تصحيح

جامعة الملك سعود King Saud University	كلية العلوم – قسم الرياضيات	الاختبار الشهري الأول للمقرر 343 ريض للفصل الصيفي 1437-1436 هـ
الإسم: .... الرقم الجامعي:.............................. أستاذ المقرر:...............................		الزمن: ساعتان. الدرجة:

ملاحظات : 1. عدد الورقات 4 و ورقة مسودة 2. ممنوع استخدام الالة الحاسبة.

السؤال الأول (7 درجات):

لتكن $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 6 & 7 & 4 & 8 & 9 & 3 & 10 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_{10}$ تبديلا.

(1) أوجد σ^{-1} . (درجة)

تبديلا (permutation) $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 9 & 7 & 4 & 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

(2) اكتب σ كتحصيل دورات منفصلة. (درجتان)

$$\sigma = (1,5,8,10)(2,6,9)(3,7)$$

(3) التبديل σ هو زوجي أم فردي ؟ علل إجابتك. (درجة)

- $(1,5,8,10)$ تكتب كتحصيل 3 ناقلات (3-transpositions)
- $(2,6,9)$ تكتب كتحصيل ناقلتان (2-transpositions)

فإن σ كتحصيل 6 ناقلات فهي زوجي.

(4) أوجد رتبة σ . (درجة)

(الرتبة لـ σ) $O(\sigma) = \operatorname{lcm}(4,3,2) = 12$

يعني $\sigma^{12} = I$

(5) أوجد σ^{147} . (درجتان)

بما أن $147 = 12 \times 12 + 3$ فإن

$\sigma^{147} = \sigma^{12\times12+3} = (\sigma^{12})^{12} \cdot \sigma^3 = I \cdot \sigma^3$. يعني أن

$\sigma^{147} = \sigma^3 = (1,5,8,10)^3 (2,6,9)^3 (3,7)^3$

- $(1,5,8,10)^3 = (1,5,8,10) \circ (1,5,8,10) \circ (1,5,$
  $= (10,1,5,8)$
- $(2,6,9)^3 = I$
- $(3,7)^3 = (7,3)$

فإن $\boxed{\sigma^3 = (10,1,5,8)(7,3)}$

$\boxed{1\ 5\ 8\ 10}$
$5\ 8\ 10\ 1 \leftarrow$
$8\ 10\ 1\ 5 \leftarrow$
$\boxed{10\ 1\ 5\ 8} \leftarrow$

$\boxed{2\ 6\ 9}$
$6\ 9\ 2 \leftarrow$
$9\ 2\ 6 \leftarrow$
$\boxed{2\ 6\ 9} \leftarrow$

$\boxed{1\ 3\ 7}$
$7\ 3 \leftarrow$
$3\ 7 \leftarrow$
$\boxed{7,3} \leftarrow$

يعني $\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 2 & 7 & 4 & 8 & 6 & 3 & 10 & 9 & 1 \end{pmatrix}$

السؤال الثاني (6 درجات):

لتكن $SL(2,\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ; a,b,c,d \in \mathbb{Z} \ \& \ ad - bc = 1 \right\}$.

(1) أثبت أن : $SL(2,\mathbb{Z}) \leq GL(2,\mathbb{Z})$ حيث $GL(2,\mathbb{Z})$ الزمرة الخطية العامة من الدرجة 2. (درجتان)

• $SL(2,\mathbb{Z}) \neq \emptyset$ لأن $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$

• لنأخذ $A, B \in SL(2,\mathbb{Z})$ ولنثبت أن $AB^{-1} \in SL(2,\mathbb{Z})$

$$\det(AB^{-1}) = (\det A)\ \det(B^{-1})$$
$$= (\det A)\ \frac{1}{\det B}$$

بما أن $\det A = 1$ و $\det B = 1$ فإن $\det(AB^{-1}) = 1$

عندئذ $AB^{-1} \in SL(2,\mathbb{Z})$

(2) لتكن $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. بيّن أن $O(A) < \infty$, $O(B) < \infty$ لكن $O(AB) = \infty$.

