmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta-\cos\theta & \sin\theta+\cos\theta & 1 \end{vmatrix}$.

(١٤) لتكن $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix}$.

أثبت أن $AB = BA$ إذا وفقط إذا كان $\begin{vmatrix} b & a-c \\ e & d-f \end{vmatrix} = 0$.

(١٥) إذا كانت $A = 0$ فأثبت أن $\det A = 0$. هل العكس صحيح ؟

(١٦) إذا كانت $A = B$ فأثبت أن $\det A = \det B$. هل العكس صحيح ؟

(١٧) إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ فما هي العلاقة بين det A و det(5A) .

(١٨) إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x^2{}_1 \\ 1 & x_2 & x^2{}_2 \\ 1 & x_3 & x^2{}_3 \end{bmatrix}$ فأثبت أن

$$\det A = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) .$$

(٢ ، ٢) خواص المحددات

Properties of Determinants

في هذا البند نقدم الخواص الأساسية للمحددات ونرى كيفية استخدام هـ الخواص لإيجاد محدد مصفوفة دون اللجوء إلى التعريف، كذلك نقدم علاقة هامة جـ بين قيمة محدد مصفوفة ووجود معكوس لها.

مبرهنة (٢ ، ٢)

إذا كانت A مصفوفة مربعة وتحتوي على صف (أو عمود) صفري فإن $\det A = 0$.

البرهان

عند حساب det A باستخدام الصف (أو العمود) الذي جميع عناصره أصفا فإننا نجد بسهولة أن $\det A = 0$. ♦

تمارين (٢ ، ٢)

في التمارين من (١) إلى (١٠) احسب قيمة المحدد لكل من المصفوفات مستخدماً خواص المحددات

(١) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

(٢) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

(٣) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(٤) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 9 & 6 \\ 2 & 7 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

(٥) $\begin{bmatrix} -2 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

(٦) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

(٧) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 5 \\ 6 & 3 & 5 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(٨) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(٩) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

(١٠) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -4 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

(١١) إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ c & c+1 & c+2 \end{bmatrix}$$ فأثبت أن $\det A = 0$.

(١٢) إذا كانت $A = \begin{bmatrix} a & b & 0 & a \\ 0 & a & a & b \\ b & a & a & 0 \\ a & 0 & b & a \end{bmatrix}$ فأثبت أن $\det A = b^2\left(4a^2 - b^2\right)$.

(١٣) إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} a & a & c \\ b & c & a \\ c & b & b \end{bmatrix}$$ فأثبت أن $\det A = (a+b+c)(a-c)(a+b)$.

(١٤) إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 & 1 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \\ a^3 & 1 & a & a^2 \end{bmatrix}$$ فأثبت أن $\det A = (a^4 - 1)^3$.

(١٥) إذا كانت A مصفوفة من الدرجة n فأثبت صحة ما يلي :

(أ) إذا كان للمصفوفة A معكوس فإن $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

(ب) $\det(A^m) = [\det(A)]^m$ لكل عدد صحيح موجب m .

(ج) $\det(cA) = c^n \det(A)$ حيث c عدد ثابت.

(١٦) إذا كانت A مصفوفة مربعة بحيث أن $A^TA = I$ فأثبت أن $\det A = \pm 1$.

(١٧) إذا كان للمصفوفة S معكوس وكان $A = S^{-1}BS$ فأثبت أن $\det A = \det B$.

(١٨) أثبت أن $\det(AB) = \det(BA)$.

(١٩) إذا كانت A مصفوفة من الدرجة 4 بحيث أن $\det A = 3$ فاحسب $\det(5A^2A^T)$

(٢٠) إذا كانت A مصفوفة متماثلة تخالفيًا من الدرجة n فأثبت أن n يجب أن يكون عددًا زوجيًا.

(٢١) إذا كانت كل من المصفوفتين A و B من الدرجة n بحيث أن $\det(A) = 3$ و $\det(B) = -2$ فاحسب $\det(ABA^T B^{-3} A^2 B^T)$.

(٢٢) إذا كان $\det A = 0$ فاحسب $\det(A^3 + 5A^2 + 6A)$.

(٢٣) إذا كانت A مصفوفة مربعة بحيث إن $A^3 = I$ فاحسب قيمة $\det A$.

(٢٤) هل صحيح أن $\det(A + B) = \det A + \det B$ ؟

(٢٥) إذا كان $\det(A^2) = 7$ فأثبت أن للمصفوفة A معكوسًا.

(٣ ، ٢) المصفوفة المرافقة

The Adjoint Matrix

لقد سبق وأن قدمنا طريقة لحساب معكوس مصفوفة (إن وجد) باستخدام العمليات الصفية الأولية. في هذا البند، وكما وعدنا، نقدم طريقة أخرى لإيجاد معكوس المصفوفة بالاستعانة بالمحددات.

إذا كانت $A = [a_{ij}]$ مصفوفة مربعة من الدرجة n فإننا كما وضحنا في المبرهنة (١ ، ٢)، نستطيع إيجاد محدد A بضرب عناصر أي صف (أو أي عمود) بمعاملاتها المرافقة ثم جمع الناتج.

إذا قمنا الآن بضرب عناصر صف (أو عمود) بالمعاملات المرافقة لصف (أو عمود) آخر ثم جمعنا الناتج فإن هذا الناتج يكون دائمًا مساويًا للصفر. وهذا هو مضمون المبرهنة التالية :

$$.\ A\left(\frac{1}{\det A}\operatorname{adj}A\right)=\frac{1}{\det A}A\operatorname{adj}A=\frac{1}{\det A}(\det A)I=I$$

إذن ، $\blacklozenge\ .\ A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}(\operatorname{adj}A)$

وها نحن قد وفينا بوعدنا حيث النتيجة (١٥ ، ٢)، تزودنا بطريقة أخرى لإيجاد معكوس مصفوفة(في حالة وجوده).

مثال (١١ ، ٢)

لتكن A هي المصفوفة الواردة في المثال (٩ ، ٢). عندئذٍ نستطيع أن نحسب محدد A لنجد أن $\det A = 2 \neq 0$. ولذا فإن للمصفوفة A معكوسًا. ولقد وجدنا adjA في المثال (١٠ ، ٢) . إذن ،

$$\square\ .\ A^{-1}=\frac{1}{\det A}(\operatorname{adj}A)=\begin{bmatrix}\frac{-5}{2} & 2 & \frac{-1}{2}\\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

تمارين (٣ ، ٢)

في التمارين من (١) إلى (٦)، احسب كلاً من A(adjA) ، (adjA)A و detA ثم احسب معكوس المصفوفة (إن وجد).

(١) $\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0 & 6 & 3\\ 4 & 7 & 5\end{bmatrix}$

(٢) $\begin{bmatrix}2 & -3 & 1\\ 4 & -2 & 5\\ 1 & -1 & 3\end{bmatrix}$

(٣) $\begin{bmatrix} -1 & 6 & 3 \\ 2 & 0 & 9 \\ 4 & 8 & 7 \end{bmatrix}$

(٤) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(٥) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

(٦) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

(٤ ، ٢) تمارين عامة

Review Exercises

(١) أثبت أن للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ معكوسًا لكل قيم θ ثم أحسب A^{-1}.

(٢) إذا كان $\det A = 1$ وكانت جميع عناصر A أعدادًا صحيحة فأثبت أن جميع عناصر A^{-1} أعداد صحيحة أيضًا.

(٣) إذا كان للمصفوفة A معكوس فأثبت أن للمصفوفة $\operatorname{adj}A$ معكوساً كذلك وأن $(\operatorname{adj}A)^{-1} = \frac{1}{\det A} A = \operatorname{adj}(A^{-1})$.

(٤) إذا كانت A مصفوفة من الدرجة n ولها معكوس فأثبت أن $\det[\operatorname{adj}A] = [\det A]^{n-1}$.

(٥) أثبت بدون فك المحدد أن

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\delta) \end{vmatrix} = 0 .$$

(٦) إذا كانت كل من A و B مصفوفة من الدرجة n وكان للمصفوفة B معكوس فأثبت أن $(B^{-1}AB)^m = B^{-1}A^mB$ لكل عدد صحيح موجب m .

(٧) لتكن A هي المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 0 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ولتكن $B = A - \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3}A^3 - \frac{1}{4}A^4 + \ldots$.

(أ) أحسب B . (ب) أثبت أن $A = B + \frac{1}{2!}B^2 + \frac{1}{3!}B^3 + \ldots$.

(٨) لنفرض أن كلاً من A و B مصفوفة من الدرجة n حيث A متماثلة و B متماثلة تخالفيًا. بيّن أياً من المصفوفات التالية متماثلة وأيها متماثلة تخالفيًا :

$$AB + BA , AB - BA , A^2 , B^2 , A^m B^k A^m .$$

(٩) لتكن كل من X و Y مصفوفة من الدرجة $n \times 1$ ولتكن $A = XY^T - YX^T$.

(أ) أثبت أن A متماثلة تخالفيًا. (ب) أثبت أن $X^TY = Y^TX$.

(ج) إذا كانت $X^TX = Y^TY = [1]$ وكان $X^TY = Y^TX = [k]$ فأثبت أن : $A^3 = (k^2 - 1)A$.

(١٠) عين قيم x التي تجعل للمصفوفة A معكوسًا حيث

$$A = \begin{bmatrix} x & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(١١) ليكن لدينا المصفوفتان

$$A = \begin{bmatrix} b+8c & 2c-2b & 4b-4c \\ 4c-4a & c+8b & 2a-2c \\ 2b-2a & 4a-4b & a+8b \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

احسب كلاً من :

(أ) B^{-1} (ب) $B^{-1}AB$ (ج) $\det A$

(١٢) أثبت أن :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & x & b & c \\ a^2 & x^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & x^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (x-a)(x-b)(x-c)(a-c)(c-a) .$$

(١٣) حل المعادلة

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = 0 .$$

(١٤) إذا كانت كل من A و B مصفوفة من الدرجة n فأثبت أن :

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \det(A+B)\ \det(A-B) .$$

(١٥) إذا كان للمصفوفة A معكوس وكان $\det(AB^T) = -2$ وكان ،

$(3A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ فعين A ثم احسب $\det(B)$.

(١٦) لتكن :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

احسب المصفوفة $A^2 - 4A + 4I$ واستخدم ذلك لإيجاد A^{-1} (إن أمكن).

(١٧) إذا كانت $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ فأثبت أن : $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + \det A$.

(١٨) إذا كانت كل من A و B مصفوفة من الدرجة n حيث

$\det(B) = -\det(A) = -2$ فاحسب $\det(A^2 B^{-1} A^T B^3)$.

(١٩) إذا كانت A مصفوفة من الدرجة 3 وكان $\det(A) = 2$ فاحسب كلاً من :

$\det(A^T A^{-1})$, $\det(2A)^{-1}$ و $\det(2A^{-1})$.

(٢٠) إذا كان $A^3 - 6A^2 + 11A - 6I = 0$ وكان للمصفوفة A معكوس فعين A^{-1} بدلالة A .

(٢١) إذا كان للمصفوفة A معكوس ولم يكن للمصفوفة B معكوس فبين فيما إذا كان للمصفوفة $C = \begin{bmatrix} |A| & |B| \\ -1 & |A^{-1}| \end{bmatrix}$ معكوس. وإذا كان كذلك فعين C^{-1} .

(٢٢) إذا كانت A,B,C ثلاث مصفوفات ولم يكن للمصفوفة A معكوس فاحسب :

$\det(AB + A^2C)$.

مثال (١٤ ، ٣)

ما هي القيود التي يجب وضعها على b_1, b_2, b_3 لكي يكون النظام التالي متسقًا :

$$x_1 - 2x_2 + 5x_3 = b_1$$
$$4x_1 - 5x_2 + 8x_3 = b_2$$
$$-3x_1 + 3x_2 - 3x_3 = b_3$$

الحل

باستخدام طريقة جاوس لوضع المصفوفة الموسعة على الصيغة الدرجية الصفية نجد أن :

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & b_1 \\ 4 & -5 & 8 & b_2 \\ -3 & 3 & -3 & b_3 \end{array}\right] \xrightarrow[3R_{13}]{-4R_{12}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & b_1 \\ 0 & 3 & -12 & b_2 - 4b_1 \\ 0 & -3 & 12 & b_3 + 3b_1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & b_1 \\ 0 & 1 & -4 & \frac{b_2 - 4b_1}{3} \\ 0 & -3 & 12 & b_3 + 3b_1 \end{array}\right] \xrightarrow{3R_{23}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & b_1 \\ 0 & 1 & -4 & \frac{b_2 - 4b_1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & b_3 + b_2 - b_1 \end{array}\right]$$

لذلك لكي يكون النظام المعطى متسقاً فإنه يجب أن يكون $b_3 + b_1 - b_2 = 0$. أي أن $b_3 = b_1 - b_2$. وبالتالي فإن $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \frac{1}{3}(b_2 - 4b_1) \\ b_1 - b_2 \end{bmatrix}$. □

تمارين (١ ، ٣)

في التمارين من (١) إلى (١٥) عين جميع حلول أنظمة المعادلات الخطية مستخدمًا طريقة جاوس ثم طريقة جاوس – جوردان .

(١)
$$x + y = 1$$
$$x - y = 0$$

(٢)
$$x + 2y = 2$$
$$x - 4y = -1$$

(٣)
$$3x + 7y - 3z = 2$$
$$2x + 5y + z = -4$$
$$2x + 6y + 10z = 3$$

(٤)
$$3x + 7y - 3z = 2$$
$$2x + 5y + z = -4$$
$$2x + 6y + 10z = -20$$

(٥)
$$x + y + z = 4$$
$$2x + 5y - 2z = 3$$
$$x + 7y - 7z = 5$$

(٦)
$$x - 2y - z = 1$$
$$x + y + z = 2$$
$$x + 2y + 2z = 2$$

(٧)
$$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -1$$
$$2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -2$$
$$-x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 1$$
$$3x_1 - 3x_4 = -3$$

(٨)
$$x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 1$$
$$x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 2$$
$$x_1 - 12x_2 - 11x_3 - 16x_4 = 5$$
$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 6$$

(٩)
$$2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 2$$
$$x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0$$
$$2x_2 + x_3 - 4x_4 = 1$$

(١٠)
$$x + y = 0$$
$$2x - y = 1$$
$$x + 2y = -1$$

(١١)
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 1$$

(١٢)
$$2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1$$
$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 2$$

(١٣)
$$3x - 2y = 4$$
$$5x + y = 1$$
$$9x + 7y = -5$$

(١٤)
$$x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 - x_3 = 2$$
$$-2x_1 - x_2 = 3$$

(١٥)
$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 0$$
$$2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 = -1$$
$$5x_3 + 10x_4 + 15x_6 = 5$$
$$2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 = 6$$

(١٦) عين قيم كلاً من a ، b و c بحيث يكون النظام التالي متسقًا :

$$x - 2y + 5z = a$$
$$4x - 5y + 8z = b$$
$$-3x + 3y - 3z = c$$

(١٧) عين قيم كلاً من a و b التي من اجلها يكون للنظام التالي حل وحيد، عدد لا نهائي من الحلول، لا يوجد له حل.

$$x + by = -1$$
$$ax + 2y = 5$$

(١٨) حل النظام التالي :

$$x^2 + xy - y^2 = 1$$
$$2x - xy + 3y^2 = 13$$
$$x^2 + 3xy + 2y^2 = 0$$

(١٩) عين جميع قيم a التي من اجلها يكون للنظام التالي حل وحيد، عدد لا نهائي من الحلول، لا يوجد له حل.

$$x + y + z = 4$$
$$z = 2$$
$$(a^2 - 4)z = a - 2$$

(٢٠) عين جميع قيم a و b التي من اجلها يكون للنظام التالي حل وحيد ، عدد لا نهائي من الحلول، لا يوجد له حل.

$$ax + bz = 2$$
$$ax + ay + 4z = 4$$
$$ay + 2z = b$$

(٢١) حل النظام التالي :

$$xy - 2\sqrt{y} + 3zy = 8$$
$$2xy - 3\sqrt{y} + 2zy = 7$$
$$-xy + \sqrt{y} + 2zy = 4$$

(٢٢) عين قيم كل من a ، b و c التي من اجلها يكون للنظام التالي الحل الوحيد $(1, -1, 2)$:

$$ax + by - 3z = -3$$
$$-2x - by + cz = -1$$
$$ax + 3y - cz = -3$$

(٢٣) عين قيم a التي تجعل النظام التالي متسقًا، ثم حل النظام :

$$x_1 + x_2 + x_4 = 4$$
$$2x_1 - 4x_4 = 7$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 5$$
$$x_1 - 3x_2 - x_3 - 10x_4 = a$$

(٢٤) إذا كانت كل من a ، b ، c و d أعداداً حقيقية موجبة فأثبت أن النظام التالي غير متسق :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a$$
$$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = b$$
$$-x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = c$$
$$-3x_1 + x_2 - 3x_3 - 7x_4 = d$$

(٢٥) ليكن لدينا نظام المعادلات التالي :

$$2x_1 + x_2 + x_3 = -6\beta$$
$$\gamma x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2\beta$$
$$2x_1 + x_2 + (\gamma + 1)x_3 = 4$$

(أ) إذا كانت $\gamma \neq 0$ و $\gamma \neq 6$ فأثبت أن للنظام حلاً وحيداً .

