جامعـة الملك سعـود **كليـة العلـوم** **قسـم الرياضيـات**

الفصل الثاني ١٤٣٢-١٤٣٣هـ/ الإختبار النهـائي للمقرر ٣٨٤-ريض/ الزمن: ثلاث ساعات

التمـرين الأوّل <٣+٣+٣=٩ درجات>:

١) لتكن f دالة معرفة على $[-1,1]$ بـ: $f(x)=\begin{cases}1, & x\in[-1,1]\cap\mathbb{Q},\\ -1, & x\in[-1,1]\cap\mathbb{Q}^{c}.\end{cases}$.

تحقق فيما إذا كانت $f\in\mathcal{R}(-1,1)$. ماذا عن $|f|$؟

٢) إستعمل مجاميع ريمان لحساب النهاية $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$.

٣) أدرس تقارب التكامل المعتل $I=\int_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{2+x^8}}$.

التمـرين الثاني <٣+٣+٣=٩ درجات>:

١) أوجد النهاية النقطية لمتتالية الدوال $f_n(x)=\frac{nx}{e^{nx}}$ حيث $x\in[0,2]$، و هل تتقارب بإنتظام على كامل الفترة $[0,2]$؟ (علل إجابتك).

٢) إذا كانت $f_n(x)=\tan^{-1}\left(\frac{2x}{x^2+n^3}\right)$، فأحسب $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^5 f_n(x)dx$.

٣) إذا كانت $f_n(x)=\frac{x}{(1+x)^n}$، فبين أن: $\int_1^2\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)\right)dx=1=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_1^2 f_n(x)\,dx$.

التمـرين الثالث <٣+٣+٣=٩ درجات>:

١) لتكن A مجموعة جزئية مثبّتة من المجموعة X. أوجد جبر سيقما، (من مجموعات X الجزئية)، مولدة بواسطة $\{A\}$، (علل إجابتك).

٢) أحسب المقدارين التاليين: $m\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left(n,n+\frac{1}{3^n}\right)\right)$ و $m([-1,1]\cap\mathbb{Q})$، (علل إجابتك).

٣) لتكن $f_1,f_2,\dots,f_n$ دوال قابلة للقياس. بين أن $\max(f_1,f_2,\dots,f_n)$ قابلة للقياس.

@@@ فضلا أقـلب الصفحـــة @@@

التمـــرين الرابع <3+5+5+2=15 درجة>:

1) أحسب تكـــــامل لبيق التالي: $I = \int_{[-1,2]} x^3 \, dx$.

2) أ) أورد نص نظرية التقارب المطّرد (MCT).

ب) ثم استعملها لتبين أنه إذا كانت $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^0_+(\Omega)$ و كانت $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ تتناقص نقطيا إلى f و إذا وجد $k\in\mathbb{N}$ بحيث $\int_\Omega f_k \, dm < \infty$ ، فإن $\int_\Omega f \, dm = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, dm$.

3) أ) أورد نص نظرية التقارب المسقوف (DCT).

ب) ثم استعملها لإثبات نظرية التقارب المحدود التالية: إذا كانت $m(\Omega) < \infty$ و كانت $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية **محدودة** من $\mathcal{L}^0(\Omega)$ حيث $f_n \longrightarrow f$ *a.e.* ، فإن $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ و لدينا $\int_\Omega f \, dm = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, dm$.

4) أورد نص تمهيدية فـــــاتو.

التمـــرين الخامس <4+4=8 درجات>:

1) لنفرض أن f دالة محدودة على الفترة المتراصة $I = [a,b]$.

أ) صف العلاقة بين الإقتضائين: $f \in \mathcal{L}^1(I)$ و $f \in \mathcal{R}(a,b)$.

ب) لتكن f دالة متصلة على المجموعة $C \subset I$. بواسطة قياس لبيق، أعط شرطا لازما و كافيا لتكون f قابلة لتكامل ريمان على الفترة I .

2) إذا كانت f قابلة للتكامل على $\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$ ، فبين أن $\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(nx) \, dx = 0$.

