بسم الله الرحمن الرحيم

قسم الرياضيات	الاختبار النهائي	الفصل الثاني: ١٤٢٩-١٤٣٠
كلية العلوم	(٣٨٤ ريض)	الزمن: ٣ ساعات

السؤال الأول:

(i) وضح بدون براهين كيف يعرف تكامل ريمان لدالة محدودة f على $[a,b]$.

(ii) أثبت نظرية داربو: $U(f)=\lim_{\|P\|\to 0} U(f,P)$.

(iii) باستخدام دالة مناسبة على $[0,1]$، احسب $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n^2-1}\frac{i^2}{n^5}$.

السؤال الثاني:

(i) افرض أن $f_n\in\mathcal{R}(a,b)$ لكل $n\in\mathbb{N}$ و أن (f_n) تتقارب بانتظام من f على $[a,b]$. أثبت أن $f\in\mathcal{R}(a,b)$ و أن $\int_a^b f(t)\,dt=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(t)\,dt$.

(ii) إذا كان $g_n(x)=\frac{n}{(x-n)^2+n^2}$، أثبت أن (g_n) تتقارب بانتظام من دالة g على $[0,\infty)$ وأن

$$\int_0^\infty g(x)dx\neq\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty g_n(x)\,dx.$$

هل يناقض هذا ما ورد في (i)؟

(iii) إذا كان R هو نصف قطر المتسلسلة $\sum_n a_n x^n$، فأثبت أنها متقاربة بانتظام على $[-r,r]$ لكل $0<r<R$.

باستخدام $e^x=\sum_{n=0}^\infty\frac{x^n}{n!}$ احسب $\int_0^1\sqrt{x}\,e^x\,dx$.

السؤال الثالث:

(i) إذا كان $E\subseteq\mathbb{R}$ و $k\in\mathbb{R}$، فأثبت أن: $m^*(k+E)=m^*(E)$.

(ii) وضح بدون براهين كيف يعرف تكامل لبيق، $\int_\Omega f\,dm$، لدالة قابلة للقياس على Ω.

(ii) أفرض أن f قابلة للتكامل على $\mathbb{R}$ وأن $k\in\mathbb{R}$. إذا كان $g(x)=f(x+k)$، فأثبت أن

$$\int_{\mathbb{R}} g\,dm=\int_{\mathbb{R}} f\,dm.$$

ارشاد: ابتداءً خذ $f=\chi_E$.

السؤال الرابع:

(i) إذا كان $f_n \in \mathcal{L}_+^0(\Omega)$ و $f_n \uparrow f$ على Ω، فأثبت أن:

$$\int_\Omega f \; dm = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \; dm .$$

(ii) افرض أن $f_n \in \mathcal{L}_+^0(\Omega)$ و أن $f_n \downarrow f$ على Ω. إذا وجدت N بحيث $f_N \in \mathcal{L}^1(\Omega)$، أثبت أن:

$$\int_\Omega f \; dm = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \; dm .$$

(iii) هات مثالاً لمتتالية $f_n \in \mathcal{L}_+^0(\Omega)$ بحيث $f_n \downarrow f$ ومع ذلك $\int_\Omega f \; dm \neq \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \; dm$.

السؤال الخامس:

أثبت التقارير التالية:

(i) إذا كانت f متزايدة على $[a,b]$، فإن $f \in \mathcal{R}(a,b)$.

(ii) $\sum_n \frac{x}{n(1+nx^2)}$ متقاربة بانتظام على $(0,\infty)$.

(iii) إذا كان $f, g \in \mathcal{L}^0(\Omega)$، فإن $\{x \in \Omega : f(x) \neq g(x)\}$ قابلة لقياس لبيق.

(iv) إذا كانت مجموعة عدم اتصال f على $[a,b]$ قابلة للعد فإن $f \in \mathcal{R}(a,b)$.

السؤال السادس:

هات أمثلة مناقضة للتقارير التالية:

(i) إذا كان $m^*(A)=0$، فإن A قابلة للعد.

(ii) إذا كان $|f| \in \mathcal{L}^1(\Omega)$، فإن $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$.

(iii) إذا كان التكامل المعتل $\int_1^\infty f(x)dx$ متقارباً، فإن $f \in \mathcal{L}^1(1,\infty)$.

(iv) إذا كان $f:[a,b]\to[c,d]$ قابلة للتكامل الريماني و $\varphi:[c,d]\to\mathbb{R}$ قابلة للتكامل الريماني على $[c,d]$، فـإن $\varphi\circ f \in \mathcal{R}(a,b)$.

الإجابة النموذجية للاختبار النهائي للمقرر (٣٨٤) ريض، الفصل الثاني ١٤٢٩- ١٤٣٠

السؤال الأول:

(i) راجع الكتاب المقرر صفحة (٣-٨).