(ب) إذا كانت $\gamma = 0$ فأثبت أنه يوجد قيمة وحيدة β بحيث يكون النظام متسقًا ثم عين حل النظام في هذه الحالة.

(ج) ناقش الحالة $\gamma = 6$.

(٢٦) أثبت أن النظام التالي :

$$x_1 - x_2 - x_4 - 5x_5 = \alpha$$
$$2x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 + x_5 = \beta$$
$$x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 - 6x_5 = \gamma$$
$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 8x_4 - 5x_5 = \delta$$

متسق إذا فقط إذا كان $8\alpha - \beta - 11\gamma + 5\delta = 0$.

عين حل النظام عندما يكون $\alpha = \beta = -1$, $\gamma = 3$, $\delta = 8$.

(٢٧) ما هي القيود التي يجب وضعها على كلٍ من b_1 ، b_2 و b_3 لكي يكون كل من النظامين التاليين متسقًا :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= b_1 \\ x_1 + x_3 &= b_2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= b_3 \end{aligned} \qquad (\text{أ})$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= b_1 \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 &= b_2 \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= b_3 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 &= b_4 \end{aligned} \qquad (\text{ب})$$

(٢ ، ٣) أنظمة المعادلات الخطية المتجانسة

Homogeneous Systems of Linear Equations

ليكن لدينا نظام المعادلات $AX = B$ حيث A مصفوفة من الدرجة $m \times n$ ، X مصفوفة من الدرجة $n \times 1$ ، B مصفوفة من الدرجة $m \times 1$. إذا كانت $B = 0$ فإننا نحصل على النظام $AX = 0$ ونقول إنه نظام متجانس (homogeneous system).

أما إذا كانت $B = 0$ فإننا نقول أنه نظام غير متجانس (nonhomogeneous).

من الواضح أن النظام المتجانس متسق وذلك لأن $(0, 0, \ldots, 0)$ حل لهذا النظام. يسمى هذا الحل بالحل التافه (trivial solution). ولذا فإنه إذا وجد حل غير تافه للنظام المتجانس فإنه باستخدام المبرهنة (١ ، ٣) نخلص إلى أنه يجب أن يكون له عدد لا نهائي من الحلول وفي الحقيقة نستطيع أن نبرهن :

مبرهنة (٤ ، ٣)

إذا كان كل من X, Y حلاً للنظام المتجانس $AX = 0$ وكان $k \in \mathbb{R}$ فإن :

الحل

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 22 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1(1-0)+1(2-1)+2(0-1) = 1 \neq 0$$

ولذا فإن للمصفوفة A معكوسًا. وبالتالي فإن للنظام الحل التافه فقط . □

تمارين (٢ ، ٣)

في التمارين من (١) إلى (٤) عين قيمة a التي تجعل للنظام عدداً غير منته من الحلول ثم عين جميع الحلول.

(١)
$$\begin{aligned} x-2y+z&=0 \\ x+ay-3z&=0 \\ -x+6y-5z&=0 \end{aligned}$$

(٢)
$$\begin{aligned} x+y-z&=0 \\ ay-z&=0 \\ x+y+az&=0 \end{aligned}$$

(٣)
$$\begin{aligned} x+2y+z&=0 \\ x+3y+6z&=0 \\ 2x+3y+az&=0 \end{aligned}$$

(٤)
$$\begin{aligned} ax+y+z&=0 \\ x+y-z&=0 \\ x+y+az&=0 \end{aligned}$$

في التمارين من (٥) إلى (١٠) أكتب الحل العام كتركيب خطي لحلول معينة.

(٥)
$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=0 \\ -2x_1-3x_2&=0 \\ x_1+2x_2-x_3&=0 \end{aligned}$$

(٦)
$$\begin{aligned} x_1+2x_2-3x_3&=0 \\ 2x_1+x_2+3x_3&=0 \\ x_1+5x_2-12x_3&=0 \end{aligned}$$

(٧)
$$x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 0$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 0$$
$$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 + 7x_5 = 0$$

(٨)
$$x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 + 3x_5 = 0$$
$$-2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 4x_5 = 0$$
$$-x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 7x_5 = 0$$
$$-3x_1 + 5x_2 - 6x_3 + 2x_4 + 11x_5 = 0$$

(٩)
$$x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 0$$
$$-x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0$$
$$3x_1 + x_3 + 7x_4 + 3x_5 = 0$$

(١٠)
$$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0$$
$$4x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0$$
$$3x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0$$
$$6x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 0$$

(١١) أثبت أن للنظام التالي حلاً واحداً فقط هو الحل التافه

$$x + y = 0$$
$$x - y = 0$$
$$2x + 3y = 0$$

(٣ ، ٣) قاعدة كرامر

Cramer's Rule

في هذا البند نستخدم المبرهنة (١٤ ، ٢) لتقديم طريقة أخرى ، تعرف بقاعدة

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1 & -2\\ 3 & -1 & -2 & 1\end{bmatrix}\quad,\quad B=\begin{bmatrix}6\\ -1\\ 5\\ -2\end{bmatrix}\quad,\quad X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}$$

وبحساب محدد A نجد أن $\det A=-32$. كذلك نجد أن :

$$A_1=\begin{bmatrix}6 & -1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 0 & 1\\ 5 & 2 & 1 & -2\\ -2 & -1 & -2 & 1\end{bmatrix}\quad,\quad A_2=\begin{bmatrix}1 & 6 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 0 & 1\\ 1 & 5 & 1 & -2\\ 3 & -2 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

$$A_3=\begin{bmatrix}1 & -1 & 6 & -1\\ 2 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 5 & -2\\ 3 & -1 & -2 & 1\end{bmatrix}\quad,\quad A_4=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 6\\ 2 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 1 & 5\\ 3 & -1 & -2 & -2\end{bmatrix}$$

وبحساب المحددات نجد أن :

$$\det A_1=-32\ ,\ \det A_2=32\ ,\ \det A_3=-64\ ,\ \det A_4=64$$

وعليه فإن :

$$x_1=\frac{\det A_1}{\det A}=1\quad,\quad x_2=\frac{\det A_2}{\det A}=-1$$

$$x_3=\frac{\det A_3}{\det A}=2\quad,\quad x_4=\frac{\det A_4}{\det A}=-2\quad\square.$$

تمارين (٣ ، ٣)

(١) استخدم قاعدة كرامر لحل كلٍ من النظامين :

(أ) $2x+3y=7$ $\quad$ $8x+y=-2$

(ب) $8x-6y=-4$ $\quad$ $3x+2y=6$

(٢) استخدم قاعدة كرامر لحل النظام :

$$2x-6y+z=2$$
$$y+z=1$$
$$x-y-z=0$$

(٣) حل نظام المعادلات :

$$x-3y-z=-7$$
$$x-y-z=-2$$
$$x-6y-2z=-3$$

(أ) باستخدام قاعدة كرامر.

(ب) باستخدام طريقة جاوس.

(ج) باستخدام معكوس مصفوفة المعاملات.

(٤) استخدم قاعدة كرامر لحل النظام :

$$x_1+x_2+x_3=a$$
$$x_1+(1+a)x_2+x_3=2a$$
$$x_1+x_2+(1+a)x_3=0$$

(٥) استخدم قاعدة كرامر لإيجاد قيمة كل من y و z للنظام :

$$6x-y+3z=-3$$
$$9x+5y-2z=7$$
$$5x+y-8z=-2$$

(٦) استخدم قاعدة كرامر لإيجاد قيمة x التي تحقق النظام :

$$5x + y - z = 4$$

$$9x + y - z = 1$$

$$x - y + 5z = 2$$

(٧) استخدم كلاً من قاعدة كرامر وطريقة جاوس – جوردان لحل النظام :

$$4x - y + 3z = 1$$

$$6x + 2y - z = 0$$

$$3x + 3y + 2z = -1$$

(٨) استخدم قاعدة كرامر لإيجاد قيمة x_3 التي تحقق النظام :

$$x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_4 = 32$$

$$2x_1 - x_2 + 7x_3 + 9x_4 = 14$$

$$-x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 11$$

$$-x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 4$$

(٩) استخدم كلاً من قاعدة كرامر وطريقة جاوس لحل النظام :

$$4x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$$

$$-3x_1 - 7x_2 + x_3 - x_4 = -1$$

$$7x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 8x_4 = -3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3$$

(١٠) استخدم قاعدة كرامر لإيجاد قيمة كل من x_1 و y_1 بدلالة x و y للنظام :

$$x = x_1 \cos\theta - y_1 \sin\theta$$

$$y = x_1 \sin\theta + y_1 \cos\theta$$

(١١) هل تستطيع استخدام قاعدة كرامر لحل النظام :

$$2x + 3y + z = 9$$

$$x + 2y + 3z = 6$$

$$x + y - 2z = 3$$

ولماذا ؟ هل يوجد حل للنظام ؟

(١٢) عين قيم a التي تجعل للنظام حلاً وحيداً ثم استخدم قاعدة كرامر لحل النظام :

(أ) $3ax - 2y = 4$

$-6x + ay = 1$

(ب) $6ax + 4y = 5$

$9x + 2ay = -2$

$(\alpha f)'' + \alpha f = \alpha f'' + \alpha f = \alpha (f'' + f) = \alpha . 0 = 0$. أي أن $\alpha f \in \mathbf{W}$. □

مثال (٢١ ، ٤)

المجموعة الجزئية $\mathbf{W} = \{(x , x+1) : x \in \mathbb{R}\}$ ليست فضاءً جزئياً من $\mathbb{R}^2$ وذلك لأن $(0,0) \notin \mathbf{W}$. □

مثال (٢٢ ، ٤)

المجموعة الجزئية $\mathbf{W} = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 :$ a_0 عدد صحيح $\}$ ليست فضاءً جزئياً من $\mathbf{P}_2$ وذلك لأنه ، على سبيل المثال ، $2 + 3x + \frac{1}{3}x^2 \in \mathbf{W}$ و $\frac{1}{3} \in \mathbb{R}$ ولكن $\frac{1}{3}(2 + 3x + \frac{1}{3}x^2) = \frac{2}{3} + x + \frac{1}{9}x^2 \notin \mathbf{W}$. □

مثال (٢٣ ، ٤)

المجموعة الجزئية $\mathbf{W} = \{(a , b) \in \mathbb{R}^2 : a = b = 0$ أو $a \neq 0, b \neq 0\}$ ليست فضاءً جزئياً من $\mathbb{R}^2$ لأنه ، على سبيل المثال ، $(2,3), (-2 , 5) \in \mathbf{W}$ ولكن $(2,3) + (-2,5) = (0,8) \notin \mathbf{W}$. □

تمارين (٢، ٤)

في التمارين من (١) إلى (٣٠) بين أياً من المجموعات الجزئية هي فضاء جزئي من فضاء المتجهات المعطى :

(١) $\mathbf{W} = \{(a , b, a - 2b) : a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

(٢) $\mathbf{W} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} : a , b , c \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbf{M}_{22}$.

(٣) $\mathbf{W} = \{ A \in \mathbf{M}_{22} : \det A = 0\} \subseteq \mathbf{M}_{22}$.

(٤) $\mathbf{W}=\{A\in \mathbf{M}_{22}: A^2=A\}\subseteq \mathbf{M}_{22}$.

(٥) $\mathbf{W}=\{a_0+a_1x+a_2x^2\in \mathbf{P}_2: a_0+a_1+a_2=0\}\subseteq \mathbf{P}_2$.

(٦) $\mathbf{W}=\{f\in \mathbf{F}[0,2]: f(1)=0\}\subseteq \mathbf{F}[0,2]$.

(٧) $\mathbf{W}=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2: 2x+3y=0\}\subseteq \mathbb{R}^2$.

(٨) $\mathbf{W}=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2: x+y=1\}\subseteq \mathbb{R}^2$.

(٩) $\mathbf{W}=\{a_0+a_1x+a_2x^2\in \mathbf{P}_2: a_1=1, a_0=a_2\}\subseteq \mathbf{P}_2$.

(١٠) $\mathbf{W}=\{(a,b,c)\in \mathbb{R}^3: a+b=c=0\}\subseteq \mathbb{R}^3$.

(١١) $\mathbf{W}=\{(a,b,c)\in \mathbb{R}^3: a-b-c=0\}\subseteq \mathbb{R}^3$

(١٢) $\mathbf{W}=\{(a,b,c)\in \mathbb{R}^3: a+b=1, c=0\}\subseteq \mathbb{R}^3$

(١٣) $\mathbf{W}=\{(a,b,c)\in \mathbb{R}^3: ab=0\}\subseteq \mathbb{R}^3$.

(١٤) $\mathbf{W}=\left\{\begin{bmatrix}3 & a & 3\\ a & b & a\end{bmatrix}: a,b,\in \mathbb{R}\right\}\subseteq \mathbf{M}_{23}$.

(١٥) $\mathbf{W}=\{f\in \mathbf{F}[0,1]: f(0)=f(1)\}\subseteq \mathbf{F}[0,1]$.

(١٦) $\mathbf{W}=\{f: f(0)=1\}\subseteq \mathbf{F}[0,1]$.

(١٧) $\mathbf{W}=\{A\in \mathbf{M}_{22}: A=-A^T\}\subseteq \mathbf{M}_{22}$.

(١٨) $\mathbf{W}=\{X\in \mathbf{M}_{22}: AX=XA\}\subseteq M_{22}$ حيث $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.

(١٩) $\mathbf{W}=\{xp(x): p(x)\in \mathbf{P}_2\}\subseteq \mathbf{P}_3$.

(٢٠) $\mathbf{W}=\{xp(x)+(1-x)q(x): p(x), q(x)\in \mathbf{P}_2\}\subseteq \mathbf{P}_3$.

(٢١) $\mathbf{W}=\{A\in \mathbf{M}_{22}: A=A^T\}\subseteq \mathbf{M}_{22}$.

(٢٢) $\mathbf{W}=\{A\in \mathbf{M}_{22}: AB=0\}\in \mathbf{M}_{22}$ حيث B مصفوفة من الدرجة 2 .

(٢٣) $\mathbf{W}=\{A\in \mathbf{M}_{22}: BAC=CAB\}\in \mathbf{M}_{22}$. حيث B و C مصفوفتان من الدرجة 2 .

(٢٤) $\mathbf{W}=\{f\in \mathbf{F}[0,1]: f(x)=f(y)\ \forall x,y\in[0,1]\}\subseteq \mathbf{F}[0,1]$.

(٢٥) $\mathbf{W}=\left\{f\in\mathbf{F}[0,1]:\int_0^1 f(x)\,dx=0\right\}\subseteq\mathbf{F}[0,1]$.

(٢٦) $\mathbf{W}=\{(a,b,c,d):a^2+b^2=0\}\subseteq\mathbb{R}^4$.

(٢٧) $\mathbf{W}=\{(a+2b,a,2a-b,b):a,b\in\mathbb{R}\}\subseteq\mathbb{R}^4$.

(٢٨) $\mathbf{W}=\{(a,b,c,d):a,b,c,d\in\mathbb{Z}\}\subseteq\mathbb{R}^4$.

(٢٩) $\mathbf{W}=\{A\in\mathbf{M}_{33}:$ مثلية علوية $A\}\subseteq\mathbf{M}_{33}$.

(٣٠) $\mathbf{W}=\{A\in\mathbf{M}_{nn}:tr(A)=0\}\subseteq\mathbf{M}_{nn}$.

(٣١) إذا كان كل من $\mathbf{W}$ و $\mathbf{U}$ فضاء جزئياً من $\mathbf{V}$ فأثبت أن $\mathbf{U}\cap\mathbf{W}$ فضاء جزئي من $\mathbf{V}$.

(٣٢) ليكن $\mathbf{V}$ فضاء متجهات وكل من $\mathbf{W}$ و $\mathbf{U}$ فضاء جزئيا من $\mathbf{V}$.

(أ) بين أن $\mathbf{U}\cup\mathbf{W}$ قد لا يكون فضاء جزئياً من $\mathbf{V}$.

(ب) أثبت أن $\mathbf{U}\cup\mathbf{W}$ فضاء جزئي من $\mathbf{V}$ إذا وفقط إذا كان $\mathbf{U}\subseteq\mathbf{W}$ أو $\mathbf{W}\subseteq\mathbf{U}$.

(٣٣) ليكن كل من $\mathbf{W}$ و $\mathbf{U}$ فضاء جزئياً من $\mathbf{V}$.

(أ) أثبت أن $\mathbf{U}+\mathbf{W}=\{\mathbf{u}+\mathbf{w}:\mathbf{u}\in\mathbf{U},\mathbf{w}\in\mathbf{W}\}$ فضاء جزئي من $\mathbf{V}$.

(ب) إذا كان $\mathbf{W}_1\leq\mathbf{V}$ حيث $\mathbf{U}\subseteq\mathbf{W}_1,\mathbf{W}\subseteq\mathbf{W}_1$ فأثبت أن $\mathbf{U}+\mathbf{W}\subseteq\mathbf{W}_1$.

