جامعة الملك سعود — الامتحان النهائي لمقرر (٣٨٤) رضي — يوم

كلية العلوم — الفصل الأول للعام الدراسي — الزمن: ثلاث ساعات.

قسم الرياضيات — ١٤٢٨ - ١٤٢٩هـ.

السؤال الأول: أ) نفرض أن f دالة محدودة على فترة $I=[a,b]$. إذا كانت f دالة قابلة للتكامل على $I=[a,b]$، برهن أنه لكل $\epsilon>0$ يوجد تجزيء P_ϵ لـ I بحيث يكون

$$U(f,P_\epsilon)-L(f,P_\epsilon)<\epsilon \qquad (*)$$

ب) إذا كانت $f(x)=x^2$، حيث $0\le x\le 1$. برهن أنه لكل $\epsilon>0$ يوجد تجزيء P_ϵ لـ $I=[0,1]$ بحيث تكون المتراجحة $(*)$ محققة.

السؤال الثاني: أ) لنعرف الدالة

$$f(x)=\begin{cases} x\ ; & 0\le x\le 1\ ,\ x\in Q \\ 0\ ; & 0\le x\le 1\ ,\ x\notin Q \end{cases}$$

ولنأخذ تجزيء $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ للفترة $I=[0,1]$. نعلم أنه يوجد $y_i\in Q$ بحيث يكون

$$x_i<\frac{x_{i+1}+x_i}{2}<y_i<x_{i+1}\ ,\quad \text{حيث}\quad 0\le i\le n-1$$

استخدم هذه المتراجحة في برهان $U(f)\ge\frac{1}{2}$ ثم استنتج أنه f غير قابلة للتكامل على $[0,1]$.

ب) إذا كانت $a>0$، ولنعرف المتتالية $(f_n(x))=\left(\frac{x}{x+n}\right)$. برهن أن تقارب النهاية $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ بانتظام على $[0,a]$ وغير متقاربة بانتظام على الفترة $[0,\infty)$.

السؤال الثالث: أ) إذا كانت $f_n(x)\in R[a,b]$ لكل $n\in N$ وكانت $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام على $[a,b]$، برهن أن $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ قابلة للتكامل على $[a,b]$ وأن

$$\int_a^b\Big[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\Big]dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx.$$

ب) إذا كانت $E_i\in \mathcal{M}$، حيث $i\in N$ و $E_i\cap E_j=\phi$ ، $i\neq j$.

برهن باستخدام طريقة الاستنتاج الرياضي أن

$$m^*\Big[A\cap\big(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\big)\Big]=\sum_{i=1}^{n}m^*(A\cap E_i)\quad \text{لكل}\quad A\subseteq R.$$

السؤال الرابع: أ) إذا كانت $E\subseteq \mathbb{R}$ وكانت $c\in\mathbb{R}$، برهن أن

$$m^*(E+c)=m^*(E)$$

ب) نفرض أن $E\in\mathcal{M}$. برهن أنه لكل $\epsilon>0$ توجد مجموعة مفتوحة G، بحيث $E\subseteq G$ وأن $m^*(G\setminus E)<\epsilon$

ج) إذا كانت $F\in\mathcal{M}$ وكانت $G\subseteq\mathbb{R}$.
نعلم أن $F\Delta G=(F\setminus G)\cup(G\setminus F)$. فإذا كانت $m^*(F\Delta G)=0$
برهن أن $G\in\mathcal{M}$.

السؤال الخامس: أ) إذا كانت الدالتان $f,g:\Omega\to\overline{\mathbb{R}}$ متساويتين a.e (أي $f=g$ a.e)
وكانت f قابلة للقياس، برهن أن g قابلة للقياس. حيث $\Omega\in\mathcal{M}$

ب) إذا كانت $f:\Omega\to\overline{\mathbb{R}}$ قابلة للقياس، برهن أن $|f|$ قابلة للقياس

ج) نفرض أن $\psi\in S_+(\Omega)$ وأن $(\varphi_n)\in S_+(\mathbb{R})$، بحيث أن (φ_n) متتالية
متزايدة وأن $\varphi_n\to\psi$. برهن أن

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\varphi_n\,dm=\int_\Omega\psi\,dm.$$