بسم الله الرحمن الرحيم

قسم الرياضيات	الاختبار النهائي	الفصل الثاني: ١٤٣٠-١٤٣١
كلية العلوم	(٣٨٤ ريض)	الزمن: ٣ ساعات

السؤال الأول:

(أ) لتكن f دالة محدودة على $[a,b]$. عرف المجموع العلوي والتكامل العلوي ل f ثم أثبت نظرية داربو:

$$U(f)=\lim_{\|P\|\to 0} U(f,P).$$

(ب) (i) لتكن $f\in \mathrm{R}(a,b)$ متصلة عند $c\in[a,b]$ وافرض أن $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ لكل $x\in[a,b]$. أثبت أن F قابلة للاشتقاق عند c و أن $F'(c)=f(c)$.

(ii) إذا كانت $f:[1,\infty)\to(0,\infty)$ متصلة و $\int_1^x f(t)\,dt = x^2 \, f(x)^2$، احسب $f(x)$.

السؤال الثاني:

(أ) (i) افرض أن $f_n\in \mathrm{R}(a,b)$ لكل $n\in\mathbb{N}$ و أن (f_n) تتقارب بانتظام من f على $[a,b]$. أثبت أن $f\in \mathrm{R}(a,b)$ و أن $\int_a^b f(t)\,dt=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(t)\,dt$.

(ii) افرض أن $F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{n(n+x)}$ لكل $x\in[0,1]$. أثبت أن $\int_0^1 F(x)\,dx=\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\dfrac{1}{n}-\ln N\right)$.

(ب) (i) إذا كان R هو نصف قطر المتسلسلة $\sum_n a_n x^n$، فأثبت أن دالة المجموع $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ قابلة للاشتقاق على $(-R,R)$ و أن $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ لكل $x\in(-R,R)$.

(ii) باستخدام المتطابقة $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\dfrac{1}{1-x}$ على $(-1,1)$ أثبت أن $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{k}{2^{k-1}}=4$.

السؤال الثالث:

(i) إذا كان $E\subseteq\mathbb{R}$ و $k\in\mathbb{R}$، فأثبت أن: $m^*(k+E)=m^*(E)$.

(ii) وضح بدون براهين كيف يعرف تكامل لبيق $\int_\Omega f\,dm$، لدالة قابلة للقياس على Ω.

(iii) أفرض أن f قابلة لتكامل لبيق على $\mathbb{R}$ و أن $k\in\mathbb{R}$. إذا كان $g(x)=f(x+k)$ لكل x، فأثبت أن

$$\int g\,dm=\int f\,dm.$$

ارشاد: ابتداءً خذ $f=\chi_E$.

السؤال الرابع:

(i) أورد نص نظرية التقارب المطرد لتكامل لبيق و استنتج منها تمهيدية فاتو.

(ii) افرض أن $f_n \in L_+^0(\Omega)$ و $f_n \leq f$ على Ω لكل $n \in \mathbb{N}$. إذا كان $f_n \to f$ نقطياً على Ω، أثبت أن:

$$\int_\Omega f \; dm = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \; dm$$

(iii) خذ $f_n = -\chi_{[n\,,\,\infty]}$. أثبت أن (f_n) تتزايد إلى دالة f على $\mathbb{R}$ لاتحقق $\int_{\mathbb{R}} f \; dm \neq \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \; dm$.

لماذا لايناقض هذا نظرية التقارب المطرد؟

.السؤال الخامس:

أثبت التقارير التالية:

(i) إذا كانت f متزايدة على $[a,b]$، فإن $f \in R(a,b)$.

(ii) $\lim\limits_{x\to\infty} \int_0^1 \frac{n\,x}{n^2 x+1} \, dx = 0$.

(iii) إذا كان $f\,,\,g \in L^0(\Omega)$، فإن $\{x \in \Omega : f(x) \neq g(x)\}$ قابلة لقياس لبيق.

(iv) إذا كان $f \in L^1(\Omega)$، فإن $f < \infty \;\; (a.e)$.

السؤال السادس:

مثل لما يلي مع التبرير:

(i) مجموعة A غير قابلة للعد وتحقق $m(A) = 0$.