(٣٤) ليكن $\mathbf{V}$ فضاء متجهات يحتوي على أكثر من متجهين وليكن $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\in\mathbf{V}$ حيث لا يوجد $\alpha\in\mathbb{R}$ بحيث يكون $\mathbf{v}_1=\alpha\,\mathbf{v}_2$. أثبت أن $\mathbf{W}=\{\mathbf{v}_1+k\mathbf{v}_2:k\in\mathbb{R}\}$ فضاء جزئي من $\mathbf{V}$ ومن ثم استنتج أن $\mathbf{V}$ يحتوي على عدد غير منته من الفضاءات الجزئية.

مثال (٣٤ ، ٤)

إذا كانت $S=\{(-1,0,1),(1,-1,0)\}\subseteq \mathbb{R}^3$ فإنه من الواضح أن

$\alpha_1(-1,0,1)+\alpha_2(1,-1,0)=(\alpha_1-\alpha_2,-\alpha_1,\alpha_2)$. ولذا فإن :

$\langle S\rangle=\{(\alpha_1-\alpha_2,-\alpha_1,\alpha_2):\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}\}$. □

المثال التالي يوضح كيفية إيجاد مولدات فضاء جزئي معلوم .

مثال (٣٥ ، ٤)

عين المتجهات المولدة للفضاء الجزئي $\mathbf{W}$ من $\mathbb{R}^3$ حيث

$\mathbf{W}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y+z=0\}$.

الحل

بما أن $x+y+z=0$ فإن $z=-x-y$. ولذا إذا كان $(x,y,z)\in\mathbf{W}$ فإن

$$(x,y,z)=(x,y,-x-y)=(x,0,-x)+(0,y,-y)$$
$$=x(1,0,-1)+y(0,1,-1)$$

وعليه فإن $S=\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$ تولد $\mathbf{W}$. □

مثال (٣٦ ، ٤)

بما أن $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ لأي $p(x)\in\mathbf{P}_n$ فإننا نجد أن

$\mathbf{P}_n=\langle 1,x,x^2,\ldots,x^n\rangle$. □

تمارين (٣ ، ٤)

(١) أكتب $(1,-7,5)$ كتركيب خطي للمتجهات $(1,-1,1)$، $(1,0,1)$ و $(1,1,0)$.

(٢) أكتب $(-9,-7,-15)$ كتركيب خطي للمتجهات $(2,1,4)$ ، $(1,-1,3)$ و $(3,2,5)$.

(٣) أكتب $(0,0,0)$ كتركيب خطي للمتجهات $(2,1,4)$ ، $(1,-1,3)$ و $(3,2,5)$.

(٤) أكتب $(2,3,-7,3)$ كتركيب خطي للمتجهات $(2,1,0,3)$ ، $(3,-1,5,2)$ و $(-1,0,2,1)$.

(٥) أكتب x^2+1 كتركيب خطي للمتجهين $-x+1$ و $3x^2+x+2$.

(٦) أكتب $2x^2-3x+1$ كتركيب خطي للمتجهات $x+1$ ، x^2+x و x^2+2 .

(٧) أكتب $9x^2+8x+7$ كتركيب خطي للمتجهات $4x^2+x+2$ ، $3x^2-x+1$ و $5x^2+2x+3$.

(٨) أكتب $A=\begin{bmatrix} 7 & 19 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$ كتركيب خطي للمصفوفات $A_1=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ، $A_2=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ و $A_3=\begin{bmatrix} 0 & 10 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$.

(٩) أكتب $A=\begin{bmatrix} 6 & -8 \\ -1 & -8 \end{bmatrix}$ كتركيب خطي للمصفوفات $A_1=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ ، $A_2=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ و $A_3=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

(١٠) إذا كانت $S=\{\mathbf{v}_1=(1,2,8),\mathbf{v}_2=(3,0,1)\}\subseteq\mathbb{R}^3$ فهل $\mathbf{w}=(-1,4,15)\in\langle S\rangle$ ؟

(١١) إذا كانت $S=\{\mathbf{v}_1=(1,2,3),\mathbf{v}_2=(3,1,2),\mathbf{v}_3=(4,1,0)\}\subseteq\mathbb{R}^3$ فهل $\mathbf{w}=(4,5,10)\in\langle S\rangle$ ؟

(١٢) إذا كانت

$$S=\{\mathbf{v}_1=(2,1,0,3),\mathbf{v}_2=(3,-1,5,2),\mathbf{v}_3=(-1,0,2,1)\}\subseteq\mathbb{R}^4$$

فبين أياً من المتجهات التالية ينتمي إلى $\langle S\rangle$:

(أ) $\mathbf{w}_1=(-4,6,-13,4)$ (ب) $\mathbf{w}_2=(1,1,1,1)$.

(١٣) إذا كانت

$$S=\{p_1(x)=x^2+x+1, p_2(x)=3x^2+2x-2, p_3(x)=6x^2+5x+1\}\subseteq \mathbf{P}_2$$

فهل $p(x)=6x^2+4x\in\langle S\rangle$ ؟

(١٤) إذا كانت

$$S=\{p_1(x)=4x^2+x+2, p_2(x)=3x^2-x+1, p_3(x)=5x^2+2x+3\}\subseteq \mathbf{P}_2$$

فهل $p(x)=6x^2+11x+6\in\langle S\rangle$ ؟

(١٥) إذا كانت $S=\{f(x)=\cos^2 x, g(x)=\sin^2 x\}\subseteq \mathbf{F}[a,b]$ فبين أياً من المتجهات التالية ينتمي إلى $\langle S\rangle$:

(أ) $\cos 2x$ (ب) x^2+3 (جـ) 1 (د) $\sin x$.

(١٦) إذا كانت $S=\left\{A_1=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}, A_2=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right\}\subseteq \mathbf{M}_{22}$

فهل $A=\begin{bmatrix}0 & 5\\ -4 & -1\end{bmatrix}\in\langle S\rangle$ ؟

(١٧) بين أياً من المجموعات الجزئية التالية من $\mathbb{R}^3$ تولد $\mathbb{R}^3$.

(أ) $S_1=\{(2,0,2),(3,1,1),(-3,5,5)\}$.

(ب) $S_2=\{(1,5,1),(2,6,1),(3,3,0),(4,6,2)\}$.

(جـ) $S_3=\{(3,1,4),(3,4,1),(4,3,1),(3,3,1)\}$.

(١٨) بين أياً من المجموعات الجزئية التالية من $\mathbf{P}_2$ تولد $\mathbf{P}_2$:

(أ) $S_1=\{-x^2+1, x^2+1, 6x^2+5x+2\}$.

(ب) $S_2=\{-8x^2+15x+3, -5x^2+3x, 3x^2+5x+2, -x^2+4x+1\}$.

(جـ) $S_3=\{3x, x+1, 2x^2+1$.

(١٩) بين أياً من المجموعات الجزئية التالية من $\mathbf{M}_{22}$ تولد $\mathbf{M}_{22}$:

(أ) $S_1=\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}$.

(ب) $S_2=\left\{\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2 & 3\\ -4 & -1\end{bmatrix}\right\}$.

(٢٠) لتكن $S=\{v_1=(1,2,1), v_2=(2,1,1), v_3=(3,3,2)\}\subseteq \mathbb{R}^3$.

(أ) هل $(1,0,0)\in\langle S\rangle$ ؟ (ب) هل $(-1,1,0)\in\langle S\rangle$ ؟

(جـ) هل $\langle S\rangle=\mathbb{R}^3$ ؟

(٢١) لتكن $\mathbf{u}_1=(1,0,1)$ ، $\mathbf{u}_2=(-1,-1,0)$ ، $\mathbf{v}_1=(1,2,0)$

و $\mathbf{v}_2=(0,0,1)$.

(أ) عين قيم α_1 ، α_2 ، β_1 و β_2 بحيث يكون $\alpha_1\mathbf{u}_1+\alpha_2\mathbf{u}_2=\beta_1\mathbf{v}_1+\beta_2\mathbf{v}_2$.

(ب) أثبت أن $\langle\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\}\rangle\neq\langle\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\}\rangle$.

(٢٢) لتكن $p_1(x)=-x^2+x+1$, $p_2(x)=-x+2\in\mathbf{P}_2$.

(أ) أثبت أن $p_3(x)=-3x^2+x+4\notin\langle\{p_1(x),p_2(x)\}\rangle$.

(ب) أثبت أن $\langle\{p_1(x),p_2(x),p_3(x)\}\rangle=\mathbf{P}_2$.

(٢٣) لتكن $p_1(x)=x+1$ ، $p_2(x)=-x^2+2$ ، $p_3(x)=x^2+2x+5$

و $p_4(x)=x+2$.

(أ) إذا كان $p(x)\in\langle\{p_1(x),p_2(x)\}\rangle$ فاكتب الصيغة العامة لـ $p(x)$.

(ب) أثبت أن $\alpha_1p_1(x)+\alpha_2p_2(x)\in\langle\{p_3(x),p_4(x)\}\rangle$ إذا وفقط إذا كان

$\alpha_1=3\alpha_2$.

(جـ) جد علاقة بين β_3 و β_4 بحيث يكون :

$\beta_3\,p_3(x)+\beta_4\,p_4(x)\in\langle\{p_1(x),p_2(x)\}\rangle$.

(٢٤) عين مولدات الفضاءات الجزئية التالية :

(أ) $\mathbf{W}=\{(a,b,-a,a+b)\}\leq\mathbb{R}^4$.

(ب) $\mathbf{W}=\{(a,b,c,d):a+b+c=0\}\leq\mathbb{R}^4$.

(جـ) $\mathbf{W}=\{a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0:a_3+a_2+a_1+a_0=0\}\leq\mathbf{P}_3$.

(د) $\mathbf{W}=\left\{\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}:a+b+c+d=0\right\}\leq\mathbf{M}_{22}$.

(٢٥) إذا كانت $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ تولد فضاء المتجهات $\mathbf{V}$ وكان $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ فأثبت أن

$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}\}$ تولد $\mathbf{V}$ أيضاً .

(٢٦) إذا كانت $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ تولد فضاء المتجهات $\mathbf{V}$ فهل من الضروري أن تولد المجموعة $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n$ هذا الفضاء ؟ فسر إجابتك .

(٢٧) لتكن كل من A و B مصفوفة من الدرجة $m \times n$. إذا كان $AX = BX$ لكل $X \in \mathbb{R}^n$ فأثبت أن $A = B$ [إرشاد : استخدم المبرهنة (٥ ، ٤) والمتجهات $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$] .

(٢٨) إذا كانت A مصفوفة من الدرجة $m \times n$ حيث $AX = 0$ لكل $X \in \mathbb{R}^n$ فأثبت أن $A = 0$.

(٢٩) ليكن $\mathbf{V}$ فضاء متجهات و $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$. أثبت أن :

(أ) $\langle\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}\rangle = \langle\{\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}-\mathbf{v}\}\rangle$.

(ب) $\langle\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}\rangle = \langle\{\mathbf{u}-\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{w}, \mathbf{w}\}\rangle$.

(جـ) $\langle\{\mathbf{u}\}\rangle = \langle\{\alpha\ \mathbf{u}\}\rangle$ لكل $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$.

(٤ ، ٤) الارتباط والاستقلال الخطي

Linear Dependence and Linear Independence

لنفرض أن لدينا المجموعتين الجزئيتين $S_1 = \{(1,0), (0,1)\}$ و $S_2 = \{(1,1), (1,-1), (2,4)\}$ من فضاء المتجهات $\mathbb{R}^2$. من الواضح أن كلاً منهما تولد $\mathbb{R}^2$ ، بيد أن S_1 تحتوي على متجهات عددها أقل من متجهات S_2 . هذا من ناحية ، ومن ناحية أخرى ، فإن كل متجه من $\mathbb{R}^2$ يمكن كتابته بطريقة وحيدة كتركيب خطي لمتجهات S_1 بينما الحال ليست كذلك بالنسبة لمتجهات S_2 إذ يمكن كتابة أي متجه من $\mathbb{R}^2$ بأكثر من طريقة كتركيب خطي لمتجهات S_2 ، فمثلاً المتجه $(3, 2)$ يمكن كتابته كتركيب خطي لمتجهات S_2 على النحو التالي :

$(3,2) = (1,1) + (1,-1) + \frac{1}{2}(2,4)$ أو $(3,2) = -\frac{1}{2}(1,1) + \frac{3}{2}(1,-1) + (2,4)$.

عندئذٍ $\alpha_k \mathbf{v}_k = -\alpha_1 \mathbf{v}_1 - \alpha_2 \mathbf{v}_2 - \cdots - \alpha_{k-1}\mathbf{v}_{k-1} - \alpha_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} - \cdots - \alpha_n \mathbf{v}_n$. ولما كان $\alpha_k \neq 0$ فإننا نحصل على :

$$\mathbf{v}_k = -\frac{\alpha_1}{\alpha_k}\mathbf{v}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_k}\mathbf{v}_2 - \cdots - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\mathbf{v}_{k-1} - \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}\mathbf{v}_{k+1} - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_k}\mathbf{v}_n .$$

وهذا يعني أن $\mathbf{v}_k$ تركيب خطي لبقية المتجهات .

ولبرهان العكس نفرض أن :

$$\mathbf{v}_k = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_{k-1}\mathbf{v}_{k-1} + \alpha_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n .$$

بإضافة $-\mathrm{v}_k$ للطرفين نحصل على :

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + (-1)\mathbf{v}_k + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0} .$$

ولما كان معامل $\mathbf{v}_k$ لا يساوي صفراً فإننا نخلص إلى أن S مرتبطة خطياً . ♦

تمارين (٤ ، ٤)

في التمارين من (١) إلى (٢٠) بين ما إذا كانت مجموعة المتجهات في فضاء المتجهات المعطى مستقلة خطياً أم مرتبطة خطياً .

(١) $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$ ، $S = \{(1,-1),(2,0)\}$.

(٢) $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$ ، $S = \{(1,2),(-1,1)\}$.

(٣) $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ ، $S = \{(1,-1,0),(0,-1,2),(2,1,1)\}$. ✓

(٤) $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ ، $S = \{(1,1,2),(1,4,5),(1,2,7),(-1,8,3)\}$.

(٥) $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ ، $S = \{(1,2,3),(1,0,1),(0,1,1)\}$.

(٦) $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$ ، $S = \{(1,1,0,0),(1,0,1,0),(0,0,1,1),(0,1,0,1)\}$.

(٧) $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$ ، $S = \{(0,3,1,-1),(6,0,5,1),(4,7,1,3)\}$.

(٨) $\mathbf{V}=\mathbb{R}^4$ ،

$S=\{(1,1,4,2),(1,2,1,0),(-1,1,1,-1),(1,4,6,1),(1,3,9,3)\}$.

(٩) $\mathbf{V}=\mathbf{P}_2$ ، $S=\{4x^2-x+2,2x^2+6x+3,-4x^2+10x+2\}$.

(١٠) $\mathbf{V}=\mathbf{P}_2$ ، $S=\{x^2,x+1,1-x-x^2,\ x^2+1\}$.

(١١) $\mathbf{V}=\mathbf{P}_2$ ، $S=\{1+x-2x^2,1-x+x^2,2-x^2\}$.

(١٢) $\mathbf{V}=\mathbf{M}_{22}$ ، $S=\left\{\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$.

(١٣) $\mathbf{V}=\mathbf{M}_{22}$ ، $S=\left\{\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&-1\\-1&0\end{bmatrix}\right\}$.

(١٤) $\mathbf{V}=\mathbf{M}_{22}$ ، $S=\left\{\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}\right\}$.

(١٥) $\mathbf{V}=\mathbf{F}[1,2]$ ، $S=\left\{\frac{1}{x},\frac{1}{x^2},\frac{1}{x^3}\right\}$.

(١٦) $\mathbf{V}=\mathbf{F}[0,2\pi]$ ، $S=\{\cos 2x,\sin^2 x,\cos^2 x\}$.

(١٧) $\mathbf{V}=\mathbf{F}(-\infty,\infty)$ ، $S=\{e^x,xe^x,x^2e^x\}$.

(١٨) $\mathbf{V}=\mathbf{F}(-\infty,\infty)$ ، $S=\{\sin x,\cos x,x\sin x,x\cos x\}$.

(١٩) $\mathbf{V}=\mathbf{F}(-\infty,\infty)$ ، $S=\{6,3\sin^2 x,2\cos^2 x\}$.

(٢٠) $\mathbf{V}=\mathbf{F}[0,2\pi]$ ، $S=\{1,\sin x,\sin 2x\}$.

(٢١) عين قيم x التي تجعل المجموعات التالية مستقلة خطياً في $\mathbb{R}^3$.

(أ) $S=\{(1,-1,0),(x,1,0),(0,2,3)\}$.

(ب) $S=\{(2,x,1),(1,0,1),(0,1,3)\}$.

(جـ) $S=\{(1,x,1),(x,0,0),(0,0,3)\}$.

(٢٢) عين قيمة كل من a و b التي تجعل المتجهات

$(1,a,2,b)$ ، $(1,-1,2,0)$ و $(1,2,1,3)$ مرتبطة خطياً في $\mathbb{R}^4$.

(٢٣) أثبت أن أي مجموعة جزئية غير خالية من مجموعة مستقلة خطياً يجب أن تكون مستقلة خطياً .

(٢٤) لتكن كل من S_1 و S_2 مجموعة جزئية من فضاء متجهات $\mathbf{V}$ حيث $S_1 \subseteq S_2$. إذا كانت S_1 مرتبطة خطياً فأثبت أن S_2 مرتبطة خطياً .

