جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الرياضيات

الإمتحان النهائي للمقرر (384) ريض
الفصل الأول للعام الدراسي
1428/1429هـ

يوم الأحد 1429/1/25هـ
الزمن : ثلاث ساعات

السؤال الأول : أ) نفرض أن f داله محدودة على الفترة $I=[a,b]$. فإذا كانت f داله قابله للتكامل عتى الفترة $I=[0,1]$, برهن أنه يوجد نجزيء P_ε ل I بحيث يكون :

$$U(f,P_\varepsilon)-L(f,P_\varepsilon)\prec\varepsilon \qquad *$$

ب) إذا كانت $f(x)=x^2$, حيث $0\le x\le 1$. برهن أنه لكل $\varepsilon\succ 0$ يوجد تجزئ P_ε ل $I=[0,1]$ بحيث تكون المتراجحة * محققة .

السؤال الثاني : ا) لنعرف الدالة $f(x)=\begin{cases} x\,, & 0\le x\le 1\,,\ x\in Q\\ 0\,; & 0\le x\le 1\,,\ x\notin Q\end{cases}$ ولنأخذ تجزيء $P=\{x_0\,,x_1,\ldots,x_n\}$ للفترة $I=[0,1]$. نعلم أنه يوجد $y_i\in Q$ بحيث يكون $x_i\prec\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\prec y_i\prec x_{i+1}$, حيث $0\le i\le n$. إ ستفد من هذه المتراجحة في برهان صحة المتراجحة $U(f)\ge\frac{1}{2}$ ثم استنتج أن f غير قابلة للتكامل على الفترة $I=[0,1]$.

ب) إذا كان $a\succ 0$, ولنعرف المتتالية $((f_n(x))=\left(\frac{x}{x+n}\right)$. برهن أن تقارب النهاية $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ بإنتظام عتى الفترة $[0\,,a]$ وغير متقاربة بإنتظام على الفترة $[0\,,\infty)$.

السؤال الثالث : أ) إذا كانت $f_n(x)\in R(a\,,b)$ لكل $n\in N$ وكانت $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ متقاربة بإنتظام على الفترة $[a\,,b]$. برهن أن $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ قابلة للتكامل على $[a\,,b]$ وأن

$$\int_a^b\left[\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\right]dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)dx$$

ب) لنرمز ب M لمجموعة المجموعات الجزئية في $\Re$ القابلة للقياس . فإذا كانت $E_i\in M$, حيث $i\in N$, $E_i\cap E_j=\Phi$, $i\neq j$. برهن بإستخدام طريقة الإستنتاج الرياضي أن $m^*\left[A\cap(\bigcup_{i=1}^{n}E_i)\right]=\sum_{i=1}^{n}m^*(A\cap E_i)$ لكل $A\subseteq\Re$

السؤال الرابع : ا) إذا كانت $E\subseteq\Re$ وكان $c\in\Re$, برهن ان $m^*(E+c)=m^*(E)$.

ب) نفرض أن $E\in M$. برهن أنه لكل $\varepsilon\succ 0$ توجد مجموعة مفتوحة G , حيث $E\subseteq G$ وأن $m^*(G\setminus E)\prec\varepsilon$ ، حيث نفرض أن $m(E)<\infty$ مفتوحًا .

ج) إذا كانت $F\in M$ وكانت $G\subseteq\Re$. نعلم أن $F\Delta G=(F\setminus G)\cup(G\setminus F)$. فإذا كانت $m^*(F\Delta G)=0$ برهن أن $G\in M$.

السؤال الخامس : ا) إذا كانت $\Omega\in M$ وكانت الدالتان $f,g:\Omega\to\overline{\Re}$ بحيث إن $f=g\ \ a.e$ وكانت f قابلة للقياس , برهن أن g قابلة للقياس .

ب) نفرض أن $\Omega \in M$ وأن $f : \Omega \to \overline{\Re}$ قابلة للقياس . برهن أن $|f|$ قابلة للقياس .

