بسم الله الرحمن الرحيم

قسم الرياضيات	الاختبار النهائي	الفصل الأول: ١٤٢٩-١٤٣٠
كلية العلوم	(٣٨٤ ريض)	الزمن: ٣ ساعات

السؤال الأول:

(i) لتكن $f \in R(a,b)$ قابلة للاشتقاق عند $c \in [a,b]$. إذا كان: $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ لكل $x \in [a,b]$، فأثبت أن F قابلة للاشتقاق عند c و أن $F'(c) = f(c)$.

(ii) إذا كانت f متصلة على $[a,b]$، فأثبت أن $f \in R(a,b)$.

(iii) افرض أن $f : [0, \pi/2] \to (0, \infty)$ متصلة. إذا كان: $f(x)^2 = \cos^2 x \cdot \int_a^x f(t)\,dt$ لكل $x \in [0, \pi/2)$، فاحسب $f(x)$. ارشاد: اشتق الجانبين.

السؤال الثاني:

(i) افرض أن $f_n \in R(a,b)$ لكل $n \in \mathbb{N}$ و أن (f_n) تتقارب بانتظام من f على $[a,b]$. أثبت أن $f \in R(a,b)$ و أن $\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt$.

(ii) إذا كان $g_n(x) = \dfrac{n}{(x-n)^2 + n^2}$، أثبت أن (g_n) تتقارب بانتظام من دالة g على $[0, \infty)$ وأن

$$\int_0^\infty g(x)\,dx \neq \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty g_n(x)\,dx.$$

هل يناقض هذا ما ورد في (i)؟

السؤال الثالث:

(i) إذا كان R هو نصف قطر المتسلسلة $\sum_n a_n x^n$، فأثبت أنها متقاربة بانتظام على $[-r, r]$ لكل $0 < r < R$.

(i) احسب نصف قطر المتسلسلة $\sum_n \dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)x^n}{2^n\, n!}$. إذا علمت أنها متسلسلة ماكلوران للدالة $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$، فأثبت أن $\sin^{-1} x = \sum_0^\infty \dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)x^{2n+1}}{2^n\, n!(2n+1)}$ لكل $x \in (-1,1)$.

(ii) ليكن R_1, R_2 هما نصفا قطرا المتسلسلتين $\sum_n b_n x^n$, $\sum_n a_n x^n$ وافرض أن $R_1 < R_2$. أثبت أن نصف قطر تقارب $\sum_n (a_n + b_n) x^n$ يساوي R_1.

السؤال الرابع:

(i) إذا كان $E \subseteq \mathbb{R}$ و $k \in \mathbb{R}$، فأثبت أن: $m^*(kE) = |k| m^*(E)$.

(ii) وضح بدون براهين كيف يعرف تكامل لبيق لدالة، $\int_\Omega f \, dm$ ، لدالة قابلة للقياس على Ω.

(iii) أفرض أن f لابلة للتكامل على $\mathbb{R}$ وأن $k \neq 0$. إذا كان $g(x) = f(x/k)$، فأثبت أن $\int_{\mathbb{R}} g \, dm = |k| \int_{\mathbb{R}} f \, dm$.

ارشاد: ابتداءً خذ $f = \chi_E$.

السؤال الخامس:

(i) أورد نص تمهيد فاتو و استنتج نظرية التقارب المسقوف.

(ii) لتكن $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ دالة محدودة تحقق التالي:

(أ) لكل $y \in [c,d]$، الدالة $x \mapsto f(x,y)$ قابلة للتكامل على $[a,b]$.

(ب) لكل $x \in [a,b]$، الدالة $y \mapsto f(x,y)$ متصلة على $[c,d]$.

أثبت اتصال الدالة

$$F(y) = \int_a^b f(x,y) \, dm(x), \; y \in [c,d].$$

السؤال السادس:

أي التقارير التالية صائب وأيها خاطئ. إما أن تثبت التقرير او تبرز مثالاً مناقضاً.

(i) إذا كان $|f|$ قابلة لقياس لبيق، فإن f قابلة لقياس لبيق.

(ii) إذا كانت E غير قابلة للعد، فإن $m^*(E) > 0$.

(iii) إذا كانت f متصلة على $[a,b]$ و $g = f \; (a.e.)$ على $[a,b]$، فإن $g \in R(a,b)$.

(iv) إذا كانت E_n قابلة للقياس و $E_n \downarrow \varnothing$، فإن $m(E_n) \to 0$.

(v) إذا كانت f_n قابلة لقياس لبيق على Ω، فإن $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ قابلة لقياس لبيق على Ω.

الإجابة النموذجية للاختبار النهائي للمقرر (٣٨٤) ريض، الفصل الأول ١٤٢٩- ١٤٣٠

السؤال الأول:

(i) راجع الكتاب المقرر" التحليل الحقيقي، الجزء الثاني" ، صفحة ٣٩.

(ii) راجع الكتاب المقرر" التحليل الحقيقي، الجزء الثاني" ، صفحة ١٦.

(iii) ضع $y=f(x)$. باشتقاق الجانبين نحصل على

$$2yy'=y\cos^2 x-2\cos x\sin x\cdot y^2\sec^2 x$$

او

$$y'+\tan x\cdot y=\cos^2 x$$

و هي معادلة خطية فيما عامل المكاملة هو $e^{\int \tan x\,dx}=\sec x$ فيكون حلها هو $y\sec x=\frac{1}{2}\sin x+C$

و بملاحظة أن $y=0$ عندما $x=0$ نجد أن $C=0$ ونخلص إلى أن $f(x)=y=\frac{1}{2}\sin x\cos x$.