(٢٥) لتكن $\{\mathbf{v},\mathbf{u}\}$ مجموعة مستقلة خطياً . أثبت أن :

(أ) $\{\mathbf{u},\mathbf{u}+\mathbf{v}\}$ مستقلة خطياً .

(ب) $\{\mathbf{v},\mathbf{u}+\mathbf{v}\}$ مستقلة خطياً .

(جـ) $\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{u}+\mathbf{v}\}$ مرتبطة خطياً .

(٢٦) لتكن $S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_n\}$ مجموعة جزئية مستقلة خطياً من فضاء متجهات $\mathbf{V}$. وليكن $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ ليس تركيبا خطيا لمتجهات S (أي أن $\mathbf{v}\notin\langle S\rangle$) أثبت أن $S\cup\{\mathbf{v}\}$ مجموعة مستقلة خطيا.

(٢٧) لتكن $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_n\in\mathbb{R}^n$ ولتكن A مصفوفة من الدرجة n لها معكوس. أثبت أن المجموعة $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_n\}$ مستقلة خطياً إذا وفقط إذا كانت المجموعة $\{A\mathbf{v}_1,A\mathbf{v}_2,\dots,A\mathbf{v}_n\}$ مستقلة خطياً .

(٢٨) لتكن $S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_n\}$ مجموعة جزئية من فضاء متجهات $\mathbf{V}$. إذا كان أحد عناصر S هو المتجه الصفري فأثبت أن S مرتبطة خطياً .

(٢٩) لتكن $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_4\}$ مجموعة مستقلة خطياً من فضاء متجهات $\mathbf{V}$. بين أي من المجموعات التالية مستقلة خطياً وأيها مرتبطة خطياً .

(أ) $\{\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_3-\mathbf{u}_1\}$.

(ب) $\{\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_2+\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_3+\mathbf{u}_1\}$.

(جـ) $\{\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_3-\mathbf{u}_4,\mathbf{u}_4-\mathbf{u}_1\}$.

(د) $\{\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2+\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_3+\mathbf{u}_4, \mathbf{u}_4+\mathbf{u}_1\}$.

(٣٠) لتكن $\{p(x), q(x)\}$ مجموعة مستقلة خطياً من $\mathbf{P}_2$. إذا كانت درجة كل من $p(x)$ و $q(x)$ أكبر من أو تساوي 1 فأثبت أن المجموعة $\{p(x), q(x), p(x)\,q(x)\}$ مستقلة خطياً .

(٥ ، ٤) الأساس والبعد
Basis and Dimension

لنفرض أن لدينا المجموعتين

$$S_1 = \{(1,-1),(1,1)\}$$
$$S_2 = \{(2,1),(1,-1),(3,-2)\}$$

من المتجهات في الفضاء $\mathbb{R}^2$. يمكن التأكد وبجهد قليل من أن المجموعتين تولدان $\mathbb{R}^2$ غير أن المجموعة S_1 تتصف بصفة تميزها عن المجموعة S_2 ذلك أن S_1 مستقلة خطياً بينما S_2 مرتبطة خطياً . لذا تسمى S_1 أساساً للفضاء $\mathbb{R}^2$ بينما S_2 ليست أساساً للفضاء $\mathbb{R}^2$. في هذا البند نناقش مفهوم أساس فضاء المتجهات والذي يعتبر من المفاهيم الأساسية في الجبر الخطي . وسنبين كذلك أن جميع أساسات فضاء المتجهات تحتوي على نفس العدد من العناصر هذا العدد يسمى بعد فضاء المتجهات . أن عدد متجهات أساس فضاء المتجهات $\mathbf{V}$ يعتمد فقط على $\mathbf{V}$ وليس على طريقة اختيار هذا الأساس .

تعريف (١٠ ، ٤)

لتكن $S=\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ مجموعة جزئية من فضاء متجهات $\mathbf{V}$. نقول إن S أساس (basis) للفضاء $\mathbf{V}$ إذا حققت الشرطين :

(١) S تولد $\mathbf{V}$ (٢) S مستقلة خطياً .

مثال (٥٥ ، ٤)

عين أساساً للفضاء $\mathbb{R}^3$ يحتوي المجموعة $S=\{(1,0,2),(1,1,1)\}$.

الحل

من السهل أن نرى أن المجموعة S مستقلة خطياً. نختار الأساس المعتاد $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ للفضاء $\mathbb{R}^3$. الآن نفرض أن $S_1=\{(1,0,2),(1,1,1),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$. الآن نضع المصفوفة A التي أعمدتها متجهات S_1 على الصيغة الدرجية الصفية المختزلة فنجد أن هذه الصيغة هي :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

وبما أن الأعمدة ذات العناصر المتقدمة هي الأول والثاني والثالث، لذا فإن أعمدة A التي تكون الأساس المطلوب هي الأول والثاني والثالث . أي أن الأساس هو $B=\{(1,0,2),(1,1,1),(1,0,0)\}$. □

تمارين (٥ ، ٤)

(١) بين أياً من المجموعات الجزئية التالية من $\mathbb{R}^2$ تشكل أساساً لفضاء المتجهات $\mathbb{R}^2$:

(أ) $\{(1,3),(3,5)\}$ (ب) $\{(7,1),(10,1)\}$

(جـ) $\{(7,1),(21,3)\}$ (د) $\left\{\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right),\left(\frac{-4}{5},\frac{3}{5}\right)\right\}$

(٢) بين أ ياً من المجموعات الجزئية التالية من $\mathbb{R}^3$ تشكل اساساً لفضاء لمتجهات $\mathbb{R}^3$:

(أ) $\{(0,17,8),(1,7,5),(2,-3,2)\}$.

(ب) $\{(\sqrt{2},0,\sqrt{2}),(\sqrt{3},0,\sqrt{6}),(0,-\sqrt{6},\sqrt{3})$.

(جـ) $\{(1,2,1),(1,3,1),(2,3,1)\}$.

(د) $\{(2,1,3),(-1,2,1),(3,0,0)\}$.

(٣) بين أياً من المجموعات الجزئية التالية من $\mathbb{R}^4$ تشكل أساساً لفضاء المتجهات $\mathbb{R}^4$:

(أ) $\{(1,1,0,0),(1,0,1,0),(0,1,0,1),(0,0,1,1)\}$.

(ب) $\{(1,1,3,-1),(1,1,-1,-1),(2,2,2,-2),(3,3,1,-3)\}$.

(جـ) $\{(3,8,7,-3),(1,5,3,-1),(2,-1,2,6),(1,4,0,3)\}$.

(د) $\{(3,0,-3,6),(0,2,3,1),(0,-2,-2,0),(-2,1,2,1)\}$.

(٤) بين أياً من المجموعات الجزئية التالية من $\mathbf{P}_2$ تشكل أساساً لفضاء المتجهات $\mathbf{P}_2$:

(أ) $\{1, x+1, x^2-x\}$.

(ب) $\{x^3+1, x^3-1, x^2+1, x^2-1$.

(جـ) $\{x^2+3x+5, 5x^2+3x+1, x^2+x+1\}$.

(د) $\{x+5, -x^2-x+1, 2x^2+x+3$.

(٥) بين أياً من المجموعات الجزئية التالية من $\mathbf{M}_{22}$ تشكل أساساً لفضاء المتجهات $\mathbf{M}_{22}$:

(أ) $\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&-1\\-1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&2\\2&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&3\\3&3\end{bmatrix}\right\}$.

(ب) $\left\{\begin{bmatrix}0&1\\4&4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&5\\5&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\2&-3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&7\\0&0\end{bmatrix}\right\}$.

(جـ) $\left\{\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}\right\}$.

(د) $\left\{\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}\right\}$.

(٦) عين أساس وبعد كل من الفضاءات الجزئية المبينة :

(أ) $\mathbf{W}=\{(a,b,c):a+b+c=0\}\leq\mathbb{R}^3$.

(ب) $\mathbf{W}=\{(a,b,c):a+b=b+c=0\}\leq\mathbb{R}^3$.

(جـ) $\mathbf{W}=\{(a-b,b+c,b,b-c):a,b,c\in\mathbb{R}\}\leq\mathbb{R}^4$.

(د) $\mathbf{W}=\{(a,b,c,d):a+2b+3c+d=0\}\leq\mathbb{R}^4$.

(هـ) $\mathbf{W}=\{(a,b,c,d):a+b=0,\ b+c+d=0\}\leq\mathbb{R}^4$.

(و) $\mathbf{W}=\{A\in\mathbf{M}_{22}:A^T+A=0\}\leq\mathbf{M}_{22}$.

(ز) $\mathbf{W}=\left\{A\in\mathbf{M}_{22}:A\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\end{bmatrix}A\right\}\leq\mathbf{M}_{22}$.

(ح) $\mathbf{W}=\{A\in\mathbf{M}_{22}:2a_{11}+a_{22}=a_{12}+a_{21}=0\}\leq\mathbf{M}_{22}$.

(ط) $\mathbf{W}=\{a(x+1)+b(x+x^2):a,b\in\mathbb{R}\}\leq\mathbf{P}_2$.

(ى) $\mathbf{W}=\{ax^2+bx+c:a+b+c=0\}\leq\mathbf{P}_2$.

(٧) عين أساس وبعد فضاء الحل للنظام المتجانس $AX=0$ حيث :

(أ) $A=\begin{bmatrix}3&-1&1\\1&3&-2\\2&-4&3\end{bmatrix}$ (ب) $A=\begin{bmatrix}1&1&1&2\\3&-1&2&-1\\1&-3&4&-5\\5&-3&5&-4\end{bmatrix}$

(جـ) $A=\begin{bmatrix}3&1&1&1\\5&-1&1&-1\end{bmatrix}$ (د) $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\3&2&-2\\4&3&-1\\6&5&1\end{bmatrix}$

(هـ) $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ (و) $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$

(ز) $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$.

(٨) عين أساساً لفضاء المتجهات المعطى الذي يحتوي على كل من المجموعات الواردة فيما يأتي :

(أ) $\mathbf{V}=\mathbb{R}^4$ ، $S=\{(1,0,1,0),(0,1,1,1)\}$.

(ب) $\mathbf{V}=\mathbf{P}_3$ ، $S=\{1+x,1-x+x^2-x^3\}$.

(جـ) $\mathbf{V}=\mathbf{M}_{22}$ ، $S=\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$.

(د) $\mathbf{V}=\mathbb{R}^4$ ، $S=\{(0,0,1,1),(1,1,1,1)\}$.

(هـ) $\mathbf{V}=\mathbf{P}_3$ ، $S=\{x^2+1,x^2+x\}$.

(٩) عين أساساً لكل فضاء متجهات معطى من بين مجموعة المتجهات الواردة فيما يأتي :

(أ) $\mathbf{V}=\mathbb{R}^3$ ، $S=\{(2,1,4),(1,3,-2),(0,1,-1),(3,-6,18),(-2,1,-6)\}$.

(ب) $\mathbf{V}=\mathbf{P}_2$ ، $S=\{2+x,3+x^2,x^2-2x-1,x^2-x\}$.

(جـ) $\mathbf{V}=\mathbf{M}_{22}$ ،

$$S=\left\{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}.$$

(د) $\mathbf{V}=\mathbb{R}^2$ ، $S=\{(1,2),(1,3),(-2,3),(4,1)\}$.

(هـ) $\mathbf{V}=\mathbb{R}^3$ ، $S=\{(-1,1,0),(1,0,-1),(-3,2,1),(0,1,1)\}$.

(و) $V=\mathbb{R}^4$ ،

$S=\{(1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1),(1,0,0,1),(1,0,1,0)\}$.

(ز) $V=P_2$ ، $S=\{x^2+x-1,2x^2-3,3x+1,x^2-x-2\}$.

(١٠) أثبت أن الفضاءات الجزئية من $\mathbb{R}^3$ هي $\{(0,0)\}$ ، $\mathbb{R}^3$ ، المستقيمات المارة بنقطة الأصل ، المستويات المارة بنقطة الأصل .

(١١) أثبت أن $\{(a,b),(a_1,b_1)\}$ أساس للفضاء $\mathbb{R}^2$ إذا وفقط إذا كانت $\{a+bx,a_1+b_1x\}$ أساساً للفضاء P_1 .

(١٢) عين أساساً S لفضاء المتجهات M_{22} بحيث يكون $A^2=A$ لكل $A\in S$.

(١٣) هل تستطيع إيجاد أساس لفضاء المتجهات P_3 بحيث يكون مجموع معاملات كل من عناصره يساوي صفراً ؟

(١٤) إذا كان $\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\}$ أساساً لفضاء المتجهات V فبين أي من المجموعات التالية تكون أساساً للفضاء V :

(أ) $\{\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{u}+\mathbf{w},\mathbf{v}+\mathbf{w}\}$ (ب) $\{2\mathbf{u}+\mathbf{v}+3\mathbf{w},3\mathbf{u}+\mathbf{v}-\mathbf{w},\mathbf{u}-4\mathbf{w}\}$

(جـ) $\{\mathbf{u},\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}\}$ (د) $\{\mathbf{u},\mathbf{u}+\mathbf{w},\mathbf{u}-\mathbf{w},\mathbf{v}+\mathbf{w}\}$.

(١٥) هل يمكن لمجموعة مكونة من أربعة متجهات أن تولد $\mathbb{R}^3$ ؟ هل يمكن أن تكون مستقلة خطياً ؟

(١٦) إذا كان $U=\langle\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k\}\rangle$ وكان $W=\langle\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k,\mathbf{v}\}\rangle$ فأثبت أن $\dim W=\dim U$ أو أن $\dim W=\dim U+1$.

(١٧) إذا كانت $p(x),q(x)\in P_1$ حيث $p(1)\neq 0$ ، $q(2)=0$ و $p(2)=0=q(1)$ فأثبت أن $\{p(x),q(x)\}$ أساس للفضاء P_1 .

(١٨) إذا كان كل من U و W فضاءاً جزئياً من V فأثبت أن :

$\dim(U+W)\leq\dim U+\dim W$. وإذا كان $U\cap W=\{0\}$ فأثبت أن :

$\dim(U+W)=\dim U+\dim W$.

فإن $_{C}P_{B}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$. □

تمارين (٦، ٤)

(١) عين $[v]_B$ لكل مما يلي :

(أ) $\mathbf{V}=\mathbf{P}_2$, $B=\{x^2, x+1, x+2\}$, $\mathbf{v}=2x^2+x-1$.

(ب) $\mathbf{V}=\mathbb{R}^3$, $B=\{(1,-1,2),(1,1,-1),(0,0,1)\}$, $\mathbf{v}=(1,2,3)$.

(جـ) $\mathbf{V}=\mathbf{M}_{22}$, $B=\left\{\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}$, $\mathbf{v}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}$.

(د) $\mathbf{V}=\mathbf{P}_2$ ، $B=\{x^2, x+1, x+2\}$ ، $\mathbf{v}=ax^2+bx+c$.

(هـ) $\mathbf{V}=\mathbb{R}^3$ ، $B=\{(1,-1,2),(1,1,-1),(0,0,1)\}$ ، $\mathbf{v}=(a,b,c)$.

(و) $\mathbf{V}=\mathbf{M}_{22}$ ،

$B=\left\{\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}$ ، $\mathbf{v}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\end{bmatrix}$.

في التمارين من (٢) إلى (١١) احسب كلاً من $_{C}P_{B}$ ، $_{B}P_{C}$ ، $[\mathbf{v}]_C$ و $[\mathbf{v}]_B$.

(٢) $\mathbf{V}=\mathbb{R}^2$ ، $B=\{(1,1),(-1,1)\}$ ، $C=\{(1,2),(2,1)\}$ ، $\mathbf{v}=(3,-5)$.

(٣) $\mathbf{V}=\mathbb{R}^2$ ، $B=\{(1,0),(1,1)\}$ ، $C=\{(1,-1),(1,1)\}$ ، $\mathbf{v}=(5,7)$.

(٤) $\mathbf{V}=\mathbb{R}^3$ ، $B=\{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$ ،

$C=\{(-1,1,0),(1,1,1),(1,1,0)\}$ ، $\mathbf{v}=(3,0,-7)$.

(٥) $\mathbf{V}=\mathbb{R}^3$ ، $B=\{(-3,0,-3),(-3,2,1),(1,6,-1)\}$ ،

$C=\{(-6,-6,0),(-2,-6,4),(-2,-3,7)\}$ ، $\mathbf{v}=(-5,8,-5)$.

(٦) $\mathbf{V}=\mathbf{P}_1$ ، $B=\{1+x,1-x\}$ ، $C=\{2+x,1+2x\}$ ، $\mathbf{v}=-3x+4$.

(٧) $\mathbf{V}=\mathbf{P}_2$ ، $B=\{3x+6,2x+10\}$ ، $C=\{2,2x+3\}$ ، $\mathbf{v}=x-4$.

مثال (٥ ، ١٤)

إذا كانت $p(x)=2-x+4x^2 , q(x)=3+5x-x^2 \in \mathbf{P}_2$ حيث الضرب الداخلي المعرف في المثال (٥ ، ٣) فإن جيب تمام الزاوية Θ بين $p(x)$ و $q(x)$ هو :

$$\cos\Theta = \frac{6-5-4}{\sqrt{4+1+16}\,\sqrt{9+25+1}} = \frac{-3}{\sqrt{735}} \quad . \quad \square$$

المبرهنة التالية هي تعميم لمبرهنة فيثاغورس إلى أي فضاء ضرب داخلي .