و الله ولي التوفيـــــــق

لا يكتب في هذا الهامش

إجابة السؤال الأول :

حل (1) :

ليكن $P=\{x_0,\dots,x_n\}$ تجزيئاً كيفياً للفترة $[-1,1]$

فإنه من كثافة Q و Q^c توجد

$M_i = 1$

$m_i = -1 \quad \forall\, i = 1,2,\dots,n-1$

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n-1} -1\,(x_i - x_{i-1}) = -1\,(1-(-1)) = -2$$

3

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n-1} 1\,(x_i - x_{i-1}) = 1\,(1-(-1)) = 2$$

$$U(f) \neq L(f) \Rightarrow f(x) \notin R(a,b)$$

في حال كانت $|f|$ في الدالة نجد أن :

$$L(f,P) = U(f,P) = 2 \Rightarrow |f| \notin R(a,b)$$

حل (2) : نختار التجزيء على $[0,1]$: $x_i = \frac{i}{n},\ w_i = \frac{i+1}{n},\ \Delta x_i = \frac{1}{n}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\,\frac{1}{n}$$

3

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(w_k)\,\Delta x_k$$

حل (3) :

$$I = \int_0^\infty \frac{d}{\sqrt{2+x^8}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2+x^8}} < \frac{1}{\sqrt{x^8}} = \frac{1}{\sqrt{(x^4)^2}} = \frac{1}{x^4}$$

$$\lim_{M\to\infty} \int_1^M \frac{dx}{x^4} = \lim_{M\to\infty} \left[\frac{-1}{3x^3}\right]_0^M \longrightarrow 0$$

3

∴ التكامل المعتل متقارب

هذا الهامش

حل السؤال الثاني:

حل (1):

النهاية النقطية $f_n(x) \longrightarrow f(x) = 0$ كيف؟

وبذن: $f'_n(x) = n(1-nx)e^{-nx}$

ندرس التقارب المنتظم

$$\sup_{x\in[0,2]} |f_n(x) - 0| = f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{e} \not\longrightarrow 0$$

(لأن النقاط الحرجة للدالة $f_n(x) \Leftarrow f'_n(x) = 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{n}$)

$\Leftarrow$ بالتالي التقارب غير منتظم.

لا يمكن أن الدالة غير تتقارب بانتظام على $[0,2]$ لأنها متصلة على كامل الفترة.

2½

حل (2):

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \tan^{-1}\left(\frac{2x}{x^2+n^3}\right) = 0$$

$$f'_n(x) \cancel{=} \tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow = \frac{\left(\frac{2x}{x^2+n^3}\right)'}{1+\left(\frac{2x}{x^2+n^3}\right)^2} = ?$$

كيف؟ ($f'_n(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$, $x = \pm n\sqrt{n}$ $\Leftarrow$ عند (نجد أن الدالة نقاط حرجة)

2½

$$\sup |f_n(x) - 0| = f(n\sqrt{n}) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \xrightarrow[n\to 0]{} 0$$

بالتالي $f_n(x)$ متقاربة بانتظام ويكون

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^5 f_n(x)\, d = \int_0^5 \lim f_n(x)\, dx = \int_0^5 0 \cdot dx = 0$$

لا يكتب في
هذا الهامش

حل (3):

$$f_n(x) = \frac{x}{(1+x)^n}$$

$1 \leq x \leq 2$

بما أن $x+1 \geq 2$ فإن $\left|\frac{1}{x+1}\right| < 1$ ومنه

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{x}{(1+x)^n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+x)^n}$$

$$= \frac{x}{1+x} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{1+x}} = 1 = f(x)$$

متقاربة

بالتالي متقاربة ولدينا: $\cancel{1+x \geq 2}$

بما أن $1 \leq x \leq 2$ فإن $1+x \geq 2$

ولدينا: $\frac{x}{(1+x)^n} \leq \frac{x}{2^n} \leq \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$

3

بالتالي من اختبار فايرشتراس نجد أن $\sum \frac{x}{(1+x)^n}$ متقاربة بانتظام لأن $\sum \frac{1}{2^{n-1}}$ متقاربة.