ج) نفرض أن $\Omega \in M$ وأن $f \, , \, g \in S_{+}(\Omega)$ وكانت $f(x) \geq g(x)$ لكل $x \in \Omega$ برهن أن :

$$\int_{\Omega} f dm \geq \int_{\Omega} g dm$$

The solutions of Final exam. of 384 M.
First Semester 1428-1429 H.
الحلول الكاملة لامتحان المقرر (٣٨٤) ريض

السؤال الأول: أ) بما أن f قابلة للتكامل على $[a,b]$ فإن $U(f)=L(f)$. ليكن $\epsilon>0$
وحسب تعريف $U(f)$ و $L(f)$ ، يوجد تجزئتان P_1 و P_2 لـ $[a,b]$ بحيث يكون

$$U(f,P_1) < U(f) + \frac{\epsilon}{2}$$
$$L(f,P_2) > L(f) - \frac{\epsilon}{2}$$

لنضع $P_\epsilon = P_1 \cup P_2$ فنجد

$$U(f,P_\epsilon) < U(f,P_1)$$
$$L(f,P_\epsilon) > L(f,P_2)$$

إذاً

$$U(f,P_\epsilon) - L(f,P_\epsilon) < U(f,P_1) - L(f,P_2)$$
$$< U(f) + \frac{\epsilon}{2} - L(f) + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

ب) لنأخذ الدالة $f(x)=x^2$ ، حيث $0\le x\le 1$. بما أن الدالة f متزايدة على $[0,1]$
إذاً ليكن $\epsilon>0$ ولنأخذ تجزئة للفترة $[0,1]$: $P_\epsilon = \{x_0,\dots,x_n\}$
حيث $x_{i+1} - x_i < \epsilon$ ، $i=0,1,\dots,n-1$
ومنه

$$U(f,P_\epsilon) - L(f,P_\epsilon) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1}^2 - x_i^2)(x_{i+1} - x_i)$$
$$< \epsilon[(x_1^2 - x_0^2) + (x_2^2 - x_1^2) + \dots + (x_n^2 - x_{n-1}^2)]$$
$$U(f,P_\epsilon) - L(f,P_\epsilon) < \epsilon.$$

السؤال الثاني:

أ) لتكن
$$f(x) = \begin{cases} x ; & 0\le x\le 1 ; \ x\in\mathbb{Q} \\ 0 ; & 0\le x\le 1 ; \ x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$$
. لتكن $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ تجزئة لـ $[0,1]$

نعلم أنه يوجد $y_i\in\mathbb{Q}$ بحيث يكون $x_i < \frac{x_{i+1}+x_i}{2} < y_i < x_{i+1}$ ، $i=0,1,\dots,n-1$

إذاً
$$U(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1}-x_i)$$
$$\ge \sum_{i=0}^{n-1} f(y_i)(x_{i+1}-x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i(x_{i+1}-x_i)$$
$$U(f,P) > \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}+x_i)(x_{i+1}-x_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}^2 - x_i^2) = \frac{1}{2}$$

ومنه $U(f) \ge \frac{1}{2} > 0$ أي أن $U(f)\ne 0$

ولكن
$$L(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1}-x_i) = 0$$

وبالتالي $L(f)=0$

إذاً $L(f) \neq U(f)$ ومنه f غير قابلة للتكامل حسب ريمان

ب) $\left(f_n(x)\right) = \left(\frac{x}{x+n}\right)$ ، حيث $0 \le x \le a$ ، $a > 0$

$$|f_n(x)| = \frac{x}{x+n} \le \frac{a}{n} \quad \forall \quad 0 \le x \le a$$

من أجل $\epsilon > 0$ نوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث يكون $\frac{a}{n} < \epsilon$ لكل $n \ge N$

أي أن $|f_n(x)| < \epsilon$ لكل $n \ge N$ ولكل $0 \le x \le a$

ومنه $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ بانتظام على $[0,a]$.

أما على الفترة $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ ، فإن $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ وأن التقارب غير منتظم

لأنه نوجد متتالية $(x_n) = (n) \in \mathbb{R}$ حيث $\lim_{n\to\infty} f_n(n) = \frac{1}{2} > \frac{1}{3} = \epsilon$.