مبرهنة (٥ ، ٦)

إذا كان $\mathbf{V}$ فضاء ضرب داخلي وكان $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ متعامدين فإن $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

البرهان

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$$

وذلك لأن $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$. ♦

تمارين (٥ ، ٢)

في التمارين من (١) إلى (٥) أحسب الزاوية بين المتجهين وبين فيما إذا كانا متعامدين حيث الضرب الداخلي هو الضرب الاقليدي على $\mathbb{R}^3$

(١) $\mathbf{u}=(-1,3,2)$, $\mathbf{v}=(4,2,-1)$.

(٢) $\mathbf{u}=(-2,-2,-2)$, $\mathbf{v}=(-1,1,-1)$.

(٣) $\mathbf{u}=(-1,1,0)$, $\mathbf{v}=(4,0,9)$.

(٤) $\mathbf{u}=(-1,5,2)$, $\mathbf{v}=(2,4,-9)$.

(٥) $\mathbf{u}=(-4,2,1), \mathbf{v}=(8,-4,-2)$.

(٦) أعد التمارين من (١) إلى (٥) إذا كان الضرب الداخلي على $\mathbb{R}^3$ هو

$\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = 7a_1b_1 + 3a_2b_2 + 4a_3b_3$.

في التمارين من (٧) إلى (١١) أحسب الزاوية بين المتجهين وبين فيما إذا كانا متعامدين حيث الضرب الداخلي هو الضرب الاقليدي على $\mathbb{R}^4$

(٧) $\mathbf{u}=(-4,6,-10,1)$, $\mathbf{v}=(2,1,-2,9)$.

(٨) $\mathbf{u}=(-1,1,0,2), \mathbf{v}=(1,-1,3,0)$.

(٩) $\mathbf{u}=(0,-2,2,1), \mathbf{v}=(-1,-1,1,1)$.

(١٠) $\mathbf{u}=(1,2,0,1), \mathbf{v}=(-2,3,1,2)$.

(١١) $\mathbf{u}=(-2,3,1,4), \mathbf{v}=(-3,1,4,6)$.

(١٢) أعد التمارين من (٧) إلى (١١) إذا كان الضرب الداخلي على $\mathbb{R}^4$ هو

$\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + 2a_3b_3 + 3a_4b_4$.

في التمارين من (١٣) إلى (١٧) أحسب الزاوية بين المتجهين وبين فيما إذا كانا متعامدين حيث الضرب الداخلي على $\mathbf{P}_2$ هو المعرف في المثال (٣، ٥)

(١٣) $p(x)=x^2+2x+3$, $q(x)=x^2+1$.

(١٤) $p(x)=2x^2+x-3$, $q(x)=4x^2-x$.

(١٥) $p(x)=2x^2+5x-1$, $q(x)=9x^2+2x+1$.

(١٦) $p(x)=3x^2-x+5$, $q(x)=x^2-x$.

(١٧) $p(x)=2x^2-x+1$, $q(x)=x^2+2x$.

في التمارين من (١٨) إلى (٢٢) احسب الزاوية بين المتجهين ثم بين فيما إذا كانا متعامدين حيث الضرب الداخلي على $\mathbf{M}_{22}$ هو الضرب المعرف في المثال (٥، ٥)

(١٨) $A=\begin{bmatrix}2 & 6\\ 1 & -3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$. (١٩) $A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 6 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}$.

(٢٠) $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}5 & -3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$. (٢١) $A=\begin{bmatrix}5 & -4\\ 2 & 6\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 1 & -5\end{bmatrix}$.

(٢٢) $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 5\\ 3 & -2\end{bmatrix}$.

(٢٣) إذا كانت $\sin 3x , \cos 4x \in \mathbf{C}[0,\pi]$ حيث الضرب الداخلي هو الضرب المعرف في المثال (٤ ، ٥) فأثبت أنهما متعامدتان .

(٢٤) ليكن $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbf{V}$ حيث $\mathbf{V}$ فضاء ضرب داخلي . إذا كان $\mathbf{u}$ متعامداً على كل من $\mathbf{u}$ و $\mathbf{w}$ فأثبت أن $\mathbf{u}$ متعامد على $\alpha\mathbf{v}+\beta\mathbf{w}$ لكل $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

(٢٥) إذا كان $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ حيث $\mathbf{V}$ فضاء ضرب داخلي فأثبت أن :

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2-\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2=4\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle .$$

(٢٦) إذا كان $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ حيث $\mathbf{V}$ فضاء ضرب داخلي فأثبت أن :

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2+\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2=2\|\mathbf{u}\|^2+2\|\mathbf{v}\|^2 .$$

(٢٧) إذا كان $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ حيث $\mathbf{V}$ فضاء ضرب داخلي فأثبت أن :

$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2=\|\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2+2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\Theta$ حيث Θ هي الزاوية بين $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$.

(٢٨) ليكن $\mathbb{R}^2$ هو فضاء الضرب الأقليدي . أثبت مستخدماً متباينة كوشي ـ شوارتز أن $(a\cos\Theta+b\sin\Theta)^2\le a^2+b^2$ وذلك لكل $a,b,\Theta\in\mathbb{R}$.

(٢٩) لتكن $f(x),g(x)\in\mathbf{C}[0,1]$. أثبت أن :

$$\left[\int_0^1 (f(x)+g(x))^2\,dx\right]^{1/2}\le\left[\int_0^1 (f(x))^2\,dx\right]^{1/2}+\left[\int_0^1 (g(x))^2\,dx\right]^{1/2}$$

(٣٠) إذا كان $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ حيث $\mathbf{V}$ فضاء ضرب داخلي فأثبت أن :

$$\|\mathbf{u}\|-\|\mathbf{v}\|\le\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| .$$

(٣١) إذا كان $\mathbf{V}$ فضاء ضرب داخلي وكان $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ حيث $\|\mathbf{u}\|=\|\mathbf{v}\|$ فأثبت أن $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ و $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ متعامدان .

(٣٢) إذا كانت $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n\in\mathbf{V}$ متجهات غير صفرية في فضاء الضرب الداخلي $\mathbf{V}$ وكانت متعامدة مثنى مثنى (أي $\langle\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j\rangle=0$ لكل $i\ne j$) فأثبت أن $\|\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+\ldots+\mathbf{v}_n\|^2=\|\mathbf{v}_1\|^2+\|\mathbf{v}_2\|^2+\ldots+\|\mathbf{v}_n\|^2$.

$$\left\{\frac{1}{2}(1,1,1,1),\frac{1}{\sqrt{12}}(3,-1,-1,-1),\frac{1}{\sqrt{6}}(0,-2,1,1)\right\}. \square$$

تمارين (٣ ، ٥)

(١) ليكن $\mathbb{R}^2$ هو فضاء الضرب الإقليدي . استخدم خوارزمية جرام – شميت لتحويل الأساس $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ إلى أساس عياري متعامد.

(أ) $\{\mathbf{v}_1=(1,-3),\ \mathbf{v}_2=(2,2)\}$.

(ب) $\{\mathbf{v}_1=(1,0),\ \mathbf{v}_2=(3,-5)\}$.

(٢) أعد التمرين (١) إذا كان الضرب الداخلي على $\mathbb{R}^2$ هو $\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = 2a_1 b_1 + 3a_2 b_2$.

(٣) ليكن $\mathbb{R}^3$ هو فضاء الضرب الإقليدي . استخدم خوارزمية جرام – شميت لتحويل الأساس $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ إلى أساس عياري متعامد .

(أ) $\{\mathbf{v}_1=(1,1,1),\ \mathbf{v}_2=(-1,1,0),\ \mathbf{v}_3=(1,2,1)\}$.

(ب) $\{\mathbf{v}_1=(1,0,0),\ \mathbf{v}_2=(3,7,-2),\ \mathbf{v}_3=(0,4,1)\}$.

(جـ) $\{\mathbf{v}_1=(1,1,1),\ \mathbf{v}_2=(1,1,0),\ \mathbf{v}_3=(1,0,0)\}$.

(٤) أعد التمرين (٣) إذا كان الضرب الداخلي على $\mathbb{R}^5$ هو $\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = a_1b_1 + 2a_2b_2 + 3a_3b_3$.

(٥) ليكن $\mathbb{R}^4$ هو فضاء الضرب الإقليدي . استخدم خوارزمية جرام – شميت لتحويل الأساس :

$$\{\mathbf{v}_1=(0,2,1,0),\ \mathbf{v}_2=(1,-1,0,0),\ \mathbf{v}_3=(1,2,0,-1),\ \mathbf{v}_4=(1,0,0,1)\}$$

إلى أساس عياري متعامد .

(٦) أعد التمرين (٥) إذا كان الضرب الداخلي على $\mathbb{R}^4$ هو : $\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = a_1b_1 + 2a_2b_2 + 3a_3b_3 + 4a_4b_4$.

(٧) ليكن $\mathbb{R}^3$ هو فضاء الضرب الإقليدي .استخدم خوارزمية جرام ــ شميت لإيجاد أساس عياري متعامد للفضاء الجزئي $\mathbf{W}$ من $\mathbb{R}^3$ المولد بالمجوعتين الآتيتين

(أ) $\{\mathbf{v}_1=(1,-1,0),\mathbf{v}_2=(-1,0,1)\}$.

(ب) $\{\mathbf{v}_1=(0,1,2),\mathbf{v}_2=(-1,0,1),\mathbf{v}_3=(-1,1,3)\}$.

(٨) أعد التمرين (٧) إذا كان الضرب الداخلي على $\mathbb{R}^3$ هو الضرب المعرف في التمرين (٤) .

(٩) ليكن $\mathbb{R}^4$ هو فضاء الضرب الإقليدي . استخدم خوارزمية جرام ـ شميت لإيجاد أساس متعامد للفضاء الجزئي $\mathbf{W}$ من $\mathbb{R}^4$ المولد بالمجموعتين الآتيتين

(أ) $\{\mathbf{v}_1=(1,-1,0,1),\mathbf{v}_2=(1,1,0,0),\mathbf{v}_3=(1,1,0,1)\}$.

(ب) $\{\mathbf{v}_1=(1,1,-1,-1),\mathbf{v}_2=(3,2,0,1),\mathbf{v}_3=(1,0,1,0)\}$.

(١٠) أعد التمرين (٩) إذا كان الضرب الداخلي على $\mathbb{R}^4$ هو الضرب المعرف في التمرين (٦) .

(١١) استخدم خوارزمية جرام ـ شميت لتحويل الأساس $\{1,x,x^2\}$ للفضاء $\mathbf{P}_2$ إلى أساس متعامد حيث الضرب الداخلي هو :

(أ) $\langle p,q\rangle=p(0)q(0)+p(1)q(1)+p(2)q(2)$.

(ب) $\langle p,q\rangle=\int_0^2 p(x)q(x)\,dx$.

(١٢) استخدم خوارزمية جرام ــ شيمت لإيجاد أساس عياري متعامد للفضاء الجزئي من $\mathbf{C}[0,\pi]$ المولد بالمجموعة $\{\mathbf{v}_1=\sin x,\mathbf{v}_2=\cos x\}$ حيث الضرب الداخلي هو $\langle f,g\rangle=\int_0^{\pi} f(x)g(x)\,dx$.

(١٣) استخدم خوارزمية جرام ــ شميت لإيجاد أساس عياري متعامد للفضاء الجزئي من $\mathbf{C}[0,1]$ المولد بالمجموعة $\{\mathbf{v}_1=1,\mathbf{v}_2=e^x\}$ حيث الضرب الداخلي هو $\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

(١٤) أستخدم خوارزمية جرام ـ شميت لإيجاد أساس متعامد للفضاء الجزئي من $C[-1,1]$ المولد بالمجموعة $\{v_1=1, v_2=x, v_3=x^2\}$ حيث الضرب الداخلي هو $\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$.

(١٥) استخدم خوارزمية جرام ـ شميت لتحويل الأساس $\{v_1=1, v_2=x, v_3=x^2, v_4=x^3, v_5=x^4\}$ للفضاء P_4 إلى أساس متعامد حيث الضرب الداخلي هو :

$\langle p,q\rangle=p(-2)q(-2)+p(-1)q(-1)+p(0)q(0)+p(1)q(1)+p(2)q(2)$.

(١٦) استخدم خوارزمية جرام ـ شميت لإيجاد أساس متعامد للفضاء الجزئي من $C[0,2\pi]$ المولد بالمجموعة $\{1, \cos x, \cos^2 x, \cos^3 x\}$ حيث الضرب الداخلي هو $\langle f,g\rangle=\int_{0}^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$.

(١٧) استخدم خوارزمية جرام ـ شميت لإيجاد أساس عياري متعامد للفضاء العمودي للمصفوفة A علماً بأن الضرب الداخلي هو الضرب الأقليدي .

(أ) $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$ (ب) $A=\begin{bmatrix}3&0&5\\0&1&-2\\4&1&1\end{bmatrix}$.

(١٨)أعد التمرين (١٧) لإيجاد أساس عياري متعامد للفضاء الصفي للمصفوفة A

(١٩) استخدم خوارزمية جرام ـ شميت لإيجاد أساس عياري متعامد لفضاء الحل للمصفوفة A علماً بأن الضرب الداخلي هو الضرب الأقليدي .

(أ) $A=\begin{bmatrix}1&0&5&-2&-1\\0&1&-2&4&2\end{bmatrix}$ (ب) $A=\begin{bmatrix}1&0&0&3&-4\\0&1&0&4&2\\0&0&1&5&0\end{bmatrix}$

(٢٠) لتكن $S=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ مجموعة عيارية متعامدة في فضاء الضرب الداخلي V . أثبت أن $\sum_{k=1}^{n}|\langle v, v_k\rangle|^2 \le \|v\|^2$ لكل $v\in V$.

(٢١) لتكن $S=\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ مجموعة عيارية متعامدة في فضاء الضرب الداخلي $\mathbf{V}$ وليكن $\mathbf{W}=\langle S\rangle$. أثبت أن العبارات التالية متكافئة :

(أ) $\mathbf{v}\in\mathbf{W}$.

(ب) $\sum_{k=1}^{n}|\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_k\rangle|^2=\|\mathbf{v}\|^2$.

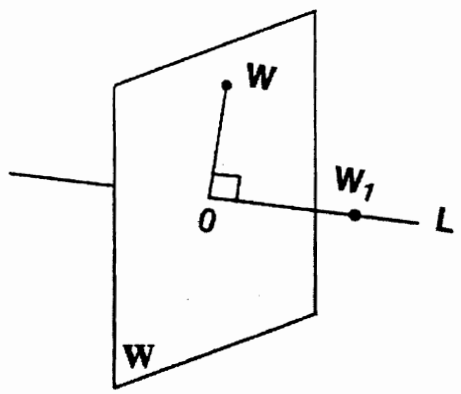
(جـ) $\mathbf{v}=\sum_{k=1}^{n}\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_k\rangle \mathbf{v}_k$.

(د) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle=\sum_{k=1}^{n}\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_1\rangle\langle \mathbf{v}_k, \mathbf{u}\rangle$ لكل $\mathbf{u}\in\mathbf{V}$.

(٤ ، ٥) المتمم العمودي والإسقاط العمودي

Orthogonal Complement and Orthogonal Projection

ليكن $\mathbf{W}$ هو المستوى المار بنقطة الأصل في الفضاء الاقليدي $\mathbb{R}^3$. وليكن L المستقيم المار بنقطة الأصل وعمودي على المستوى $\mathbf{W}$. إذا كان $0\neq \mathbf{w}_1\in L$ و $0\neq \mathbf{w}\in\mathbf{W}$ فمن المعلوم أن المتجه الذي بدايته 0 ونهايته $\mathbf{w}_1$ عمودياً على القطعة المستقيمة $0\,\mathbf{w}$. أي أن $\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}\rangle=0$ (أنظر الشكل (١ ، ٥)) .



شكل (١ ، ٥)

ولذا فإن كل متجه واقع على L يكون عمودياً على كل متجه $\mathbf{w}$ ، $\mathbf{w}\in\mathbf{W}$. أي أن L

$(x,y,z)=\alpha_1(1,1,0)+\alpha_2(1,0,1)+\alpha_3(0,1,1)$. أي أن :

$$\begin{aligned}\alpha_1+\alpha_2 \quad &= x\\ \alpha_1 \quad +\alpha_3 &= y\\ \alpha_2+\alpha_3 &= z\end{aligned}$$

وبحل هذا النظام نجد أن :

$$\alpha_1=\frac{1}{2}(x+y-z)\ ,\ \alpha_2=\frac{1}{2}(x-y+z)\ ,\ \alpha_3=\frac{1}{2}(-x+y+z)\ .$$

وبتطبيق المبرهنة (٦ ، ٦) نجد أن :

$$\begin{aligned}T(x,y,z)&=\alpha_1 T(1,1,0)+\alpha_2 T(1,0,1)+\alpha_3 T(0,1,1)\\ &=\frac{1}{2}(x+y-z)(1,2)+\frac{1}{2}(x-y+z)(-1,1)+\frac{1}{2}(-x+y+z)(2,3)\\ &=(-x+2y\ ,\ 2y+z)\end{aligned}$$

ولذا فإن قاعدة تعريف التحويل الخطي المطلوب هي :

$$\square\ .\ T(x,y,z)=(-x+2y,2y+z)$$

تمارين (١ ، ٦)

في التمارين من (١) إلى (٣٣) بين أياً من التطبيقات المبينة هو تحويل خطي .