(4 درجات)

• $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$

فإن $A^4 = I$ عندئذ $O(A) = 4$.

• $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$B^3 = B^2 . B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ عندئذ $O(B) = 3$ •

• $AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(AB)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

يمكن الإثبات باستخدام الاستقراء الرياضي أن

$(AB)^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I + \begin{pmatrix} 0 & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ لذا فإن $O(AB) = \infty$.

السؤال الثالث (6 درجات):

أثبت ما يلي:

(1) إذا كانت G زمرة حيث $a^2 = e$ لكل $a \in G$ فان G ابدالية. (درجتان)

ليكن $x, y \in G$. بما أن $x^2 = e$ فان $x = x^{-1}$

كذلك $y^2 = e$ فان $y = y^{-1}$ أيضا $xy = (xy)^{-1}$

$$xy = x^{-1}y^{-1} = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = yx$$

فنستنتج أن G هي ابدالية.

(2) إذا كانت $G = <a>$ زمرة دورية فإن G ابدالية. (درجتان)

ليكن $x, y \in G$. بما أن $G = <a>$ فإنه يوجد $k \in \mathbb{Z}$ بحيث $x = a^k$

كذلك يوجد $l \in \mathbb{Z}$ بحيث $y = a^l$

$$xy = a^k . a^l = a^{k+l} = a^{l+k} = a^l . a^k = yx$$

فنستنتج أن G هي زمرة ابدالية.

(3) كل زمرة جزئية من زمرة دورية يجب أن تكون دورية. (درجتان)

نفترض أن $G = <a>$ و $H \leq G$ (H زمرة جزئية من G).

- إذا كانت $H = \{e\}$ فان $H = <e>$ فانها دورية.
- إذا كانت $H \neq \{e\}$ إذن يوجد $x \in H$ بحيث $x = a^{n_0}$ حيث $n_0 = \min\{n, a^n \in H\}$

ولنثبت أن $H = <a^{n_0}>$

نأخذ $y \in H$ فان $y = a^k$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

$k = n_0 q + r$ حيث $0 \leq r < n_0$

$a^r = a^{k - n_0 q} = a^k . (a^{n_0})^{-q} \in H$ إذن $r = 0$ و بالتالي $H = <a^{n_0}>$.

السؤال الرابع (5 درجات):

(1) نصّ نظرية لاجرانج. (درجتان)

"إذا كانت H زمرة جزئية من زمرة منتهية G فإن $|G| = [G : H] \cdot |H|$ ومن ثمة $|H| \mid |G|$ ".

(2) هل يوجد زمرتين جزئيتين $H,K \leq G$ حيث $|G|=24, |H|=12, |K|=8$ و $|H\cap K|=2$ ؟
(3 درجات)

لا، لأن: نعلم أن

$$|HK| = \frac{|H||K|}{|H\cap K|} = \frac{12\times 8}{2} = \frac{96}{2} = 48 > |G|$$

$\lightning$

$HK \subseteq G$

السؤال الخامس (6 درجات):

بيّن أيًا من العبارات التالية صحيحة وأيها خاطئة مع تعليل إجابتك:

(1) كل من عناصر الزمرة الدورية G يولد الزمرة G. (درجتان)

لا، لأن إذا كان $G=\langle a\rangle$ و $|G|=n$ فإن $G=\langle a^t\rangle$ حيث $\gcd(t,n)=1$

(2) S_n (زمرة التبديلات لمجموعة ذات n عنصر) ليست دورية لكل عدد صحيح $n \geq 2$. (درجتان)

لا، S_2 هي زمرة دورية.

$S_2 = \langle (1,2)\rangle$

(3) إذا كانت G رتبتها عدد أولي p فإن G دورية. (درجتان)

نعم، لأن عندما نأخذ $x\in G$ و $x\neq e$ فإن $H=\langle x\rangle$ هي زمرة جزئية من G باستخدام نظرية لاجرانج فإن $|H| \mid |G|=p$ وبما أن $|H|>1$ فإن $H=G$ يعني $G=\langle x\rangle$.