إذاً نستطيع إجراء التكامل تحت المجموع:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_1^2 f_n(x)\,dx \Rightarrow \int_1^2 1\,dx = [x]_1^2 = 2-1 = 1$$

بالتالي نجد أن

$$\int_1^2 \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right] dx = 1$$

وهو المطلوب

هذا الهامش

حل السؤال الثالث :

حل (1) :

$= \{X, \emptyset, A^c, A\}$

لأن جبر السيجما مغلقة تحت الاتحاد $\overset{\infty}{\cup} A$

و الفرق $A \setminus B$

و المجموعة

3

نجد $X \cup A^c - \emptyset \cup X - A^c \cup A$

$- \emptyset \cup A - \emptyset \cup A^c - A \cup X$

كذلك بالنسبة ~~$X \setminus B$~~ ~~$X \setminus A^c$~~

للفرق ~~$X \setminus \emptyset$~~ ~~$X \setminus X$~~

و المجموعة X ~~A~~

حل (2) :

1) $m\left[\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(n, n+\frac{1}{3^n}\right)\right]$

اتحاد لمجموعات منفصلة بالتالي مقياس مجموع الاطوال

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(n, n+\frac{1}{3^n}\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m\left(n, n+\frac{1}{3^n}\right)$$

$2\frac{1}{2}$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \ell\left(n+\frac{1}{3^n}-n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \cancel{X}$$

لانها متسلسلة هندسية متناهية مجموعها = 1 .

2) $m([-1,1] \cap Q)$

بما أن Q مجموعة قابلة للعد فانه مقياسها معدوم

وبالتالي $m([-1,1] \cap Q) = 0$

$[-1,1] \cap Q \subset Q$

لا يكتب في
هذا الهامش

حل (3) :

$$\{x, \max(f_1, f_2, \dots, f_n)(x) \cancel{<} > a\} = \bigcap_{i=1}^{n} \{x, f_i(x) \cancel{<} > a\}$$

~~اتحاد~~ تقاطع قابل للعد لمجموعات قابلة للقياس بالتالي

$\max(f_1, f_2, \dots, f_n)$

قابلة للقياس.

3

لكن أيضاً $\{x, \min(f_1, f_2, \dots f_n)(x) > a\} = \bigcup_{i=1}^{n} \{x, f_i(x) > a\}$

هو إتحاد قابل للعد لمجموعات قابلة للقياس بالتالي

$\min(f_1, f_2, f_n)$ قابل للقياس.

لا يكتب في هذا الهامش.

حل السؤال الرابع :

حل (1)

$$f^+(x) = f \times \chi_{[0,2]} \quad , f^-(x) = x \chi_{[-1,0]}$$

$$\varphi_n = \sum_{i=1}^{2^n} \left(\frac{2(i-1)}{2^n}\right)^3 \chi_{\left[\frac{2(i-1)}{2^n}, \frac{2i}{2^n}\right]} \qquad \varphi_n \nearrow f^+$$

$$\varphi_n = \sum_{i=1}^{2^n} \left(\frac{i}{2^n}\right)^3 \chi_{\left[\frac{-i}{2^n}, \frac{-(i-1)}{2^n}\right]} \qquad \varphi_n \nearrow f^-$$

الآن:

$$\int_{[-1,2]} f^+ dx = \lim_{n\to\infty} \int_{[-1,2]} \varphi_n$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{2^n} \left(\frac{2(i-1)}{2^n}\right)^3 \left(\frac{\cancel{2i} - \cancel{2i} + 2}{2^n}\right)$$

3

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{4(n-1)}} \sum_{i=1}^{2^n} (i-1)^3 \sum_{1}^{2^n - 1} k^3$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{4(n-1)}} \left(\frac{2^n(2^n-1)}{2}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{4(n-1)}} \cdot \frac{2^{4n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)^2}{4} = 4$$

$$\Rightarrow \int_{[-1,2]} f^- = \int_{[-1,2]} \varphi_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{2^n} \left(\frac{i}{2^n}\right)^3 \left(\frac{-\cancel{i} - (-\cancel{i} + 1)}{2^n}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{4n}} \sum_{i=1}^{2^n} (i)^3 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{4n}} \left(\frac{2^n(2^n+1)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

بما أن

$$f^+ < \infty \ \text{و} \ f^- < \infty \Rightarrow \int_{[-1,2]} x^3 dx = \int_{[-1,2]} f^+ dx - \int_{[-1,2]} f^- dx$$

$$\Rightarrow = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4} \ \#$$

لا يكتب في هذا الهامش

حل (٢): (أ)