(١) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ حيث $T(x,y)=(2x-y,x+y)$.

(٢) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ حيث $T(x,y)=(2x,x+y,x-2y)$.

(٣) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ حيث $T(x,y,z)=x+y+z$.

(٤) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ حيث $T(x,y)=(x-y,\ y\ ,x+y)$.

(٥) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ حيث $T(x,y)=(-y,x)$.

(٦) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ حيث $T(x,y,z)=(x,y,-z)$.

(٧) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ حيث $T(x,y,z)=(2x-3y+5z,0)$.

(٨) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ حيث $T(x,y)=(x^2,y)$.

(٩) $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ حيث $T(x)=x^2$.

(١٠) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ حيث $T(x,y,z)=(0,2x+y)$.

(١١) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ حيث $T(x,y,z)=(xy,y,x-z)$.

(١٢) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ حيث $T(x,y,z)=(x,\sin y,\ 2x+y)$.

(١٣) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ حيث $T(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

(١٤) $T:\mathbf{P}_2\to\mathbf{P}_3$ حيث $T(p(x))=xp(x)$.

(١٥) $T:\mathbf{P}_2\to\mathbf{P}_3$ حيث $T(p(x))=x^3+p(x)$.

(١٦) $T:\mathbf{P}_n\to\mathbb{R}$ حيث $T(p(x))=p(0)$.

(١٧) $T:\mathbf{P}_n\to\mathbb{R}$ حيث $T(a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0)=a_n$.

(١٨) $T:\mathbf{P}_2\to\mathbf{P}_3$ حيث $T(ax^2+bx+c)=2ax+b$.

(١٩) $T:\mathbf{P}_2\to\mathbf{P}_3$ حيث $T(ax^2+bx+c)=\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}bx^2+cx$.

(٢٠) $T:\mathbf{P}_2\to\mathbf{P}_3$ حيث $T(ax^2+bx+c)=a(x-1)^2+b(x-1)+c$.

(٢١) $T:\mathbf{P}_3\to\mathbf{P}_3$ حيث

$T(a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0)=(a_0+a_2)-(a_1+2a_3)x^2$.

(٢٢) $T:\mathbf{M}_{nn}\to\mathbf{M}_{nn}$ حيث $T(A)=A^T+A$.

(٢٣) $T:\mathbf{M}_{mn}\to\mathbf{M}_{rs}$ حيث $T(A)=PAQ$ وحيث P مصفوفة من الدرجة $r\times m$ و Q مصفوفة من الدرجة $n\times s$.

(٢٤) $T:\mathbf{M}_{nn}\to\mathbb{R}$ حيث $T(A)=\det(A)$.

(٢٥) $T:\mathbf{M}_{nn}\to\mathbf{M}_{nn}$ حيث $T(A)=I+A$.

(٢٦) $T:\mathbf{M}_{nn}\to\mathbf{M}_{nn}$ حيث $T(A)=AA^T$.

(٢٧) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbf{M}_{22}$ حيث $T(x,y,z)=\begin{bmatrix} y & z \\ -x & 0 \end{bmatrix}$.

(٢٨) $T:\mathbf{P}_2\to\mathbf{M}_{22}$ حيث $T(a_0+a_1x+a_2x^2)=\begin{bmatrix} a_0 & -a_2 \\ -a_2 & a_0-a_1 \end{bmatrix}$.

(٢٩) $T:\mathbf{M}_{nm}\to\mathbb{R}$ حيث $T(A)=\text{rank}(A)$.

(٣٠) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ حيث
$T(x,y,z)=(2x+3y-z,2+x+y,3|x-3z|)$.

(٣١) $T:\mathbf{M}_{nm}\to\mathbf{M}_{nm}$ حيث $T(A)=3A^T$.

(٣٢) $T:\mathbf{M}_{nm}\to\mathbf{M}_{nm}$ حيث $T(A)=A+M$ و M مصفوفة من الدرجة $n\times m$ معطـــاة .

(٣٣) $T:\mathbf{M}_{nn}\to\mathbf{M}_{nn}$ حيث $T(A)=AM$ و M مصفوفة معطاة من الدرجة n .

في التمارين من (٣٤) إلى (٣٩) بين فيما إذا كان التطبيق المبين هو تحويل خطي حيث $\mathbf{V}=\mathbf{C}[a,b]$.

(٣٤) $T:\mathbf{V}\to\mathbb{R}$ حيث $T(f(x))=f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

(٣٥) $T:\mathbf{V}\to\mathbb{R}$ حيث $T(f(x))=\frac{f(a)+f(b)}{2}$.

(٣٦) $T:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ حيث $T(f(x))=\int_a^x f^2(x)\,dx$.

(٣٧) $T:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ حيث $T(f(x))=\int_a^x 4f(x)\,dx$.

(٣٨) $T:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ حيث $T(f(x))=\int_a^x (4+f(x))\,dx$.

(٣٩) $T:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ حيث $T(f(x))=3f(x)-2\int_a^x f(x)\,dx$.

في التمارين من (٤٠) إلى (٤٣) بين فيما إذا كان التطبيق المبين تحويلاً خطياً حيث $\mathbf{V}$ هو فضـاء المتجهات المكون من جميع الدوال التي مجالها $\mathbb{R}$ وقابلة للاشتقاق عدد غير منته من المرات .

(٤٠) $T:\mathbf{V}\to\mathbb{R}$ حيث $T(f(x))=f'(2)$.

(٤١) $T:\mathbf{V}\to\mathbb{R}$ حيث $T(f(x))=f''(4)+3f'(4)$.

(٤٢) $T:\mathbf{V}\to\mathbb{R}$ حيث $T(f(x))=f'(0)+3$.

(٤٣) $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ حيث $T(f(x)) = f''(x) + 4 + \int_{-2}^{x} 3f(x)\,dx$.

(٤٤) إذا كان $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ مؤثراً خطياً بحيث أن $T(1,1) = (1,-2)$ و $T(1,0) = (-4,1)$ فعين قاعدة تعريف $T(x,y)$.

(٤٥) إذا كان $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ تحويلاً خطياً بحيث أن $T(2,-1) = (1,-1,1)$ و $T(1,1) = (0,1,0)$ فعين قاعدة تعريف $T(x,y)$.

(٤٦) إذا كان $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ تحويلاً خطياً بحيث أن $T(1,0,1) = (1,-1,3)$ و $T(1,0,1) = (1,-1,3)$ فاحسب كلاً من $T(8,3,2)$ ، $T(1,2,-3)$ و $T(4,-8,12)$. هل بالإمكان حساب $T(3,0,4)$ من المعلومات السابقة ؟ لماذا ؟

(٤٧) إذا كان $T : \mathbf{V} \to \mathbb{R}^3$ تحويلاً خطياً وكان $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbf{V}$ حيث $T(\mathbf{v}_1) = (1,-1,2)$ ، $T(\mathbf{v}_2) = (0,3,2)$ و $T(\mathbf{v}_3) = (-3,1,2)$ فاحسب $T(2\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2 + 4\mathbf{v}_3)$.

(٤٨) إذا كان $\mathbf{V}$ فضاء متجهات وكان $\mathbf{0} \neq \mathbf{u} \in \mathbf{V}$ فأثبت أن التطبيق $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ المعرف بالقاعدة $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ مؤثر خطي .

(٤٩) إذا كان $T : \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_3$ تحويلاً خطياً بحيث أن :

$T(x-1) = x$ ، $T(x+1) = 0$ و $T(x^2) = x^3$ فاحسب $T(x^2 + x + 1)$ ثم عين $T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2)$.

(٥٠) إذا كان $T : \mathbf{M}_{22} \to \mathbb{R}$ تحويلاً خطياً بحيث أن :

$$T\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 3 \quad ، \quad T\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1 \quad ، \quad T\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad و \quad T\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

فاحسب $T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

(٥١) إذا كان $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ تحويلاً خطياً فاحسب كلاً من $T(\mathbf{v})$ و $T(\mathbf{w})$ إذا علمت أن :

(أ) $T(\mathbf{u}+\mathbf{w})=\mathbf{v}-2\mathbf{w}$ و $T(2\mathbf{v}-\mathbf{w})=2\mathbf{v}$.

(ب) $T(\mathbf{v}+2\mathbf{w})=3\mathbf{v}-\mathbf{w}$ و $T(\mathbf{v}-\mathbf{w})=2\mathbf{v}-4\mathbf{w}$.

(٥٢) عين المصفوفة المعتادة للتحويل الخطي $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ المعرف بالقاعدة $T(x,y)=(3x+2y,5x+4y)$.

(٥٣) عين المصفوفة المعتادة للتحويل الخطي $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ المعرف بالقاعدة $T(x,y)=(8x-4y,-4x+7y)$.

(٥٤) عين المصفوفة المعتادة للتحويل الخطي $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ المعرف بالقاعدة $T(x,y,z)=(2x+3z,3y+2z,2x+5y)$.

(٥٥) عين المصفوفة المعتادة للتحويل الخطي $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ المعرف بالقاعدة $T(x,y,z)=(2x-3y+5z,0)$.

(٥٦) عين المصفوفة المعتادة للتحويل الخطي $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ المعرف بالقاعدة $T(x,y)=(x+7y,3x-2y,4x+5y)$.

(٥٧) عين المصفوفة المعتادة للتحويل الخطي $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ المعرف بالقاعدة $T(x,y,z,t)=(x-y,z-t,y+z)$.

(٥٨) عين المصفوفة المعتادة للتحويل الخطي $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ المعرف بالقاعدة $T(x,y,z,t)=(2x+3y+z,-y+3z-t,3x-5y+t,5x+y+z)$.

(٥٩) لتكن A مصفوفة من الدرجة $m\times n$ وليكن $T_A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ التحويل المصفوفي المعرف بالقاعدة $T_A(\mathbf{v})=A\mathbf{v}$. إذا كانت B مصفوفة أخرى من الدرجة $m\times n$ حيث $T_A=T_B$ فأثبت أن $A=B$.

(٦٠) إذا كان $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ تحويلاً خطياً فأثبت أن $T(x,y)=\alpha x+\beta y$ حيث $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

(٦١) ليكن $T:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ تحويلاً خطياً .

(أ) إذا كان $\mathbf{U}$ فضاءً جزئياً من $\mathbf{V}$ فأثبت أن $T(\mathbf{U})=\{T(\mathbf{u}):\mathbf{u}\in\mathbf{U}\}$ فضاء جزئي من $\mathbf{W}$.

(ب) إذا كان $\mathbf{U}$ فضاءً جزئياً من $\mathbf{W}$ فأثبت أن $T^{-1}(\mathbf{U})=\{\mathbf{v}\in\mathbf{V}:T(\mathbf{v})\in\mathbf{U}\}$ فضاء جزئي من $\mathbf{V}$.

(٦٢) ليكن $T:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ تحويلاً خطياً وليكن $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\in\mathbf{V}$.

(أ) إذا كانت $\{T(\mathbf{v}_1),\ldots,T(\mathbf{v}_n)\}$ مستقلة خطياً فأثبت أن $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ مستقلة خطياً .

(ب) أثبت أن عكس الفقرة (أ) ليس بالضرورة أن يكون صحيحاً .

(٦٣) ليكن كل من $T:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ و $L:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ تحويلاً خطياً وليكن $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n\}$ أساساً للفضاء $\mathbf{V}$ حيث $T(\mathbf{u}_i)=L(\mathbf{u}_i)$ لكل $1\le i\le n$ أثبت أن $T=L$.

(٢ ، ٦) نواة و صورة التحويل الخطي

Kernel and Image of Linear Transformation

ليكن $T:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ تحويلاً خطياً وليكن $\mathbf{w}\in\mathbf{W}$ نعني بالمسألة الخطية العامة هو إيجاد جميع المتجهات $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ التي تحقق المعادلة $T(\mathbf{v})=\mathbf{w}$. فإذا كان التحويل الخطي $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ هو التحويل المصفوفي T_A حيث A مصفوفة من الدرجة $m\times n$ فإن المسألة الخطية هي حل نظام المعادلات الخطية $AX=B$ حيث سبق وأن ناقشنا هذه المسألة في الفصل الثالث . أما إذا كان التحويل الخطي هو تحويل الإشتقاق فإن المسالة الخطية هي عبارة عن معادلات تفاضلية يمكن حلها باستخدام التكامل . وهناك العديد من المسائل الخطية الأخرى التي نتعرض لها في المواضيع المتقدمة من الرياضيات أو في مجالات التطبيقات الرياضية الكثيرة .

لقد قدمنا في الفصل الخامس فضاءات جزئية مرتبطة بمصفوفة A . ومن السهل ايضاً إيجاد الفضاءات الجزئية المقابلة لها للتحويل المصفوفي $T_A(\mathbf{v})=A\mathbf{v}$. على وجه الخصوص إذا كانت A مصفوفة من الدرجة $m\times n$ فإن الفضاء الصفري

تمارين (٢ ، ٦)

في التمارين من (١) إلى (٢٢) عين نواة وصورة التحويل الخطي T وأحسب كلاً من $\text{rank}(T)$ و $\text{nullity}(T)$ وتحقق من مبرهنة البعد .

(١) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ المعرف بالقاعدة :

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_2, x_2 - 3x_3, x_3 + 4x_4) \quad .$$

(٢) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ المعرف بالقاعدة :

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, 2x_2 + 3x_3, -x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + 2x_3) \quad .$$

(٣) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ المعرف بالقاعدة : $T(x, y, z) = (x + y, x + y, 0)$.

(٤) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ المعرف بالقاعدة : $T(x, y, z) = (x, x, y, y)$.

(٥) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ المعرف بالقاعدة : $T(x, y, z) = (3x + y - z, x + 2y + z)$.

(٦) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ المعرف بالقاعدة :

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \quad .$$

(٧) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ المعرف بالقاعدة : $T(x, y, z) = (x + y, x - y + z, y + 2z)$

(٨) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ المعرف بالقاعدة :

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4, x_1 + 3x_3 + x_4, x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4)$$

(٩) $T_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ التحويل المصفوفي حيث $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 6 & 2 \end{bmatrix}$.

(١٠) $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ التحويل المصفوفي حيث $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -6 \end{bmatrix}$.

(١١) $T_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ التحويل المصفوفي حيث $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(١٢) $T_A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ التحويل المصفوفي حيث :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 6 & -1 & 15 \\ 4 & 3 & 8 & 10 & -14 \\ 2 & -3 & 4 & -4 & 20 \end{bmatrix} .$$

(١٣) $T_A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ التحويل المصفوفي حيث

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix} .$$

(١٤) $T : \mathbf{P}_2 \to \mathbf{M}_{22}$ المعرف بالقاعدة :

$$T\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2\right) = \begin{bmatrix} a_1 & a_1 - a_0 \\ a_1 + a_0 & 2a_1 - a_2 \end{bmatrix} .$$

(١٥) $T : \mathbf{M}_{23} \to \mathbf{P}_2$ المعرف بالقاعدة :

$$T\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \left(a_{11} + a_{13}\right)x^2 + \left(a_{21} - a_{22}\right)x + a_{23} .$$

(١٦) $T : \mathbf{M}_{22} \to \mathbf{M}_{22}$ المعرف بالقاعدة $T(A) = XA$ حيث $X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$.

(١٧) $T : \mathbf{M}_{22} \to \mathbf{M}_{22}$ المعرف بالقاعدة $T(A) = AX - XA$ حيث

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} .$$

(١٨) $T : \mathbf{M}_{22} \to \mathbf{M}_{22}$ المعرف بالقاعدة :

$$T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - b + 2c + d & -a + 2c + 2d \\ a - 2b + 5c + 4d & 2a - b + c - d \end{bmatrix} .$$

(١٩) $T : \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_3$ المعرف بالقاعدة : $T(p(x)) = x^2 p'(x)$.

(٢٠) $T : \mathbf{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ المعرف بالقاعدة : $T\left(a + bx + cx^2\right) = (a, b)$.

(٢١) $T : \mathbf{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ المعرف بالقاعدة : $T(p(x)) = (p(0), p(1))$.

(٢٢) $T : \mathbf{P}_n \to \mathbb{R}$ المعرف بالقاعدة : $T\left(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n\right) = a_n$.

(٢٣) بين أياً من التحويلات في التمارين من (١) إلى (٢٢) أحادي وأيها شامل .

(٢٤) نقول إن للتحويل الخطي معكوساً إذا كان شاملاً وأحادياً . بين أياً من التحويلات في التمارين من (١) إلى (٢٢) له معكوس .

(٢٥) إذا كان $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ التحويل الخطي المعرف بالقاعدة :
$T(x, y, z, t) = (x - z + 2t, -2x + y + 2z, y + 4t)$. فما هي قيم k التي تجعل المتجه $(1, 3, k) \in \operatorname{Im} T$ ؟ كذلك عين الشروط التي تجعل $(1, x, 1, y) \in \ker T$.

