بسم الله الرحمن الرحيم

قسم الرياضيات | **الاختبار النهائي** | **الفصل الثاني: 1431-1432**

كلية العلوم | **(384 ريض)** | **الزمن: 3 ساعات**

السؤال الأول:

(i) أثبت شرط ريمان لقابلية الدالة المحدودة f للتكامل الريماني على $[a,b]$.

(ii) أورد بدون برهان شرطاً على مجموعة اتصال f في $[a,b]$ يضمن قابلية f للتكامل الريماني على $[a,b]$.

باستخدام هذا الشرط أو أي طريقة أخرى أثبت التالي:

(أ) إذا كانت f مطردة على $[a,b]$، فإن $f \in R(a,b)$.

(ب) إذا كانت f متصلة على $[a,b]$ ما عدا عند عدد منته من النقاط، فإن $f \in R(a,b)$.

السؤال الثاني:

(i) أورد بدون برهان شروطاً كافية لاشتقاق المجموع $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ حداً بحد.

إذا كان $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(1+nx^2)}$، فأثبت أن S قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ واحسب $S'(x)$.

(ii) إذا كان R هو نصف قطر تقارب $\sum_n a_n x^n$ و $0<r<R$، أثبت أن $\sum_n a_n x^n$ تتقارب بانتظام على $[-r,r]$.

بدءاً من $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ لكل $x \in (-1,1)$، أثبت باستخدام الدالة $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ أن

$$\frac{\pi}{6}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3(2n+1)3^n}.$$

السؤال الثالث:

أي التقارير التالية صائب و أيها خاطئ؟ برر إجابتك.

(i) مجموعة الفترات من الشاكلة (a,∞) تولد جبر سيجما بوريل.

(ii) إذا كان $m^*(A)=0$، فإن A قابلة لقياس لبيق.

(iii) إذا لكل $n \in \mathbb{N}$ كانت f_n قابلة لقياس لبيق، فإن $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ قابلة لقياس لبيق.

(iv) إذا كان $f \in R(a,b)$ و $g \in R(c,d)$ حيث $R_f \subseteq [c,d]$، فإن $g \circ f \in R(a,b)$.

(v) إذا كان $m(A)=0$، فإن A قابلة للعد.

السؤال الرابع:

(i) أثبت نظرية التقارب المطرد لتكامل لبيق.

(ii)هات مثالاً لمتتالية (f_n) في $L_+^0(□)$ بحيث $f_n \downarrow f$ على □ ولكن $\int f \, dm \neq \lim_{n\to\infty} \int f_n \, dm$

(iii) افرض أن $f_n \in L_+^0(□)$ وأن $f_n \downarrow f$ على □. إذا وجدت N بحيث $f_N \in L^1(□)$، أثبت أن $\int f \, dm = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, dm$.

السؤال الخامس:

احسب ما يلي مع التبرير

(i) $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} (x + \sin t)\, dt$.

(ii) $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}}\, dx$.

(iii) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+n^2}$.

(iv) فترة تقارب $\sum_n \frac{(x-1)^n}{\log n}$.

(٢) الأولى :

(٢٢) $\Leftarrow$ (٢) لتكن $\epsilon > 0$.

من المعطيات نستطيع اختيار تجزئ P بحيث :

$$U(f,P) < L(f,P) + \epsilon$$

ومن تعريف U, L نجد :

$$U(f) \le U(f,P) < L(f,P) + \epsilon$$
$$\le L(f) + \epsilon$$

وحيث ϵ عدد موجب فإن

$$U(f) \le L(f)$$

وبما أن

$$L(f) \le U(f)$$

ومنه f قابل للتكامل على $[a,b]$.