نظرية التقارب المطرد:

لتكن $\{f_n\} \in \mathcal{L}^0_+(\Omega)$ قابلة للقياس وموجبة و $f_n \nearrow f$ تتزايد فإن $f \in \mathcal{L}^0_+(\Omega)$

ولدينا

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, dm = \int_\Omega f \, dm$$

٤

(ب) نعرف متتالية $g_n = f_k - f_n$ وأن $g_n \geq 0$ لكل $n \leq$

و $g_n \nearrow f_k - f$ ، وبما أن فنجد أن $g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ ، موجبة وقابلة للقياس

ثم نطبق نظرية التقارب المطرد:

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega (f_k - f_n)\, dm = \int_\Omega (f_k - f)\, dm$$

3

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, dm = \int_\Omega f \, dm$$

وهو المطلوب

حل (3):

نظرية التقارب المسقوف: (DCT)

تحت الشروط الاربعة لدينا:

1. $f_n \subset \mathcal{L}^0(\Omega)$
2. $f_n \to f$ a.e.
3. $|f_n(x)| \leq g(x)$ a.e.
4. $g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$

$\Longrightarrow$ $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ ؛ ولدينا:

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, dm = \int_\Omega f \, dm$$

(نظرية التقارب المسقوف)

لتكن $f_n \subset \mathcal{L}^0(\Omega)$ متتالية قابلة للقياس ، $f_n \to f$ a.e.

وكانت توجد $g(x) \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ و $|f_n(x)| \leq g(x)$ a.e.

٢ $\forall n \in \mathbb{N}$ بالتالي فإن $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ ولدينا

الهامش

حل (3) فقرة (ب)

لنفرض: $|f_n(x)| \le K \quad \forall\, n\in\mathbb{N}$ و $(x\in\Omega)$

ثم نضع $g(x)=k$ وبما أن $m(\Omega)<\infty$

فإن $g(x)\in\mathcal{L}^1(\Omega)$ ويتحقق لدينا شرط نظرية التقارب المسيطر، نطبقها، فنجد أن: 3

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n\,dm=\int_\Omega f\,dm$$

حل (4)

تمهيدية فاتو:

لتكن $f_n\in\mathcal{L}^0_+(\Omega)$ فإن $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n\in\mathcal{L}^0_+(\Omega)$ ولدينا

$$\int_\Omega \liminf f_n\,dm \le \liminf \int_\Omega f_n\,dm$$ 2

حل السؤال الخامس:

حل (1) (أ)

اذا كانت $f\in R(a,b) \Longrightarrow f\in\mathcal{L}^1(I)$ ولدينا:

$$\int_I f\,dx=\int_a^b f\,dx$$ 2

بينما العكس غير صحيح بالضرورة

مثال الدالة:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Q}\\ 1 & x\in\mathbb{Q}^c\end{cases}$$

قابلة للتكامل لبيق

ولكن غير قابلة لتكامل ريمان لأن $L(f)\ne U(f)$

حل (1) (ب)

$$m^*(I\setminus C)=0 \iff f\in R(a,b)$$

أي نقاط عدم الاتصال تكون معدومة القياس.

حل (ج)

التكامل المعتل على $\mathbb{R}$،

هناك نظرية تؤكد وجود دالة درجية φ حيث

لكل $\varepsilon>0$:

$$\int_{\mathbb{R}} |f-\varphi|\,dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

لتكن $\varphi = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \chi_{[a_i,b_i)}$ فإنه

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(nx)\,dx\right| \leq \left|\int_{-\infty}^{\infty} (f(x)-\varphi(x))\cos nx\,dx\right| + \left|\int_{-\infty}^{\infty} \varphi \cos nx\,dx\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \left|\sum_{i=1}^{k} c_i \int_{a_i}^{b_i} \cos nx\,dx\right|$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \left|\sum_{i=1}^{k} \frac{c_i}{n}(\sin b_i n - \sin a_i n)\right|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2}{n}\left|\sum_{i=1}^{k} c_i\right| < \varepsilon \quad \forall n \geq \frac{4}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{k}|c_i|$$

بالتالي

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(nx)\,dx = 0$$