(ii) دالة f غير قابلة لقياس لبيق ومع ذلك $|f|$ قابلة لقياس بوريل.

(iii) متتالية (f_n) من الدوال في $R\,(0,1)$ لاتأخذ قيماً سالبة و تتصاعد نقطياً إلى دالة $f \notin R\,(0,1)$.

(iv) متتالية من الدوال القابلة للاشتقاق تتقارب بانتظام من دالة غير قابلة للاشتقاق.

لا يكتب في هذا الهامش

السؤال الأول

1/ نعرف المجموع العلوي بأنه

$$U(f,P)=\sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1}-x_i)$$

والتكامل العلوي هو

$$U(f)=\inf\{U(f,P) : P\in P[a,b]\}$$

البرهان:

بفرض $\epsilon>0$ اعطيت يوجد تجزئ P_0 للفترة $[a,b]$ بحيث ان

$$U(f)+\frac{\epsilon}{2}>U(f,P_0)$$

نجعل عدد تجزئيات P_0 هو m ثم خذ $\delta=\frac{\epsilon}{8mK}$

ولكن لنا التجزئ $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ للفترة $[a,b]$ والذي يكون ان $\|P\|<\delta$ ونجعل $P_1=P\cup P_0$

نريد ان نحسب

$$U(f,P)-U(f,P_1)$$

حساب مساهمة كل فترة جزئية $[x_i,x_{i+1}]$ في هذا الفرق فإنه لدينا حالتين

1/ إذا كان $P_0\cap(x_i,x_{i+1})=\emptyset$ فعندها مساهمة كل فترة جزئية في $U(f,P)$ تساوي المساهمة في $U(f,P_1)$ وعليه فإن مساهمتها في الفرق هو الصفر.

2/ إذا كان $P_0\cap[x_i,x_{i+1}]\neq\emptyset$ فإن مساهمة كل فترة جزئية في $U(f,P_1)$ لا تقل عن $-K(x_i,x_{i+1})$ ومساهمتها في $U(f,P)$ لا تزيد عن $K(x_i,x_{i+1})$ وعليه فإن مساهمتها في الفرق لا تزيد عن $2K$

$$\Rightarrow U(f,P)-U(f,P_1)<\sum_{i=0}^{n-1}2K(x_i,x_{i+1})$$

$$<\|P\|\;2K\;|J|$$

حيث $J=\{i=1,\dots : [x_i,x_{i+1}]\cap P_0\neq\emptyset\}$

$$<\frac{\epsilon}{8mK}\,2K\cdot 2m=\frac{\epsilon}{2}$$

حيث $|J|\le 2m$

8

$$\Rightarrow U(f,P)-U(f)=U(f,P)-U(f,P_1)+U(f,P_1)-U(f)$$

$$<\frac{\epsilon}{2}+U(f,P_0)-U(f)$$

لأن P_1 ادق من P_0 أي $P_1\supset P_0$

$$<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$$

ب) بما أن f متصلة عند c لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث

$$|x-c| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(c)| < \varepsilon$$

جميع الأعداد t بين x, c تحقق

$$|t-c| < \delta \Rightarrow |f(t)-f(c)| < \varepsilon$$

~~يمكن~~ ملاحظة انه

$$f(c) = \frac{1}{x-c} \int_c^x f(c)\, dt$$

$$\left| \frac{F(x)-F(c)}{x-c} - f(c) \right| = \left| \frac{1}{x-c} \int_c^x f(t) - f(c)\, dt \right|$$

$$= \frac{1}{|x-c|} \left| \int_c^x f(t) - f(c)\, dt \right|$$

$$< \frac{1}{|x-c|} \int_c^x |f(t) - f(c)|\, dt$$

$$< \frac{1}{x-c} \int_c^x \varepsilon\, dt$$

$$= \frac{1}{\cancel{|x-c|}} \varepsilon \cancel{|x-c|} = \varepsilon$$

$$\lim \frac{F(x)-F(c)}{x-c} = f(c)$$

$$F'(c) = f(c)$$

6

7)

$$f(x)^2 = x^2 \int_1^x f(t)\, dt$$

$$\Rightarrow f(x) = x \int_1^{\sqrt{x}} f(t)\, dt$$

$$= x f(\sqrt{x})$$

لا يكتب في هذا الهامش

السؤال الثاني

المعطيات

أ/ $f_n \in R(a,b)$ لكل $n \in N$ ، $f_n \xrightarrow{u} f$

المطلوب : اثبت أن $f \in R(a,b)$ و أن $\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt$