السؤال الثاني:

(i) راجع الكتاب المقرر" التحليل الحقيقي، الجزء الثاني" ، صفحة ١٠٣.

(ii) $0\le g_n(x)\le 1/n,\ \forall n,\forall x$ وعليه فإن $g_n\xrightarrow{u}0$.

$\int_0^\infty g_n=\lim_{L\to\infty}\left[\tan^{-1}\left(\frac{x-n}{n}\right)\right]_0^L=\pi/4$ وعليه $\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty g_n=\pi/4$ بينما $\int_0^\infty g=0$. هذا لايناقض ما جاء في الجزء الأول إذ أن الفترة غير محدودة.

السؤال الثالث:

(i) راجع الكتاب المقرر" التحليل الحقيقي، الجزء الثاني" ، صفحة ١١٨.

(ii) $R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=1$. بفضل التقارب المنتظم نجد

$$\sin^{-1}x=\int_0^x\frac{1}{1-t^2}\,dt=\int_0^x\sum_0^\infty\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)t^{2n}}{2^n\ n!}\,dt$$

$$=\sum_0^\infty\int_0^x\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)t^{2n}}{2^n\ n!}\,dt=\sum_0^\infty\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)x^{2n+1}}{2^n\ n!(2n+1)}$$

(iii) افرض أن R هو نصف قطر تقارب $\sum_n(a_n+b_n)x^n$. سنثبت استحالة كل من $R<R_1$ و $R>R_1$.

في الحالة الأولى اختر $R_1>x>R$. عندئذ تتقارب كل من $\sum_n a_nx^n$ و $\sum_n b_nx^n$

بينما تتباعد $\sum_n(a_n+b_n)x^n$ وهذا مستحيل.

في الحالة الثانية اختر $R_1 < x < \min\{R, R_2\}$. حينئذ تتقارب كل من $\sum_n b_n x^n$ و $\sum_n (a_n + b_n) x^n$ بينما تتباعد $\sum_n a_n x^n$ وهذا أيضا مستحيل.

السؤال الرابع:

(i) راجع الكتاب المقرر" التحليل الحقيقي، الجزء الثاني" ، صفحة ١٥١.

(ii) راجع الكتاب المقرر" التحليل الحقيقي، الجزء الثاني" ، صفحة ١٩٠-١٩٨.

(iii) *إذا $f = \chi_E$، فإن $g = \chi_{kE}$ فيكون

$$\int_{\mathbb{R}} g dm = m(kE) = |k| m(E) = |k| \int_{\mathbb{R}} f dm$$

* من خطية التكامل نحصل على المساواة إذا كانت $f \in \mathcal{S}_+(\mathbb{R})$.

* افرض أن $f \in \mathcal{L}_+^0(\mathbb{R})$. اختر متتالية في $\mathcal{S}_+(\mathbb{R})$ $\varphi_n \uparrow f$. من تعريف التكامل لدينا $\int_{\mathbb{R}} g\, dm = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \psi_n\, dm$ حيث $\psi_n(x) = \varphi_n(x/k)$. من الخطوة السابقة نحصل على

$$\int_{\mathbb{R}} g\, dm = \lim_{n\to\infty} |k| \int_{\mathbb{R}} \varphi_n\, dm = |k| \int_{\mathbb{R}} f\, dm .$$

* أخيرا لاحظ $g^+(x) = f^+(x/k)$ فيكون $\int_{\mathbb{R}} g^+ dm = |k| \int_{\mathbb{R}} f^+ dm$. و بالمثل لدينا $\int_{\mathbb{R}} g^- dm = |k| \int_{\mathbb{R}} f^- dm$ فنحصل على النتجة من

$$\int_{\mathbb{R}} g dm = \int_{\mathbb{R}} g^+ dm - \int_{\mathbb{R}} g^- dm, \quad \int_{\mathbb{R}} f dm = \int_{\mathbb{R}} f^+ dm - \int_{\mathbb{R}} f^- dm .$$

السؤال الخامس:

(i) راجع الكتاب المقرر" التحليل الحقيقي، الجزء الثاني" ، صفحة ٢١٢.

(ii) افرض أن $y_n \to y \in [c,d]$. بتطبيق نظرية التقارب المحدود على المتتالية $(f(\cdot, y_n))$ نحصل على $\int_{[a,b]} f(x, y_n)\, dm(x) \to \int_{[a,b]} f(x,y) dm(x)$ أي على $F(y_n) \to F(y)$.

السؤال السادس:

(i) التقرير خاطئ؛ أفرض أن $E \notin \mathcal{M}$ وضع $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ -1 & x \notin E \end{cases}$. حينئذ f ليست قابلة للقياس بينما $|f|$ دالة ثابتة ولذا قابلة للقياس.

(ii) التقرير خاطئ؛ خذ E لتكون مجموعة كانتور.

(iii) التقرير خاطئ؛ خذ $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. حينئذ $f = 0\ (a.e)$ و $f \notin \mathcal{R}(a,b)$.

(iv) التقرير خاطئ؛ خذ $E_n = [n, \infty)$. حينئذ $E_n \downarrow \varnothing$. $m(E_n) = \infty \to \infty$ بينما $m(E) = 0$.

(v) التقرير صائب؛ راجع الكتاب المقرر (صفحة ١٨٠).