

بسم الله الرحمن الرحيم

الفصل الثاني: 1431-1432

الاختبار النهائي

قسم الرياضيات

الزمن: 3 ساعات

(384 ريبض)

كلية العلوم

السؤال الأول:

- (i) أثبت شرط ريمان لقابلية الدالة المحدودة f للتكامل الريماني على $[a, b]$.
- (ii) أورد بدون برهان شرطاً على مجموعة اتصال f في $[a, b]$ يضمن قابلية f للتكامل الريماني على $[a, b]$. باستخدام هذا الشرط أو أي طريقة أخرى أثبت التالي:
- (أ) إذا كانت f مطردة على $[a, b]$ ، فإن $f \in R(a, b)$.
- (ب) إذا كانت f متصلة على $[a, b]$ ما عدا عند عدد منته من النقاط، فإن $f \in R(a, b)$.

السؤال الثاني:

- (i) أورد بدون برهان شروطاً كافية لاشتقاق المجموع $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ حداً بحداً.
- إذا كان $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(1+nx^2)}$ ، فأثبت أن S قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} واحسب $S'(x)$.
- (ii) إذا كان R هو نصف قطر تقارب $\sum_n a_n x^n$ و $0 < r < R$ ، أثبت أن $\sum_n a_n x^n$ تتقارب بانتظام على $[-r, r]$.

بدءاً من $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$ لكل $x \in (-1, 1)$ ، أثبت باستخدام الدالة $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ أن

$$\frac{\pi}{6} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3(2n+1)3^n}$$

السؤال الثالث:

- أي التقارير التالية صائب و أيها خاطئ؟ برر إجابتك.
- (i) مجموعة الفترات من الشاكلة (a, ∞) تولد جبر سيجمما بوريل.
- (ii) إذا كان $m^*(A) = 0$ ، فإن A قابلة لقياس ليبيق.
- (iii) إذا لكل $n \in \mathbb{N}$ كانت f_n قابلة لقياس ليبيق، فإن $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ قابلة لقياس ليبيق.
- (iv) إذا كان $f \in R(a, b)$ و $g \in R(c, d)$ حيث $R_g \subseteq [c, d]$ ، فإن $g \circ f \in R(a, b)$.
- (v) إذا كان $m(A) = 0$ ، فإن A قابلة للعد.

السؤال الرابع:

(i) أثبت نظرية التقارب المطرد لتكامل لبيق.

(ii) هات مثلاً لمتتالية (f_n) في $L_+^0(\square)$ بحيث $f_n \downarrow f$ على \square ولكن $\int f_n dm \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n dm$

(iii) افرض أن $f_n \in L_+^0(\square)$ وأن $f_n \downarrow f$ على \square . إذا وجدت N بحيث $f_N \in L^1(\square)$ ، أثبت أن

$$\int f dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n dm$$

السؤال الخامس:

احسب ما يلي مع التبرير

$$\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} (x + \sin t) dt \quad (i)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}} dx \quad (ii)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{k^2 + n^2} \quad (iii)$$

$$\sum_n \frac{(x-1)^n}{\log n} \quad (iv) \text{ فترة تقارب}$$

(20) \Leftarrow (21) لتكون $\epsilon > 0$

من المصطلحات ϵ اختيار δ يكون

$$U(f, P) < L(f, P) + \epsilon$$

ومن تعريف U, L نجد

$$U(f) \leq U(f, P) < L(f, P) + \epsilon \\ \leq L(f) + \epsilon$$

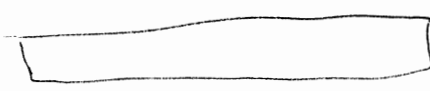
حيث ϵ عدد موجب فإن

$$U(f) \leq L(f)$$

$$L(f) \leq U(f)$$

فإن $L(f) = U(f)$ على $[a, b]$

~~وانه~~





بسم الله

السؤال الأول :