البرهان : لإثبات أن $f \in R(a,b)$ المطلوب منا إيجاد تجزئ للفترة $[a,b]$ $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ بحيث أن

$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$.

بما أن $f_n \in R(a,b)$ ونفرض ε عدد معطى يوجد تجزئ $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots x_n\}$ بحيث أن $U(f_n,P) - L(f_n,P) < \varepsilon$

وبما أن $f_n \xrightarrow{u} f$ حسب التعريف ونفرض ε عدد معطى يوجد N بحيث $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$

يجب تعيين N قبل P

$$f_N(x) - \varepsilon < f(x) < f_N(x) + \varepsilon$$

نعرف

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\}$$
$$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\}$$
$$M_i^N = \sup\{f_N(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\}$$
$$m_i^N = \inf\{f_N(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\}$$

$$f_N(x) - \varepsilon < f(x) \qquad f(x) < f_N(x) + \varepsilon$$
$$m_i^N - \varepsilon < f(x) \qquad \Rightarrow f(x) < M_i^N + \varepsilon$$
$$m_i^N - \varepsilon < m_i \qquad \Rightarrow M_i < M_i^N + \varepsilon$$

بالضرب في (-1) ثم الجمع

$$M_i - m_i < M_i^N - m_i^N + 2\varepsilon$$

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i)$$
$$< \sum_{i=0}^{n-1} (M_i^N - m_i^N + 2\varepsilon)(x_{i+1} - x_i)$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} (M_i^N - m_i^N)(x_{i+1} - x_i) + 2\varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)$$
$$< \varepsilon + 2\varepsilon(b-a)$$

لا يكتب في هذا الهامش

$$\left|\int_a^b f_n(t) - f(t)\,dt\right| < \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\,dt$$

$$< \underbrace{\sup|f_n - f|}_{\to 0}(b-a)$$

$f_n \xrightarrow{u} f$ لأن

$$= \int f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(t)\,dt$$

$$f_n(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{x}{n(n+x)}$$

ندرس التقارب المنتظم لـ $f_n(x)$ بجزائه

$$f_n(x) = \frac{x}{n^2 + xn}$$

$$\left|\frac{x}{n^2 + xn}\right| < \frac{1}{n^2 + xn} < \frac{1}{n^2}$$

بما انه $\sum \frac{1}{n^2}$ متسلسلة $p>1$ فإنها متقاربة

وعليه فإنه حسب فايرستراس فإنه $\sum \frac{x}{n(n+x)}$ متقاربة بانتظام

يعني من خواص التقارب المنتظم فإنه

$$\int \sum f = \lim_{n\to\infty} \sum \int_0^1 f$$

$$\sum \frac{1}{n}\int \frac{x\,dx}{n(n+x)} = \int_0^1 \sum_1 \frac{x}{n(n+x)}\,dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{x}{(n+x)}\,dx = \int \frac{x+n-n}{n+x}\,dx = \int 1\,dx - \int \frac{n}{n+x}\,dx$$

$$= 1 - n\left[\ln(x)\right]$$

$$\sum \frac{1}{n}\left[1 - n\ln(x)\right] = \sum \frac{1}{n} - \ln(x)$$

$$\sum \frac{1}{n} - \ln(x)$$

لا يكتب في
هذا الهامش

ب/ $|na_n|^{\frac{1}{n}} = |n|^{\frac{1}{n}} |a_n|^{\frac{1}{n}}$

بما أن $n^{\frac{1}{n}} \longrightarrow 1$ فإن

$$\limsup (na_n)^{\frac{1}{n}} = 1 \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{R}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ له نفس نصف قطر التقارب R