$\boxed{}$

لا يكتب
هذا الهـا

بسم الله

السؤال الأول :

(i) شرط ريمان : التعريفان التاليان متكافئان :

① $f \in R[a,b]$

② لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $P \in \mathcal{P}(a,b)$ بحيث
$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$

البرهان :

(ا) ← (ب) افرض أن $\varepsilon > 0$ أعطيت يوجد تجزيئان P_1 و P_2 بحيث

$$U(f,P_1) < U(f) + \varepsilon/2 \ , \ L(f,P_2) > L(f) - \varepsilon/2$$

ضع $P = P_1 \cup P_2$ نجد :

$$U(f,P_1) \geq U(f,P) \ , \ L(f,P_2) \leq L(f,P)$$

وبما أن f قابلة للتكامل فإن $U(f) = L(f)$ ومن ثم

$$U(f,P) \leq U(f,P_1) < U(f) + \varepsilon/2 = L(f) + \varepsilon/2$$
$$< L(f,P_2) + \varepsilon \leq L(f,P) + \varepsilon$$

وبالتالي فإن $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$

12

(ii)

(أ) نفرض أن f متزايدة لو كان $f(b) = f(a)$ لكانت f دالة ثابتة ومن ثم قابلة للتكامل ، لذا سنفرض أن $f(a) < f(b)$ ومنه لدي $\varepsilon > 0$ نختار تجزيئاً $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ يحقق

$$\|P\| < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$$

بما أن f متزايدة فإن :

$$M_i = f(x_{i+1}) \ , \ m f(x_i) \ , \ \forall i = 0, \dots, n-1$$

وعليه فإن

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_{i+1}) - f(x_i)][x_{i+1} - x_i]$$
$$\leq \|P\| \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_{i+1}) - f(x_i)]$$
$$= \|P\| [f(b) - f(a)] < \varepsilon$$

!أين توقيع

٣٠/١٢/٦

5

اكتب في الهامش

(أ)

نفرض أن f متناقصة لو كانت $f(a)=f(b)$ لكانت قابلة للتكامل

إذا كانت $f(a)>f(b)$ ومنه لدي $\varepsilon>0$

نختار تجزيئاً $P=\{x_0,\dots,x_n\}$ بحيث

$$\|P\| > \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$$

$\forall i=0,\dots,n-1$ ، $M_i=f(x_{i-1})$ ، $m=f(x_i)$

وبما أن f متناقصة بنفس خطوات كونها متزايدة يكون :

$$U(f,P) - L(f,P) \geq \|P\| \sum_{i=0}^{n-1} \left(f(x_{i-1}) - f(x_i)\right)$$

$$= \|P\| \left[f(b) - f(a)\right] > \varepsilon$$

وهو المطلوب □

(ب)

افرض أن $\varepsilon>0$ أعطيت بما أن f محدودة على $[a,b]$

فإن هناك $K\in\mathbb{R}$ بحيث $|f(x)|\leq K$ لكل $x\in[a,b]$

اختر $\varepsilon'>0$ بحيث :

$$b>c+\varepsilon' \quad , \quad \varepsilon' < \frac{\varepsilon}{4K+2}$$

$$a<c-\varepsilon'$$

من نظرية نستطيع أن نجد تجزيئاً ~~P_1~~ $x_0,\dots,x_k$ للفترة $[a,c-\varepsilon']$

بحيث $U(f,P_1) - L(f,P_1) = \sum_{i=0}^{k-1}(M_i-m_i)(x_{i+1}-x_i) < \varepsilon'$

ومن النظرية نفسها على الفترة $[c+\varepsilon',b]$ نجد تجزيئاً لهذه الفترة

بحيث : $P_2=\{x_{k+1},x_{k+2},\dots,x_n\}$

$$U(f,P_2) - L(f,P_2) = \sum_{i=k+1}^{k-1}(M_i-m_i)(x_{i+1}-x_i) < \varepsilon'$$

JER(4b)

لا يكتب
هذا الهامش

الثاني :

(i)

(ii) لأي عدد موجب ε سنفرض أن
$$r = R - \varepsilon > 0$$
بأن كانت x تقع في الفترة $[-R+\varepsilon, R-\varepsilon]$ فإن
$$|a_n x^n| \le |a_n|\, r^n$$
وبما أن r تنتمي إلى فترة التقارب المطلقة $(-R, R)$ للمتسلسلة فإن $\sum |a_n| r^n$ متقاربة، ومن اختبار فايرشتراس تكون المتسلسلة $\sum a_n x^n$ متقاربة بانتظام على $[-R+\varepsilon, R-\varepsilon]$.