(i) شرط ريمان : التقريبات التالية متساوية :

$$f \in R[a, b] \quad \text{O}$$

أي $\epsilon > 0$ يوجد $P \in \mathcal{P}(a, b)$ بحيث $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$

البرهان :

(ii) $\epsilon > 0$ اختر $\delta > 0$ بحيث يوجد

تقسيمان P_1, P_2 بحيث

$$U(f, P_1) < U(f) + \epsilon/2, \quad L(f, P_2) > L(f) - \epsilon/2$$

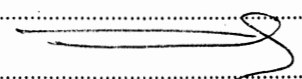
مع $P = P_1 \cup P_2$ - بحيث

$$U(f, P_1) \geq U(f, P), \quad L(f, P_2) \leq L(f, P)$$

وبما أن f قابلة للتكامل به $U(f) = L(f)$ ومن ثم

$$U(f, P) \leq U(f, P_1) < U(f) + \epsilon/2 = L(f) + \epsilon/2 < L(f, P_2) + \epsilon \leq L(f, P) + \epsilon$$

$$U(f, P) - L(f, P) < \epsilon \quad \text{وبالتالي نريد}$$



(ii)

(i) نفرض أن f متزايدة ، وكان $f(b) = f(a)$

لكان f دالة ثابتة ، مما يسهل تأويل التكامل ، لذا سنفرض أن $f(a) < f(b)$ ، ولذا $\epsilon > 0$ نختار تحزيمًا

$$P = \{x_0, \dots, x_n\}$$

$$\|P\| < \frac{\epsilon}{f(b) - f(a)}$$

لكان f متزايدة فإن :

$$M_i = f(x_{i+1}), \quad m_i = f(x_i), \quad \forall i = 0, \dots, n-1$$

وعليه نريد

$$U(f, P) - L(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_{i+1}) - f(x_i)] [x_{i+1} - x_i]$$

$$\leq \|P\| \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_{i+1}) - f(x_i)]$$

$$= \|P\| [f(b) - f(a)] < \epsilon$$

□

بسم الله

لا يكتب
هذا لها

نروض أن f متناهية لو كانت $f(a) = f(b)$ لكانت قابلة للتفاضل

اذا كانت $f(a) > f(b)$ ، فإنه لأي $\epsilon > 0$

نختار δ بحيث $\delta < \frac{\epsilon}{M}$ ، $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ يكون

$$\forall i = 0, \dots, n-1 \quad \delta < \frac{\epsilon}{M} \quad , \quad M_i = f(x_{i-1}), \quad m = f(x_i)$$

وبما أن f متناهية فمجموع خطوات تقسيمها متناهية ويكون

$$U(f, P) - L(f, P) \geq \delta \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i) = \delta [f(b) - f(a)] > \epsilon$$

$$= \delta [f(b) - f(a)] > \epsilon$$

وبين المطلوب \square

(ب)

انرض أن $\epsilon > 0$ ، f متناهية ما إن f مستمرة على $[a, b]$

فإن هناك $K \in \mathbb{R}$ بحيث $|f(x)| \leq K$ لكل $x \in [a, b]$

اختر $\epsilon' > 0$ بحيث

$$b > c + \epsilon' \quad \epsilon' < \frac{\epsilon}{4K+2}$$

$$a < c - \epsilon'$$

من نظرية شيفر إن نجد تقسيماً $P_1 = \{x_0, \dots, x_k\}$ للفترة $[a, c - \epsilon']$

$$U(f, P_1) - L(f, P_1) = \sum_{i=0}^{k-1} (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) < \epsilon'$$

ومن نظرية تقسيم الفترة $[c + \epsilon', b]$ نجد تقسيماً للفترة

$$P_2 = \{x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n\}$$

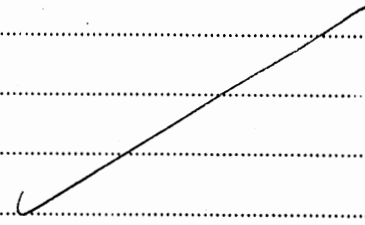
$$U(f, P_2) - L(f, P_2) = \sum_{i=k+1}^{n-1} (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) < \epsilon'$$