إذا $c \in R$ نختار $0 < r < R$ حيث

$c \in [-r, r] \subset (-R, R)$

بما أن $\sum a_n x^n$ متقاربة على $[-r,r]$ و $\sum n a_n x^{n-1}$ متقاربة بانتظام

فإنه من خواص تكامل ريمان في نظرية سابقة تحققت الشروط

ونجد أنه قابلة للاشتقاق عند c

$S' = \sum n a_n x^{n-1}$ بالتكرار يتكون أكثر من مرة

نستنتج أنه قابلة للاشتقاق أكثر من مرة

يكتب في الهامش

السؤال الثالث:

ب) لتكن $I_i=[a_i,b_i)$ غطاء لـ E من عناصر $\wp$

يعني ذلك أن $J_i = I_i + K = [a_i+k, b_i+k)$ غطاء لـ $(K+E)$ من عناصر $\wp$ وعليه فإن

$$K+E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i$$

$$m^*(K+E) < \sum_{i=1}^{\infty} m J_i = \sum_{i=1}^{\infty} \ell J_i = \sum (b_i+k-a_i-k)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_i)$$

$\Lambda = \{\sum \ell(I_i) : I_i \in \wp, \bigcup I_i \supset E\}$

$\therefore m^*(E+K)$ حد سفلي لـ ...

$$\Rightarrow \quad m^*(E+K) \leq \inf \Lambda = m^*(E) \quad (1)$$

(2) بوضع $E = (K+E)$ و $K=-K$ نحصل على

$$m^*(K+E-K) < m^*(K+E)$$

$$m^*(E) < m^*(E+K) \quad (2)$$

من (1) و (2) نحصل على المساواة المطلوبة

---

ii) نعرف التكامل على ثلاث مراحل

1) عندما تكون $f \in S_+$ (الدوال البسيطة غير السالبة)

تكون

$$f = \sum c_i \chi_{E_i}$$

ويكون

$$\int f \, dm = \sum c_i \, m(E_i)$$

2) وعندما تكون $f \in \mathcal{L}^0_+(\Omega)$ فالدوال القياسية الغير سالبة فإن التكامل يعرف كالآتي

$$\int_\Omega f \, dm = \sup\left\{\int_\Omega \varphi \, dm : \varphi \in S_+, \varphi < f\right\}$$

3) أما إذا كان $f \in \mathcal{L}^0$ فالدوال القياسية ... نعرف

$$f^+ = f \vee 0$$

نقول أن الدالة f قابلة للتكامل وحيث

$$\int_\Omega f\,dm = \int_\Omega f^+\,dm - \int_\Omega f^-\,dm$$

أما إذا كان كلاهما ∞ فلا نقول أن الدالة f قابلة للتكامل.

نظرية التقارب المطرد تنص على أنه إذا كانت $f_n \in L^0_+$ وكانت $f_n \nearrow f$ فإن $f \in L^0_+$ و

$$\lim \int_\Omega f_n\,dm = \int_\Omega f\,dm$$

وضعها فاتو: إذا كانت $f_n \in L^0_+$ فإن $\liminf f_n \in L^0_+$ وكذلك

$$\liminf \int_\Omega f_n\,dm \geq \int_\Omega \liminf f_n\,dm$$

البرهان: من خواص قياس لبيق نعلم أن $\liminf_{n\to\infty} f_n \in L^0_+$

ثم نثبت العلاقة

نعرف لكل $n \in \mathbb{N}$: $g_n = \inf\{f_k : k \geq n\}$

$$g = \liminf f_n$$

عندئذ نلاحظ أن $g_n \in L^0_+$ وأن $g_n \nearrow g$ وعليه من المبرهنة السابقة

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n\,dm = \int_\Omega g\,dm$$

بما أن $|g_n| \leq |f_n|$ فإن

$$\int_\Omega g_n\,dm \leq \int_\Omega f_n\,dm$$

كتب في
الهامش

نثر/ اولاً نلاحظ ان $f\in L^{+}$ من خواص تكامل ليبيق

$$\left|\int_\Omega f_n\,dm-\int_\Omega f\,dm\right| = \left|\int_\Omega f_n - f\,dm\right| < \int_\Omega |f_n - f|\,dm$$