لا يكتب في
هذا الهامش

(تابع)

لا يكتب في
هذا الهامش

الثالث :

(ت) صائبة لأن

$(a,\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a+1/n, n], [a,\infty)$

$= \bigcap_{n=1}^{\infty} (a-1/n, \infty), [a,b) = [a,\infty)$

(ثانياً) من اطراد m^* نحصل على $m^*(A \cap E)=$ ومن ثم فإن

$m^*(A) \geq m^*(A \cap E^c) = m^*(A \cap E)$

$+ m^*(E \cap A^c), \forall A \subset \mathbb{R}$

نجعل $E = A$ ومنه ومنه $m^*(E)=0$ ومنه :

من اطراد m^* نحصل على $m^*(B \cap E)=0$

ومن ثم فإن

$m^*(B) \geq m^*(B \cap E^c) =$

$= m^*(B \cap E) + m^*(B \cap E^c)$

$, \forall E \subset \mathbb{R}$

(ثانياً) صائبة :

(ثالثاً) خاطئة

(رابعاً) صائبة لأن :

(٧) خاطئة

3 /

' يكتب في
ىذا الهـامـش

لا يكتب
هذا الهامـ

الرابع :

(ب)

ليكن $f \in \mathcal{L}_p^{+}(\Omega)$ لكل $n \in \mathbb{N}$

اختر المتتالية $(\varphi_{nk} : k \in \mathbb{N})$ في $S_p(\Omega)$ بحيث

$\varphi_{nk} \uparrow f_n$ ثم ضع

$$\psi_k = \max\{\varphi_{1k}, \varphi_{2k}, \dots, \varphi_{kk}\}$$

$$\begin{array}{cccccc}
\boxed{\varphi_{11}} & \boxed{\begin{array}{c}\varphi_{12}\\ \varphi_{22}\end{array}} & \boxed{\begin{array}{c}\varphi_{13}\\ \varphi_{23}\\ \varphi_{33}\end{array}} & \boxed{\begin{array}{c}\varphi_{14}\\ \varphi_{24}\\ \varphi_{34}\\ \varphi_{44}\end{array}} & \dots & \begin{array}{c}f_1\\ f_2\\ f_3\\ f_4\end{array} \\
\varphi_{21} & & & & & \\
\varphi_{31} & \varphi_{32} & & & & \\
\varphi_{41} & \varphi_{42} & \varphi_{43} & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & \psi_4 & \dots & f
\end{array}$$

لاحظ أن (i) $\psi_k \in S_p(\Omega)$

(ii) $\psi_1 \le \psi_2 \le \psi_3 \le \psi_4 \le \cdots$

(iii) لكل $x \in \Omega$ ولكل $k \in \mathbb{N}$ يوجد $1 \le r \le k$ بحيث

$$\psi_k(x) = \varphi_{rk}(x)$$

$$\varphi_{rk}(x) \le f_r(x) \le f_k(x)$$

$$\psi_k(x) \le f_k(x)$$

$$\varphi_{nk} \le \psi_k \le f_k \quad , \forall k \in \mathbb{N}, n \le k$$

بجعل $k \to \infty$ نحصل

$$f_n \le \lim \psi_k \le f \ , \ \forall n \in \mathbb{N}$$

وفي النهاية عندما $n \to \infty$

$$\lim \psi_k = f$$

أي أن $\psi_k \uparrow f$ من تعريف

$$\int_\Omega f\,dm = \lim_{k \to \infty} \int \psi_k\,dm$$

وباستخدام اطراد التكامل نحصل:

$$\int_\Omega \varphi_{nk}\,dm \le \int_\Omega \psi_k\,dm \le \int_\Omega f_k\,dm$$

$$\int_\Omega f_n \, dm \le \lim_{k\to\infty} \int_\Omega \psi_k \, dm \le \lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, dm = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega \psi_k \, dm$$

12

$$= \int_\Omega f \, dm$$

ب في
هامش