(٢٦) عين تحويلاً خطياً $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ بحيث تكون صورته مولدة بالمتجهين $(4, 5, 6)$ و $(1, 2, 3)$.

(٢٧) عين تحويلاً خطياً $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ بحيث تكون نواته مولدة بالمتجهين $(0, 1, 1, 1)$ و $(1, 2, 3, 4)$.

(٢٨) إذا كانت B مصفوفة مربعة من الدرجة m ولها معكوس فأثبت أن التحويل الخطي $T : \mathbf{M}_{mn} \to \mathbf{M}_{mn}$ المعرف بالقاعدة $T(A) = BA$ لكل $A \in \mathbf{M}_{mn}$ شامل وأحادي .

(٢٩) ليكن $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ التحويل المصفوفي حيث A مصفوفة من الدرجة $m \times n$. أثبت أن :

(أ) T_A شامل إذا وفقط إذا كان $\operatorname{rank}(A) = m$.

(ب) T_A أحادي إذا وفقط إذا كان $\operatorname{rank}(A) = n$.

(٣٠) استخدم مبرهنة البعد للتحويلات لإثبات أن $\dim \mathbf{W} + \dim \mathbf{W}^{\perp} = \dim \mathbf{V}$.
حيث $\mathbf{W}$ فضاء جزئي من فضاء الضرب الداخلي $\mathbf{V}$ المنتهي البعد .

(٣١) استخدم مبرهنة البعد لإثبات أن $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^T A) = \operatorname{rank}(A A^T)$
لكل مصفوفة A من الدرجة $m \times n$.

(٣٢) إذا كان $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ مؤثراً خطياً فأثبت أن العبارات التالية متكافئة :

(أ) T أحـــادي (ب) T شامل (جـ) T له معكوس (د) $\det A \neq 0$.

(٣٣) ليكن $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ تحويلاً خطياً . أثبت أن

(أ) $\dim(\operatorname{Im}T) \leq n$. (ب) إذا كان $n < m$ فإن T لا يمكن أن يكون شاملاً .

(جـ) إذا كان $n > m$ فإن T لا يمكن أن يكون أحادياً .

(٣٤) ليكن كل من $F:\mathbf{V} \to \mathbb{R}$ و $L:\mathbf{V} \to \mathbb{R}$ تحويلاً خطياً .وليكن $T:\mathbf{V} \to \mathbb{R}^2$ التطبيق المعرف بالقاعدة $T(\mathbf{v}) = (L(\mathbf{v}), F(\mathbf{v}))$ لكـــل $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$

(أ) أثبت أن T تحويل خطي .

(ب) أثبت أن $\ker T = \ker L \cap \ker F$.

(٣٥) إذا كان $T:\mathbf{V} \to \mathbf{W}$ تحويلاً خطياً فأثبت أن جميع العبارات التالية متكافئة :

(أ) $\ker T = \mathbf{V}$ (ب) $\operatorname{Im}T = \mathbf{0}$ (جـ) $T = 0$.

(٣٦) ليكن $\mathbf{V} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a + c = b + d \right\}$.

(أ) ليكن $T : \mathbf{M}_{22} \to \mathbb{R}$ التطبيق المعرف بالقاعدة $T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a + c - b - d$.

أثبت أن T تحويل خطي شامل وأن $\ker T = \mathbf{V}$. استنتج أن $\mathbf{V}$ فضاء جزئي من $\mathbf{M}_{22}$ وأن $\dim \mathbf{V} = 3$.

(ب) أثبت أن التطبيق $S:\mathbf{V} \to \mathbb{R}$ المعرف بالقاعدة $S\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a + c$ تحويل خطي شامل . أحسب $\dim(\ker S)$.

(٣٧) لتكن B مصفوفة مربعة من الدرجة n . وليكن $\mathbf{W} = \{ A \in \mathbf{M}_{mn} : AB = 0 \}$ فضاءً جزئياً من فضاء المتجهات $\mathbf{V} = \{ AB : A \in \mathbf{M}_{mn} \}$.

أثبت أن $\dim \mathbf{W} + \dim \mathbf{V} = mn$.

(٣٨) ليكن $T : \mathbf{M}_{nn} \to \mathbf{M}_{nn}$ التحويل الخطي المعرف بالقاعدة :

$T(A)=A-A^T$.

(أ) أثبت أن $\ker T$ تتكون من جميع المصفوفات المتماثلة .

(ب) أثبت أن $\mathrm{Im}T$ يتكون من جميع المصفوفات المتماثلة تخالفياً .

(٣ ، ٦) جبر التحويلات الخطية

Algebra of Linear Transformations

في هذا البند سنعرف عمليات على التحويلات الخطية ونبين أن هذه العمليات تحقق الخواص نفسها التي تحققها العمليات على المصفوفات . كذلك ندرس التماثل بين فضاءات المتجهات ، وسنبين أيضاً أن مجموعة التحويلات الخطية من فضاء متجهات $\mathbf{V}$ إلى فضاء متجهات $\mathbf{W}$ هي عبارة عن فضاء متجهات بحد ذاتها وهذا الفضاء له أهمية خاصة في الجبر الخطي.

تعريف (٥ ، ٦)

ليكن كل من S و T تحويلاً خطياً من فضاء المتجهات $\mathbf{V}$ إلى فضاء المتجهات $\mathbf{W}$.

وليكن $\alpha\in\mathbb{R}$.

(١) يعرف المجموع $S+T$ بأنه الدالة :

$(S+T)(\mathbf{v})=S(\mathbf{v})+T(\mathbf{v})$ لكل $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$.

(٢) يعرف الفرق $S-T$ بأنه الدالة :

$(S-T)(\mathbf{v})=S(\mathbf{v})-T(\mathbf{v})$ لكل $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$.

(٣) يعرف الضرب بعدد αS حيث $\alpha\in\mathbb{R}$ بأنه الدالة :

$(\alpha S)(\mathbf{v})=\alpha S(\mathbf{v})$ لكل $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$.

$$=\left[\,[(1,1,-3)]_B \,\middle|\, [(2,1,-2)]_B \,\middle|\, [(-1,1,0)]_B\right]$$

$$=\begin{bmatrix} 4 & 4 & -1 \\ -3 & -2 & 0 \\ -3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[T]_C=\left[\,[T(1,0,0)]_C \,\middle|\, [T(0,1,0)]_C \,\middle|\, [T(0,0,1)]_C\right]$$

$$=\left[\,[(2,0,-3)]_C \,\middle|\, [(-1,1,0)]_C \,\middle|\, [(0,1,1)]_C\right]$$

$$=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}_CP_B=\left[\,[(1,1,0)]_C \,\middle|\, [(1,0,1)]_C \,\middle|\, [(0,1,0)]_C\right]$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ومن السهل التحقق من أن ${}_CP_B^{-1}\,[T]_C\;{}_CP_B=[T]_B$. □

تمارين (٤ ، ٦)

(١) إذا كان $B=\{v_1,v_2,v_3\}$ و $C=\{w_1,w_2\}$ أساسين للفضائين V و W على التوالي وكان $T:V\to W$ تحويلاً خطياً يحقق

$T(v_1)=3w_1-5w_2,\ T(v_2)=-w_1+6w_2,\ T(v_3)=4w_2$.

فعين مصفوفة التحويل T بالنسبة للأساسين B و C .

(٢) إذا كان $B=\{v_1,v_2,v_3\}$ هو الأساس المعتاد للفضاء $\mathbb{R}^3$ و $C=\{w_1,w_2,w_3\}$ أساس للفضاء W وكان $T:\mathbb{R}^3\to W$ تحويلاً خطياً يحقق :

$T(x,y,z)=(z-y)w_1-(x+y)w_2+(x-y)w_3$. فاحسب :

(أ) $T(v_3)$ ، $T(v_2)$ ، $T(v_1)$.

(ب) $[T(v_3)]_B$ ، $[T(v_2)]_B$ ، $[T(v_1)]_B$.

(جـ) مصفوفة التحويل T بالنسبة للأساسين B و C .

(٣) ليكن $T : V \to V$ مؤثراً خطياً وليكن $B = \{ v_1 , v_2 , v_3 \}$ أساساً للفضاء V

حيث $[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$. أحسب $T(3v_1 - 4v_2)$.

(٤) ليكن كل من $B = \{ u_1 , u_2 , u_3 , u_4 \}$ و $C = \{ v_1 , v_2 , v_3 , v_4 \}$ أساساً

لفضاء المتجهات V . وليكن $T : V \to V$ مؤثراً خطياً يحقق

$$T(u_1) = 2u_1 - 3u_3 + u_4 , \; T(u_2) = 4u_1 - 5u_4$$

$$T(u_3) = u_1 + 4u_3 , \; T(u_4) = 5u_1 + u_2 - u_4 .$$

(أ) عين $[T]_B$.

(ب) إذا كان $v_1 = u_1 - 2u_2 + u_3 + u_4$ ، $v_2 = u_2 + u_3 - 3u_4$ ، $v_3 = u_3 + 5u_4$

و $v_4 = u_4$ فعين مصفوفة P بحيث يكون $P[v]_C = [v]_B$ لكل $v \in V$.

(جـ) أحسب $[T]_C$.

(د) أكتب $T(v_i)$ كتركيب خطي للمتجهات v_j .

(٥) ليكن V فضاء متجهات وكل من $B = \{ v_1 , v_2 , v_3 \}$ و $C = \{ w_1 , w_2 , w_3 \}$

أساساً للفضاء V وليكن $T : V \to V$ مؤثراً خطياً حيث

$$T(v_1) = v_1 - 3v_3 , \; T(v_2) = 2v_2 + 5v_3 , \; T(v_3) = 2v_1 + 7v_2 + v_3$$

$$w_1 = 2v_1 - v_2 , \; w_2 = -v_1 + v_2 , \; w_3 = -v_1 + v_3$$

$$v_1 = w_1 + w_2 , \; v_2 = w_1 + 2w_2 , \; v_3 = w_1 + w_2 + w_3$$

(أ) أحسب $[T]_B$.

(ب) عين مصفوفة قابلة للعكس P تحقق $[T]_C = P^{-1}[T]_B P$.

(جـ) أحسب $[T]_C$.

(٦) ليكن $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ مؤثراً خطياً ولتكن $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

المصفوفة المعتادة للمؤثر T . عين مصفوفة المؤثر الخطي T بالنسبة للأساس $B = \{(1,2,1),(-1,1,0),(1,0,-1)\}$.

(٧) ليكن $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ مؤثراً خطياً ولتكن $A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

المصفوفة المعتادة للمؤثر T . أحسب $[T]_B$ حيث B هو الأساس

$B = \{(1,1,1,2),(3,3,4,8),(3,4,3,6),(0,1,0\ 1)\}$.

(٨) ليكن $T: \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_2$ مؤثراً خطياً وليكن كل من $B = \{1, 1-x, x-x^2\}$ و $C = \{1+x^2, 1-x^2, 2x\}$ أساساً للفضاء $\mathbf{P}_2$. إذا كان $[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

فاحسب $[T]_C$.

(٩) ليكن $T: \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_2$ مؤثراً خطياً وليكن

$B = \{3x+3x^2, -1+3x+2x^2, 3+7x+2x^2\}$ أساساً للفضاء $\mathbf{P}_2$ حيث

$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 6 & -2 & 4 \end{bmatrix}$.

(أ) أحسب $[T(\mathbf{v})]_B$ لكـــل $\mathbf{v} \in B$.

(ب) أحسب $T(\mathbf{v})$ لكـــل $\mathbf{v} \in B$.

(جـ) عين قاعدة تعريف T .

(د) أحسب $T(1+x^2)$.

في كل من التمارين من (١٠) إلى (٢٠) عين مصفوفة التحويل الخطي T بالنسبة للأساسين الواردين ثم تحقق من صحة المبرهنة (٢٠، ٦) وذلك لكل متجه معطى v

(١٠) $T:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ حيث $T(x,y,z)=(x+2y-z,3x+4y-2z)$ ،
$B=\{(1,0,1),(0,1,0),(1,0,0)\}$ ، $C=\{(1,1),(1,-1)\}, \mathbf{v}=(1,-1,2)$

(١١) $T:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ حيث $T(x,y)=(x-y,0,x+y)$ ،
$B=\{(1,2),(1,1)\}$ ، $C=\{(1,1,1),(1,1,0),(0,1,1)\}, \mathbf{v}=(2,3)$.

(١٢) $T:\ \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ حيث $T(x,y,z,t)=(x+y+z+t,t-x)$ ،
$C=\{(1,1),(0,2)\}$,
$B=\{(1,0,0,1),(0,1,0,1),(1,0,1,0),(1,1,0,0)\}$,
$\mathbf{v}=(1,-1,2,-1)$.

(١٣) $T:\ \mathbf{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ حيث $T(a+bx+cx^2)=(a+b,c)$ ،
$\mathbf{v}=1-x+2x^2$ ، $C=\{(1,-1),(1,1)\}$ ، $B=\{1,x,x^2\}$.

(١٤) $T:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbf{P}_2$ حيث $T(a,b,c)=c+bx+ax^2$ ، $\mathbf{v}=(1,3,-4)$ ،
$C=\{1+x,1+x^2,x\}$ ، $B=\{(1,0,0),(1,1,0),(0,1,1)\}$.

(١٥) $T:\ \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_2$ حيث $T(a+bx+cx^2)=b+2cx$ ، $\mathbf{v}=2-3x+x^2$
$C=\{x,1+x^2,x^2-1\}$ ، $B=\{1,x,x^2\}$.

(١٦) $T:\ P_2 \to \mathbf{M}_{22}$ حيث $T(a+bx+cx^2)=\begin{bmatrix} a & -2c \\ -c & a-b \end{bmatrix}$ ،
$C=\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ ، $B=\{1,x-1,x^2+1\}$ ،
$\mathbf{v}=1+3x-2x^2$.

(١٧) $T:\ \mathbf{P}_4 \to \mathbf{P}_3$ حيث $T(p(x))=p'(x)$ ، $v=1+x^2-3x^2+2x^4$ ،
$C=\{1,x,x^2,x^3\}$ ، $B=\{1,x,x^2,x^3,x^4\}$.

(١٨) $T:\ \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_3$ حيث $T(p(x))=xp(x)$ ، $\mathbf{v}=1+x^2,$
$C=\{1,x,x^2,x^3\}$ ، $B=\{1,x,x^2\}$.

(١٩) $T:\ \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_3$ حيث $T(p(x))=xp(x-3)$ ، $\mathbf{v}=1+x-x^2$ ،
$C=\{1,x,x^2,x^3\}$ ، $B=\{1,x,x^2\}$.

(٢٠) $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ حيث

$T(x,y,z,t)=(3x-2y+z, x+6y+2z+t, -3x+t)$ ،

$B=\{(0,1,1,1),(2,1,-1,-1),(1,4,-1,2),(6,9,4,2)\}$ ،

$\mathbf{v}=(1,3,-4,2)$, $C=\{(0,8,8),(-7,8,1),(-6,9,1)\}$.

في كل من التمارين (٢١) إلى (٢٤) عين مصفوفة المؤثر الخطي بالنسبة إلى الأساس B ، كذلك تحقق من صحة النتيجة (٢١، ٦) وذلك لكل متجه معطى v .

(٢١) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ حيث $T(x,y)=(x+2y, 3x-4y)$ ، $\mathbf{v}=(3,4)$ ،

$B=\{(1,1),(1,-1)\}$.

(٢٢) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ حيث $T(x,y,z)=(x-y, x+y-z, y+z)$ ،

$\mathbf{v}=(1,-3,5)$ ، $B=\{(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1)\}$.

(٢٣) $T: \mathbf{P}_1 \to \mathbf{P}_1$ حيث $T(ax+b)=(a-b)x+a$ ، $\mathbf{v}=2+3x$ ،

$B=\{1+x, 1-x\}$.

(٢٤) $T: \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_2$ حيث $T(ax^2+bx+c)=cx^2+ax+b$ ،

$\mathbf{v}=x^2-3x+4$ ، $B=\{1-x, x-x^2, 1+x^2\}$.

في التمارين من (٢٥) إلى (٢٨) عين مصفوفة المؤثر الخطي T بالنسبة للأساسين B و C ثم جد مصفوفة الانتقال ${}_BP_C$ وتحقق من صحة المبرهنة (٢٢ ، ٦)

(٢٥) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ حيث $T(x,y)=(x-y, x+2y)$ ،

$B=\{(2,1),(1,0)\}, C=\{(1,1),(1,2)\}$.

(٢٦) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ حيث $T(x,y,z)=(x+y-z, x-y, y-z)$ ،

$C=\{(0,0,1),(0,1,1),(1,0,1)\}$ ، $B=\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$.

(٢٧) $T: \mathbf{P}_1 \to \mathbf{P}_1$ حيث $T(a+bx)=(a-b)+(2a-b)x$ ،

$C=\{x, x-1\}$ ، $B=\{1+x, 1-x\}$.

(٢٨) $T: \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_2$ حيث $T(a+bx+cx^2)=c+ax+bx^2$ ،

$C=\{x, 1-x, 1+x^2\}$ ، $B=\{1-x, 1+x, x^2\}$.

