بسم الله الرحمن الرحيم

قسم الرياضيات — الامتحان النهائي — ٢٦/١٠/١٤٢١هـ

كلية العلوم — ٣٨٤ ريض — الزمن ٣ ساعات

السؤال الأول (أ) لتكن f دالة محدودة على $[a,b]$. عرف المجموع العلوي $U(f,P)$ والتكامل العلوي $U(f)$ ثم أثبت أن $\lim\limits_{\|P\|\to 0} U(f,P) = U(f)$.

باستخدام دالة مناسبة على $[0,1]$ احسب $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}$.

(ب) إذا كانت $f\in R(a,b)$ متصلة عند $c\in[a,b]$ فأثبت أن الدالة $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt ,\ x\in[a,b]$ قابلة للاشتقاق عند c وأن $F'(c) = f(c)$.

احسب $F'(x)$ إذا كان $F(x) = \int_0^{x^2} x^2+\sqrt{\sin t}\,dt$.

السؤال الثاني (أ) إذا كان $f_n \in R(a,b)$ و $f_n \xrightarrow{u} f$ على $[a,b]$ فأثبت أن $f\in R(a,b)$ وأن $\int_a^b f\,dt = \lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n\,dt$.

(ب) أثبت أن المتسلسلة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$ متقاربة بانتظام على R من دالة F حيث $\int_0^1 F(x)\,dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+n)}{2n^2}$.

(جـ) إذا كانت $g_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n}}$ فأثبت أن المتتالية (g_n) لا تتقارب بانتظام على أي فترة تحتوي 1. مبرراً خطواتك احسب $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^2 \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,dx$.

السؤال الثالث (أ) أثبت أن قياس لبيج الخارجي m^* يتمتع بخاصية ما دون التجميع القابل للعد.

(ب) إذا كانت $E\in m$ و $\varepsilon>0$ فأثبت وجود مجموعة مفتوحة $G\supset E$ بحيث $m^*(G\setminus E)<\varepsilon$.

(جـ) إذا كانت $f\in\mathcal{L}^0(\Omega)$ حيث $\Omega\in m$ و $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ متصلة فأثبت أن $\varphi\circ f\in\mathcal{L}^0(\Omega)$.

السؤال الرابع (أ) استناداً على نظرية التقارب المطرد، أثبت تمهيد فاتو واستنتج نظرية التقارب المسقوف.

(ب) لتكن $f:[a,b]\times[c,d]\longrightarrow\mathbb{R}$ دالة محدودة. افرض أن

(i) لكل $y\in[c,d]$ الدالة $f(\cdot,y)$ متصلة على $[a,b]$

(ii) لكل $x\in[a,b]$ الدالة $f(x,\cdot)$ قابلة للتكامل لبيغ على $[c,d]$.

أثبت أن الدالة $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ المعرفة كما يلي

$$F(x)=\int_{[c,d]} f(x,y)\,dm(y)$$

متصلة على $[a,b]$.

السؤال الخامس لتكن f دالة محدودة على $I=[a,b]$ مجال اتصالها C. أثبت أن $f\in\mathcal{R}(a,b)\Leftrightarrow m(I\setminus C)=0$. مستخدماً أو بأي طريقة أخرى أثبت ما يلي.

(أ) إذا كانت f مطردة فإن $f\in\mathcal{R}(a,b)$.

(ب) إذا كان $|f(x)|\le K$ لكل $x\in[a,b]$ و $\varphi:[-K,K]\to\mathbb{R}$ متصلة فإن $\varphi\circ f\in\mathcal{R}(a,b)$.

(ج) إذا كان $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ معرفة كما يلي

$$g(x)=\begin{cases}0 & x\notin\mathbb{Q}\\ \frac{1}{q} & x=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}\,,\ (p,q)=1\end{cases}$$

فأثبت أن $g\in\mathcal{R}(0,1)$.