(ii) راجع الكتاب المقرر صفحة (٢١).

(iii) خذ P ليكون التجزئ المنتظم إلى n^2 جزء ولتكن $w_i = \frac{i}{n^2}$. إذا كان $f(x) = x^2$ فإن

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n^2-1} \frac{i^2}{n^6} = \lim_{n\to\infty} S(f, P, w) = \int_0^1 x^2 dx = 1/3$$

السؤال الثاني:

(i) راجع الكتاب المقرر صفحة(١٠٣).

(ii) $\forall x, \forall n$، $0 \le g_n(x) \le 1/n$ وعليه فإن $g_n \xrightarrow{u} 0$.

$\int_0^\infty g_n = \lim_{L\to\infty}\left[\tan^{-1}\left(\frac{x-n}{n}\right)\right]_0^L = \pi/4$ وعليه $\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty g_n = \pi/4$ بينما $\int_0^\infty g = 0$. هذا لايناقض ما جاء في الجزء الأول إذ أن الفترة غير محدودة.

(iii) راجع الكتاب المقرر صفحة (١١٨).

$$\int_0^1 x e^x\, dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1/2}}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+1/2}}{n!} dx = \sum_0^{\infty} \frac{2}{n!(2n+3)}.$$

السؤال الثالث:

(i) راجع الكتاب المقرر صفحة (١٥١).

(ii) راجع الكتاب المقرر صفحة (١٩٠-١٩٨).

(i) *إذا $f = \chi_E$، فإن $g = \chi_{E-k}$ فيكون

$$\int_{\mathbb{R}} g\,dm = m(E-k) = m(E) = \int_{\mathbb{R}} f\,dm$$

* من خطية التكامل نحصل على المساواة إذا كانت $f \in \mathcal{S}_+(\mathbb{R})$.

* افرض أن $f \in \mathcal{L}_+^0(\mathbb{R})$. اختر متتالية في $\mathcal{S}_+(\mathbb{R})$ $\varphi_n \uparrow f$. من تعريف التكامل لدينا $\int_{\mathbb{R}} g\,dm = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} \psi_n\,dm$ حيث $\psi_n(x) = \varphi_n(x+k)$. من الخطوة السابقة نحصل على

$$\int_{\mathbb{R}} g\,dm = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} \varphi_n\,dm = \int_{\mathbb{R}} f\,dm.$$

* أخيرا لاحظ $g^{+}(x)=f^{+}(x/k)$ فيكون $\int_{\mathbb{R}} g^{+}dm=\int_{\mathbb{R}} f^{+}dm$. و بالمثل لدينا

$\int_{\mathbb{R}} g^{-}dm=\int_{\mathbb{R}} f^{-}dm$ فنحصل على النتجة من

$$\int_{\mathbb{R}} g dm=\int_{\mathbb{R}} g^{+}dm-\int_{\mathbb{R}} g^{-}dm\,,\quad \int_{\mathbb{R}} f dm=\int_{\mathbb{R}} f^{+}dm-\int_{\mathbb{R}} f^{-}dm$$

السؤال الرابع:

(i) راجع الكتاب المقرر صفحة (٢٠٨).

(ii) طبق الجزء الأول و خطية التكامل على $g_n=f_N-f_n$.

(iii) ضع $f_n=\chi_{[n,\infty)}$. عندئذ $f_n\downarrow 0$ لاحظ

$$\int_{\Omega} f\ dm=0,\ \lim_{n\to\infty}\int_{\Omega} f_n\ dm=\infty \ .$$

السؤال الخامس:

(i) راجع الكتاب المقرر صفحة (١٥).

(ii) بما أن $\forall n,\ \forall x\in(0,\infty),\ \left|\dfrac{x}{n\left(1+nx^{2}\right)}\right|\le\dfrac{1}{xn^{2}}$ و $\sum 1/xn^{2}$ متقاربة فمن شرط فايرشتراس المتسلسلة متقاربة بانتظام .

(iii) $\{x\in\Omega: f(x)\neq g(x)\}=\{x\in\Omega:(f-g)(x)\neq 0\}$ وبما أن $f-g$ قابلة للقياس فالمجموعة قابلة للقياس.

(iv) قياس مجموعة عدم الاتصال يساوي الصفر وعليه الدالة قابلة للتكامل الريماني.

السؤال السادس:

(i) خذ A لتكون مجموعة كانتور.

(ii) أفرض أن $E\notin\mathcal{M}$ وضع $f(x)=\begin{cases}1 & x\in E\\ -1 & x\notin E\end{cases}$. حينئذ $|f|\in\mathcal{L}^{1}(\Omega)$ بينما f ليست حتىقابلة للقياس.

(iii) خذ $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$.

(iv) راجع الكتاب المقرر صفحة (٣٥).