الجامعة الملك سعود	الإمتحان النهائي للمقرر(٣٨٤ريض)	يوم الأحد ١٤٢٩/٦/١٨ هـ
كلية العلوم –قسم الرياضيات	الفصل الثاني للعام (١٤٢٩هـ)	الزمن: ثلاث ساعات

<u>**السؤال الأول :**</u> ا) إذا كانت $f:[a,b]\to\Re$ دالة محدودة وليكن $c\in(a,b)$ برهن أن

$$f\in R(a,c)\cap R(c,b)\Leftrightarrow f\in(a,b)$$

ب) إذا كانت $f(x)=\begin{cases}1\ ;\ 0\le x\le \frac{1}{2}\\ -2\ ;\ \frac{1}{2}<x\le 2\end{cases}$ برهن أن يوجد متتالية من التجزيئات (P_n) لـ $[0,2]$ بحيث يكون $\lim_{n\to\infty}(U(f,P_n)-L(f,P_n))=0$.

<u>**السؤال الثاني :**</u> أ) إذا كانت f دالة متصلة على الفترة $[a,b]$ برهن أن $f\in R(a,b)$.

ب) إذا كانت (f_n) متتالية من الدوال المعرفة على $D\subseteq\Re$, ولتكن (M_n) متتالية عددية ذات حدود موجبة بحيث إن $|f_n(x)|\le M_n\ \ \forall\ x\in D\ \ \forall\ n\in\mathbb{N}$. فإذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}M_n$ متقاربة برهن أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ متقاربة بإنتظام على D .

ج)ادرس التقارب والتقارب المنتظم للمتسلسلة . $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}\frac{1}{n^2}$.

<u>**السؤال الثالث :**</u> أ) ادرس التقارب والتقارب المنتظم للمتتالية $\left\{\frac{n^2x}{1+n^3x^2}\right\}$ على الفترة $[1,2]$.

ب) إذا كانت $E\subseteq\Re$ وليكن $c\in\Re$ برهن أن $m^*(E+c)=m^*(E)$

ج) إذا كانت (E_n) متتالية متزايدة من المجموعات القابلة للقياس برهن أن

$$m(\lim_{n\to\infty}(E_n))=\lim_{n\to\infty}(m(E_n))$$

<u>**السؤال الرابع :**</u> أ) إذا كانت f,g دالتين قابلتين للقياس ومعرفتين على مجموعة قابلة للقياس Ω . برهن أن $f+g$ أيضا قابلة للقياس .

ب) إذا كانت $E,F\in\mathfrak{M}$ برهن صحة العلاقة التالية

$$m(E)+m(F)=m(E\cup F)+m(E\cap F)$$.

<u>**السؤال الخامس :**</u> أ) إذا كانت $f,g\in L_+^0(\Omega)$ حيث $\Omega\in\mathfrak{M}$. لنفرض أن $f(x)\ge g(x)$ لكل $x\in\Omega$ برهن أن $\int_\Omega f(x)dm\ge\int_\Omega g(x)dm$.

ب) إذ كانت $f \in L^0(\Omega)$ وكانت $E \subseteq \Omega$ حيث $E \in \mathfrak{M}$ وأن $m(E) = 0$.

برهن أن $f \in L^1(E)$ وأن $\int_E f(x)dm = 0$.