لا يكتب
هذا لها

التالي :

(2)



(2) ليكن $\epsilon > 0$ سنفرض ان

$$\gamma = R - \epsilon > 0$$

لذا يمكننا ان نضع x في الفترة $[-R + \epsilon, R - \epsilon]$ ان

$$|a_n x^n| \leq |a_n| r^n$$

للمتسلسلة $\sum |a_n| r^n$ فان $\sum a_n x^n$ متقاربة متناهية x في $[-R + \epsilon, R - \epsilon]$ فان $\sum a_n x^n$ متقاربة متناهية على $[-R + \epsilon, R - \epsilon]$ فان $\sum a_n x^n$ متقاربة متناهية على $[-R + \epsilon, R - \epsilon]$

7/



لا يكتب في
هذا الهامش

(تاريخ)





الثالث :

$$(a, \infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a+1/n, \infty) \quad \times$$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} (a-1/n, \infty) \quad \times$$

$$[a, b) = [a, \infty) \cap (-\infty, b)$$

(ii) من اطراف m^* نفس على $m^*(A \cap E)$ ومن ثم يار

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c), \quad \forall A \subset \mathbb{R}$$

\times نفس $E = A$ ومنه $m^*(A) = 0$ ومنه

من اطراف m^* نفس على $m^*(B \cap E) = 0$

ومن ثم فان

$$m^*(B) \geq m^*(B \cap E^c) =$$

$$= m^*(B \cap E) + m^*(B \cap E^c)$$

, $\forall E \subset \mathbb{R}$

(ii) صائب

(iii) خاطئ \times

(iv) صائب \times

(v) خاطئ \times



يكتب في
هذا الهامش





الرابع :
(ع)

نكون $f \in L^1(\Omega)$ لكل $n \in \mathbb{N}$
اقتراننا $(\psi_{nk} : k \in \mathbb{N})$ في $S_p(\Omega)$ حيث
 $\psi_k = \max\{\psi_{1k}, \psi_{2k}, \dots, \psi_{kk}\}$

ψ_{11}	ψ_{12}	ψ_{13}	ψ_{14}	"	"	f_1
ψ_{21}	ψ_{22}	ψ_{23}	ψ_{24}	"	"	f_2
ψ_{31}	ψ_{32}	ψ_{33}	ψ_{34}	"	"	f_3
ψ_{41}	ψ_{42}	ψ_{43}	ψ_{44}	"	"	f_4
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	⋮	⋮	f

$\psi_k \in S_p(\Omega)$ (ii)
 $\psi_1 \leq \psi_2 \leq \psi_3 \leq \psi_4 \leq \dots$ (ii')
 لكل $1 \leq \nu \leq k$ لكل $k \in \mathbb{N}$ لكل $x \in \Omega$ (ii'')

$$\psi_k(x) = \psi_{\nu k}(x)$$

$$\psi_{\nu k}(x) \leq f_\nu(x) \leq f_k(x)$$

$$\psi_k(x) \leq f_k(x)$$

$$\psi_{nk} \leq \psi_k \leq f_k, \forall k \in \mathbb{N}, n \leq k$$

$$f_n \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \psi_k \leq f, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \psi_k = f$$

$$\int_{\Omega} f d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \psi_k d\mu$$

$$\int_{\Omega} \psi_{nk} d\mu \leq \int_{\Omega} \psi_k d\mu \leq \int_{\Omega} f_k d\mu$$



$$\int_{\Omega} f_n d\mu \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \psi_k d\mu \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_k d\mu$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \psi_k d\mu$$

12

$$= \int_{\Omega} f d\mu \quad \checkmark$$