(٢٩) ليكن $T : \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_3$ هو التطبيق المعرف بالقاعدة :

$$T(p(x)) = (x+5)p(x).$$

(أ) أحسب $T(2 - x + x^2)$. (ب) أثبت أن T تحويل خطي .

(جـ) عين $[T]_B^C$ حيث B و C هما الأساسين المعتادين للفضائين $\mathbf{P}_2$ ، $\mathbf{P}_3$ على التوالي .

(٣٠) ليكن $T : \mathbf{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ التطبيق المعرف بالقاعدة :

$$T(p(x)) = (p(-1), p(0), p(1)).$$

(أ) أحسب $T(5+3x)$.

(ب) أثبت أن T تحويل خطي .

(جـ) عين مصفوفة التحويل T بالنسبة للأساسين المتعادين للفضائين $\mathbf{P}_2$ ، $\mathbb{R}^3$.

(٣١) ليكن $B = \{1, e^x, e^{2x}\}$ أساساً للفضاء الجزئي $\mathbf{V}$ من فضاء الداول القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$. وليكن $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ المؤثر الخطي المعرف بالقاعدة $T(f(x)) = f'(x)$. أحسب $[T]_B$.

(٣٢) أعد التمرين (٣١) إذا كان $B = \{e^{2x}, x e^{2x}, x^2 e^{2x}\}$.

تمارين (١، ٧)

في التمارين من (١) إلى (١٠) عين القيم المميزة وأساسات الفضاءات المميزة للمصفوفة A .

(١) $A=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

(٢) $A=\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

(٣) $A=\begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

(٤) $A=\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

(٥) $A=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(٦) $A=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -6 & -2 & 0 \\ 19 & 5 & -4 \end{bmatrix}$

(٧) $A=\begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & 8 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

(٨) $A=\begin{bmatrix} 7 & 8 & -4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{bmatrix}$

(٩) $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

(١٠) $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

في التمارين من (١١) إلى (٢٠) عين القيم المميزة وأساسات الفضاءات للمؤثر الخطي T .

(١١) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ حيث $T(x,y)=(2x+3y,2x+7y)$.

(١٢) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ حيث $T(x,y)=(x+y,x+y)$.

(١٣) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ حيث

$T(x,y,z)=(-7x-9y+3z,2x+4y-2z,-3y-z)$.

(١٤) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ حيث $T(x,y,z)=(-2z,x+2y+z,x+3z)$.

(١٥) $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ حيث $T(x,y,z,t)=(2x+3y,x+4y,t,z)$.

(١٦) $T: \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_2$ حيث $T(ax^2+bx+c)=cx^2+bx+a$.

(١٧) $T: \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_2$ حيث

$T(ax^2+bx+c)=(5c+6b+2a)-(b+8a)x+(c-2a)x^2$.

(١٨) $T: \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_2$ حيث

$T(ax^2+bx+c)=(c+4a)-2bx+(3c+2a)x^2$.

(١٩) $T: \mathbf{M}_{22} \to \mathbf{M}_{22}$ حيث $T(A)=A^T$.

(٢٠) $T: \mathbf{M}_{22} \to \mathbf{M}_{22}$ حيث $T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2c & a+c \\ b-2c & d \end{bmatrix}$.

(٢١) إذا كانت A مصفوفة مثلثية (علوية أو سفلية) من الدرجة n فأثبت أن القيم المميزة للمصفوفة A هي عناصر القطر الرئيسي . ثم استنتج أن للمصفوفة A معكوس إذا وفقط إذا كانت جميع قيمها المميزة غير صفرية .

(٢٢) إذا كانت λ قيمة مميزة للمصفوفة A فأثبت أن λ^k قيمة مميزة للمصفوفة A^k حيث k عدد صحيح موجب .

(٢٣) إذا كانت A مصفوفة من الدرجة 2 فأثبت أن :

$h(\lambda)=\lambda^2-tr(A)\lambda+\det(A)$.

(٢٤) إذا كانت λ قيمة مميزة للمصفوفة A فأثبت أن $\lambda-4$ قيمة مميزة للمصفوفة $A-4I$.

(٢٥) أثبت أن القيم المميزة للمصفوفة A هي نفس القيم المميزة للمصفوفة A^T . هل متجهات A المميزة هي نفس متجهات A^T المميزة ؟

(٢٦) إذا كانت A مصفوفة من الدرجة n حيث n عدداً فردياً فأثبت أن للمصفوفة A قيمة مميزة حقيقية واحدة على الأقل .

(٢٧) إذا كانت A مصفوفة تحقق $A^3=A$ فأثبت أن القيم المميزة للمصفوفة A هي $0, \pm 1$.

(٢٨) إذا كانت A مصفوفة متلاشية القوى (أي أن $A^k = 0$ حيث $k \in \mathbb{Z}^+$) فأثبت أن 0 هي القيمة المميزة الوحيدة للمصفوفة A .

(٢٩) إذا كانت λ^2 قيمة مميزة للمصفوفة A^2 فهل من الضروري أن تكون λ قيمة مميزة للمصفوفة A ؟

(٣٠) إذا كانت كل من λ_1 و λ_2 قيمة مميزة للمصفوفة A فهل من الضروري أن تكون $\lambda_1 + \lambda_2$ قيمة مميزة للمصفوفة A ؟

(٣١) لتكن العلاقة $\sim$ معرفة على $\mathbf{M}_{nn}$ كالتالي : $A \sim B$ إذا كانت A تشابه B . أثبت أن $\sim$ علاقة تكافؤ .

(٣٢) إذا كانت A و B مصفوفتان متشابهتان فأثبت أن :

(أ) $tr(A) = tr(B)$. (ب) $rank(A) = rank(B)$.

(٣٣) إذا كانت A و B مصفوفتان متشابهتان حيث $A = P^{-1} B P$ فأثبت أن $A^n = P^{-1} B^n P$ لكل $n \in \mathbb{Z}^+$.

(٣٤) ليكن $F : \mathbf{M}_{nn} \to \mathbf{M}_{nn}$ تطبيقاً يحقق $F(AB) = F(BA)$ لكل $A, B \in \mathbf{M}_{nn}$. إذا كانت A و B متشابهتان فأثبت أن $F(A) = F(B)$.

(٣٥) إذا كان $\det A = \det B$ فهل من الضروري أن تكون المصفوفتان A و B متشابهتين ؟

(٣٦) إذا كانت A و B متشابهتين فأثبت أن A^2 و B^2 متشابهتان .

(٣٧) أثبت أن $\lambda = 0$ قيمة مميزة للمصفوفة A إذا وفقط إذا كانت A ليس لها معكوس .

(٣٨) لتكن A مصفوفة لها معكوس . أثبت أن المتجهات المميزة للمصفوفة A هي نفس المتجهات المميزة للمصفوفة A^{-1} . ما هي العلاقة بين القيم المميزة A والقيم المميزة للمصفوفة A^{-1} .

(٣٩) إذا كان $T:\mathbf{C}[0,1]\to\mathbf{C}[0,1]$ المؤثر الخطي المعرف بالقاعدة : $T(f)=f'$ فأثبت أن $\lambda=1$ قيمة مميزة مقابلة للمتجه المميز $f(x)=e^{x}$.

(٤٠) إذا كان T هو المؤثر الخطي المقدم في التمرين (٣٩) فعين القيمة المميزة المقابلة للمتجه المميز $f(x)=e^{-2x}$.

(٢ ، ٧) الإستقطار

Diagonalization

لقد رأينا في البند (٤ ، ٦) أن مصفوفة المؤثر الخطي $T:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ تعتمد اعتماداً كلياً على اختيار أساس للفضاء $\mathbf{V}$، ولقد رأينا ايضاً أن كلاً من A و B مصفوفة للمؤثر الخطي T بالنسبة إلى أساسين للفضاء $\mathbf{V}$ (من الممكن أن يكونا مختلفين) إذا وفقط إذا كانت A و B متشابهتين ، أي أنه يوجد مصفوفة لها معكوس P بحيث أن $B=P^{-1}AP$. سنعالج في هذا البند المسألتين المتكافئتين التاليتين :

(١) ليكن $T:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ مؤثراً خطياً . المطلوب هو ايجاد أساس B للفضاء $\mathbf{V}$ بحيث تكون $[T]_B$ مصفوفة قطرية .

(٢) لتكن A مصفوفة مربعة . المطلوب ايجاد مصفوفة قابلة للعكس P بحيث يكون $P^{-1}AP$ مصفوفة قطرية .

وتسمى أي من هاتين المسألتين مسألة الإستقطار للمؤثر الخطي T أو المصفوفة A.

لقد رأينا أن علاقة التشابه على المصفوفات المربعة هي علاقة تكافؤ وعلاوة على ذلك فهي تحافظ على الكثير من الخواص والتي ندونها هنا لسهولة الرجوع إليها عند الحاجة .

(١) $\det(A)=\det(P^{-1}AP)$.

(٢) A لها معكوس إذا وفقط إذا كانت $P^{-1}AP$ كذلك .

$\{[-1,-1,1,0]^T,[-1,2,0,1]^T\}$ أساس للفضاء E_2 . ولذا فإن A قابلة للاستقطار وأن $P=\begin{bmatrix}1&3&-1&-1\\0&2&-1&2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$. □

مثال (١٥ ، ٧)

ابحث قابلية المصفوفة A للإستقطار حيث $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$.

الحل

القيم المميزة للمصفوفة هي $\lambda_1=1$ (مكرر مرتين) و $\lambda_2=0$. الآن عندما $\lambda=1$ فإن

$I-A=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ وبالتالي فإن $n-\text{rank}(I-A)=3-2=1\neq 2$ وعليه فإن A

غير قابلة للإستقطار . □

تمارين (٢ ، ٧)

في التمارين من (١) إلى(٣) استخدم العلاقة $A=PDP^{-1}$ لحساب قوى A المعطاة

(١) $P=\begin{bmatrix}5&7\\2&3\end{bmatrix}$ ، $D=\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}$ ، احسب A^4 .

(٢) $P=\begin{bmatrix}-1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ ، $D=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ ، احسب A^{13} .

(٣) $P=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ ، $D=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$ ، احسب A^{4} .

في التمارين من (٤) إلى (١٩) بين فيما إذا كانت المصفوفة A قابلة للاستقطار وفي حالة كونها كذلك عين مصفوفة P بحيث تكون $P^{-1}AP$ قطرية .

(٤) $A=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & -1\end{bmatrix}$

(٥) $A=\begin{bmatrix}4 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$.

(٦) $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}$

(٧) $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 6 & -1\end{bmatrix}$.

(٨) $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 6 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

(٩) $A=\begin{bmatrix}2 & -6 & -6\\ -1 & 1 & 2\\ 3 & -6 & -7\end{bmatrix}$.

(١٠) $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 6\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$

(١١) $A=\begin{bmatrix}-1 & 4 & -2\\ -3 & 4 & 0\\ -3 & 1 & 3\end{bmatrix}$.

(١٢) $A=\begin{bmatrix}2 & 2 & -1\\ 1 & 3 & -1\\ -1 & -2 & 2\end{bmatrix}$

(١٣) $A=\begin{bmatrix}7 & 4 & 16\\ 2 & 5 & 8\\ -2 & -2 & -5\end{bmatrix}$.

(١٤) $A=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 1 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$

(١٥) $A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$.

لا يكتب في هذا الهامش

س ـ حدد فيما إذا كانت A قابلة للتحويل إلى الصورة القطرية. إذا كانت كذلك، أوجد المصفوفة P التي تحول A للصورة القطرية وعيّن $P^{-1}AP$ ثم أحسب A^{13}

$$A=\begin{bmatrix}2&-6&-6\\-1&1&2\\+3&-6&-7\end{bmatrix}$$

الحل: ١ ـ نوجد القيم الذاتية بحل المعادلة $|\lambda I-A|=0$

$$\begin{vmatrix}\lambda-2&6&6\\+1&\lambda-1&-2\\-3&6&\lambda+7\end{vmatrix}=|\lambda I-A|=0$$

$\Leftarrow \lambda_1=-2$ ، $\lambda_2=-1$ مكرر مرتين (القيم الذاتية)

٢ ـ نوجد المتجهات الذاتية المقابلة للقيم الذاتية:

$\lambda_1=-2$: نحل النظام $(-2I-A)X=\underline{0} \Leftarrow$ نحله بجاوس

نجد $X=\begin{bmatrix}t\\-\frac{1}{3}t\\t\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}1\\-\frac{1}{3}\\1\end{bmatrix} \Leftarrow$ متجه ذاتي مقابل لـ λ_1 $\begin{bmatrix}+1\\-1/3\\1\end{bmatrix}$

$\lambda_2=-1$: نحل النظام $(-1.I-A)X=\underline{0} \Leftarrow (-I-A)X=\underline{0}$ نحله بجاوس

نجد $X=\begin{bmatrix}2s+2t\\s\\t\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix} \Leftarrow$ المتجهان $\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$

متجهان ذاتيان مقابلان لـ $\lambda_2=$

المتجهات الذاتية النظامية $\left\{\begin{bmatrix}1\\-\frac{1}{3}\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$ مستقلة خطياً (تأكد من ذلك)

$\Leftarrow$ A قابلة للتحويل للصورة القطرية.

المصفوفة P هي: $P=\begin{bmatrix}2&2&1\\1&0&-\frac{1}{3}\\0&1&1\end{bmatrix}$

نحسب $P^{-1}AP$:

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-1&3&2\\3&-6&-5\\-3&6&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-6&-6\\-1&1&2\\3&-6&-7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2&1\\1&0&-\frac{1}{3}\\0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-3&-2\\-3&6&5\\6&-12&-12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2&1\\1&0&-\frac{1}{3}\\0&1&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$$

(لاحظ عناصر القطر هي القيم الذاتية لـ A)

$$(P^{-1}AP)^2=(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)=P^{-1}A(I)AP=P^{-1}A^2P \ldots$$

عموماً نستطيع إثبات أن

$$(P^{-1}AP)^{13}=P^{-1}A^{13}P$$

(بالاستنتاج الرياضي)

لكن

$$(P^{-1}AP)^{13}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}^{13}$$

$$=\begin{bmatrix}(-1)^{13}&0&0\\0&(-1)^{13}&0\\0&0&(-2)^{13}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-8192\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P^{-1}A^{13}P=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-8192\end{bmatrix}\Rightarrow A^{13}P=P\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-8192\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$A^{13}=P\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-8192\end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$$

انظر س٢ ←

لا يكتب في
هذا الهامش

س٢: حدد فيما إذا كانت B قابلة للتحويل للصورة القطرية. إذا كانت كذلك، فأوجد المصفوفة P التي تحول B إلى الصورة القطرية وعين $P^{-1}BP$، ثم أحسب B^{10}

$$B=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&1&2\end{bmatrix}$$

الحل:

١- نوجد القيم الذاتية بحل المعادلة $|\lambda I-B|=0$ $\begin{vmatrix}\lambda-3&0&0\\0&\lambda-2&0\\0&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=$

$\Leftarrow$ $\lambda_1=3$ ، $\lambda_2=2$ مكرر مرتين (القيم الذاتية)

٢- نوجد المتجهات الذاتية المقابلة للقيم الذاتية:

$\lambda_1=3$: نحل النظام $(3I-B)X=0$ $\Leftarrow$ نعمل بجاوس

نجد $X=\begin{bmatrix}t\\0\\0\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ $\Leftarrow$ $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ متجه ذاتي مقابل لـ λ_1

$\lambda_2=2$: نحل النظام $(2I-B)X=0$ $\Leftarrow$ نعمل بجاوس

نجد $X=\begin{bmatrix}0\\s\\s\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$ $\Leftarrow$ $\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$ متجه ذاتي مقابل لـ λ_2

المتجهات الذاتية $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$ مستقلان خطياً (تأكد من ذلك)

إلا أن عددها أقل من درجة $B=3$

$\Leftarrow$ B غير قابلة للتحويل للصورة القطرية

وبالتالي لا إجابات على المطالب التالية

(١٦) $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (١٧) $A=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

(١٨) $A=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (١٩) $A=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

(٢٠) إذا كانت $A=\begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 5 \\ -6 & -6 & -5 \end{bmatrix}$ فأثبت أن A قابلة للاستقطار ثم عين P بحيث تكون $P^{-1}PA$ قطرية ، كذلك عين مصفوفة B بحيث يكون $B^2 = A$.

(٢١) إذا كانت A لها معكوس قابلة للاستقطار فاثبت A^{-1} أن قابلة للاستقطار .

(٢٢) إذا كانت A قابلة للاستقطار فأثبت أن A^T قابلة للاستقطار.

(٢٣) إذا كانت A قابلة للاستقطار فأثبت أن A^k كذلك لكل عدد صحيح موجب k .

(٢٤) إذا كانت كل من A و B مصفوفة من الدرجة حيث B لها معكوس و AB قابلة للاستقطار فأثبت أن BA قابلة للاستقطار .

(٢٥) أثبت أن المصفوفة $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ قابلة للإستقطار إذا كان $-4bc < (a-d)^2$ وغير قابلة للإستقطار إذا كان $-4bc > (a-d)^2$.

(٢٦) إذا كانت A مصفوفة قابلة للإستقطار ولها القيم المميزة $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ فأثبت أن $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$.

(٢٧) إذا كانت A مصفوفة غير صفرية متلاشية القوى فأثبت أن A غير قابلة للاستقطار.