ومن نظرية التكامل لليبيق نجد ان

$$\int_\Omega |f_n - f|\,dm = 0$$

$$\Rightarrow \lim \int_\Omega f_n\,dm = \int_\Omega f\,dm$$

(iii) خذ $E_n=[n,\infty)$ عندها $f_n=\chi_{E_n}$ وحسب التعريف

$f_n \searrow 0$ $\quad E_n \searrow$ ليست

$$\int_{\mathbb{R}} f_n\,dm = m(E_n) = \infty$$

$$\int_{\mathbb{R}} f\,dm = 0$$

$$\int_{\mathbb{R}} f\,dm \neq \lim \int_{\mathbb{R}} f_n\,dm$$

ولا تناقض هنا مع المبرهنة الطرد لأن المتتالية لا يكون لها تكاملات منتهية

السؤال الخامس

(i) f متزايدة على $[a,b]$ فإن $f\in R[a,b]$

نفرض أن $f(a)<f(b)$ حيث $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ تجزئة لـ $[a,b]$ بحيث $\|P\|<\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$ لكل $\varepsilon>0$.

بما أن f متزايدة $m_i=f(x_i)$ ، $M_i=f(x_{i+1})$

$$U(f,P)-L(f,P)=\sum_{i=0}^{n-1}(M_i-m_i)(x_{i+1}-x_i)$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})-f(x_i)-(x_{i+1}-x_i)$$

لا يكتب في
هذا الهامش

$f_n(x) = \dfrac{n\sqrt{x}}{n^2x+1}$ جـ

(ii $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \int_0^1 \frac{n\sqrt{x}}{n^2x+1}\,dx$

$f_n(x)$ نثبت أن متقاربة بانتظام لـ

$\left|\dfrac{n\sqrt{x}}{n^2x+1}\right| < \dfrac{n}{n^2x} < \dfrac{1}{nx} \longrightarrow 0$ $\quad X$ متقاربة بانتظام

$\sum \frac{1}{nx}$ ...

$\dfrac{n\sqrt{x}}{n^2x+1}$ متقاربة بانتظام على ...

$\lim \int f_n = \int \lim f_n$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f_n = \frac{n\sqrt{x}}{n^2x+1} = 0 \qquad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int f_n = 0$

(iii $\{x \in \Omega : f(x) \neq g(x)\}$

$\{x\in\Omega : f(x) > \alpha\} \neq \{x\in\Omega : g(x) > \alpha\}$

$\underbrace{\qquad}_{\in m} \qquad \underbrace{\qquad}_{\in m}$

$\Rightarrow \{x\in\Omega : f(x) \neq g(x)\} \in m$

0

(iv إذا كانت $|f| < \infty$

$\Rightarrow f^+ < \infty$ و $f^- < \infty$

$\Rightarrow \displaystyle\int_\Omega f = \int f^+\,dm - \int f^-\,dm < \infty$

$\therefore f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$

0

١) السؤال السادس ح

(i) مجموعة A غير قابلة للعد و لكنها $m(A)=0$

هي مجموعة كانتور حيث نضع

$$F=\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$$

F مجموعة كانتور غير قابلة للعد

و $m(E)=0$

(ii) يجب أنه تكون دالة قابلة للقياس ... [illegible]

مثال: $f^{-1}(B)\notin \mathcal{B}$

$f(x)=$

حل

$$Q=\begin{cases}0 & x=0\\ 1 & x\neq 0\end{cases}\qquad \psi=\begin{cases}0 & x\notin \mathbb{Q}\\ \frac{1}{q} & x=\frac{p}{q}\in \mathbb{Q}\end{cases}$$

عندها

$$f=\psi\circ Q=\begin{cases}0 & x\in \mathbb{Q}\\ 1 & x\notin \mathbb{Q}\end{cases}$$

تحقيق المطلوب

لا يكتب في

هذا الهامش

قال الدكتور ونشرح باستخدام التعريف لا [illegible]

(iv $f_n = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$

$f_n \xrightarrow{u} f = \sqrt{x^2} = |x|$

4