20 marks per question

بسم الله الرحمن الرحيم

قسم الرياضيات | الاختبار النهائي | الفصل الأول: ١٤٣٠-١٤٣١

كلية العلوم | (٣٨٤ ريض) | الزمن: ٣ ساعات

السؤال الأول:

(i) وضح بدون براهين كيف يعرف تكامل ريمان لدالة محدودة f على $[a,b]$.

(ii) أثبت نظرية داربو: $U(f) = \lim_{\|P\|\to 0} U(f, P)$.

(iii) افرض أن f متصلة عند كل $x \in [0,1] \cap F^c$ حيث F هي مجموعة كانتور. أثبت أن $f \in R(0,1)$.

السؤال الثاني:

(i) افرض أن (f_n) تتقارب بانتظام من f على $D \setminus \{c\}$ حيث $c \in \widehat{D}$. إذا كانت $\lim_{t\to c} f_n(t) = L_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$، فأثبت أن (L_n) متقاربة و أن $\lim_{t\to c} f(t) = \lim_{n\to\infty} L_n$.

(ii) لتكن φ قابلة للاشتقاق على $[0,2]$ و افرض أن $f_n(x) = \varphi(x)|x-1|^n$. إذا كانت (f_n) متقاربة بانتظام على $[0,2]$، فأثبت وجود $c \in (0,2)$ تحقق $\varphi'(c) = 0$.

(iii) لتكن $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$. أثبت أن (f_n) تتقارب على $[0,2]$ تقارباً نقطياً غير منتظم. استخدم نظرية التقارب المحدود لتحسب $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

السؤال الثالث:

(i) أثبت شرط فايرشتراس لتقارب المتسلسلة $\sum_n f_n$ المنتظم على D.

(ii) إذا كان R هو نصف قطر المتسلسلة $\sum_n a_n x^n$، فأثبت أنها متقاربة بانتظام على $[-r, r]$ لكل $0 < r < R$.

(iii) إذا علمت أن $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$، فأثبت مع التبرير أن

(أ) $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$.

(ب) $x\dfrac{d}{dx}\left(x\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{1-x}\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$.

السؤال الرابع:

(i) إذا كان $E \subseteq \mathbb{R}$ و $k \in \mathbb{R}$، فأثبت أن: $m^*(k+E) = m^*(E)$.

(ii) إذا كان $f\ ,\ g \in \mathcal{L}^0(\Omega)$، فأثبت أن المجموعة $\{x \in \Omega : f(x) \neq g(x)\}$ قابلة لقياس لبيق.

(iii) وضح بدون براهين كيف يعرف تكامل لبيق، $\int_\Omega f\, dm$ ، لدالة قابلة للقياس على Ω.

السؤال الخامس:

(i) أورد نص نظرية التقارب المطرد واستخدمها لتثبت تمهيدية فاتو.

(ii) افرض أن $f_n \in \mathcal{L}_+^0(\Omega)$ و $f_n \leq f$ على Ω لكل $n \in \mathbb{N}$. إذا كان $f_n \to f$ نقطياً على Ω، فأثبت أن:

$$\int_\Omega f\ dm = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\ dm \ .$$

(iii) هات مثالاً لمتتالية $f_n \in \mathcal{L}_+^0(\Omega)$ بحيث $f_n \downarrow f$ و مع ذلك $\int_\Omega f\ dm \neq \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\ dm$.

السؤال السادس:

أي التقارير التالية صائب و أيها خاطئ:

(i) إذا كانت f متزايدة على $[a,b]$، فإن $f \in \mathcal{R}(a,b)$.

(ii) $\sum_n \frac{x}{n(1+nx^2)}$ متقاربة بانتظام على $(0,\infty)$.

(iii) إذا كان $|f| \in \mathcal{L}^1(\Omega)$، فإن $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$.

(iv) إذا كان $m^*(A) = 0$، فإن A قابلة للعد.