السؤال الثالث:

أ) لتكن $(f_n) \in R(a,b)$ ، ولنفرض أن متتالية:

$S_n(x) = f_1(x) + \dots + f_n(x) \in R(a, b)$ ، وبما أن $\lim_{n\to\infty} S_n(x)$ بانتظام

حيث $a \le x \le b$ ، إذاً $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$ وأن $S(x) \in R(a,b)$ ، ليكن أيضاً

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n(x)dx = \int_a^b S(x)\,dx$$

أي

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \sum_{k=1}^{n} S_k(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_a^b S_k(x)dx$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b S_k(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} S_k(x)\right)dx$$

ب) نفرض أن $A \subseteq \mathbb{R}$ ، ولنثبت بالاستنتاج الرياضي أن:

$$m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i) \qquad (1)$$

بالفعل من الواضح أن (1) محققة عندما $n = 1$. الآن نفرض أن (1) محققة من أجل $n = k$ ولنبرهن صحة (1) من أجل $n = k+1$.

بما أن $E_{k+1} \in \mathcal{M}$ إذاً لدينا:

$$m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k+1} E_i\right)\right) = m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k+1} E_i\right) \cap E_{k+1}\right) + m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k+1} E_i\right) \cap E_{k+1}^c\right)$$

$$m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k+1} E_i\right)\right) = m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i\right)\right) + m^*(A \cap E_{k+1})$$

وباستخدام الاستنتاج الرياضي نجد:

$$m^*\left(A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} E_i\right)\right) = \sum_{i=1}^{k} m^*(A\cap E_i) + m^*(A\cap E_{k+1})$$

$$= \sum_{i=1}^{k+1} m^*(A\cap E_i) .$$

وهذا ما يبرهن صحة العلاقة (١) من أجل كل $n\in\mathbb{N}$.

السؤال الرابع:

أ) لتكن $E\subseteq\mathbb{R}$ ، $c\in\mathbb{R}$. لنفرض أن $\{I_i\}$ غطاء لـ E ، حيث $I_i=[a_i,b_i)$ ، ولنضع $J_i=[a_i+c, b_i+c)$ ، لذا $\{J_i\}$ تغطية لـ $E+c$

لذا
$$m^*(E+c) \le \sum_{i=1}^{\infty} l(J_i) = \sum_{i=1}^{\infty} l(I_i)$$

ومنه $m^*(E+c)\le m^*(E)$.

أيضاً لدينا
$$m^*(E) = m^*(E+c+(-c)) \le m^*(E+c)$$

ومنه $m^*(E+c)=m^*(E)$ لكل $c\in\mathbb{R}$.

ب) نفرض أن $E\in\mathcal{M}$ ، حيث $m(E)<\infty$. لذا توجد $\{I_i\}$ تغطية من J لـ E . بحيث يكون

$$m(E)+\frac{\epsilon}{2} > \sum_{i=1}^{\infty} l(I_i)$$ ، حيث $\epsilon>0$.

وهذا ناتج من تعريف $m(E)=m^*(E)$.

لنضع $I_i=[a_i,b_i)$ ، $J_i=\left(a-\frac{\epsilon}{2^{i+1}}, b_i\right)$ ، $G=\bigcup_{i=1}^{\infty} J_i$

لذا G مفتوحة تحتوي E وأن:

$$m(G) \le \sum_{i=1}^{\infty} m(J_i) = \sum_{i=1}^{\infty} l(I_i) + \frac{\epsilon}{2}$$

$$< m(E) + \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} = m(E)+\epsilon .$$

وبما أن $E, G\in\mathcal{M}$ وأن $m(E)<\infty$ لدينا لذا

$$m(G)-m(E) = m(G\setminus E) < \epsilon .$$

ج) لدينا $F\in\mathcal{M}$ ، ولتكن $G\subseteq\mathbb{R}$. حسب الفرضية لدينا $m^*(F\Delta G)=0$

ومنه
$$m^*(F\setminus G) \le m^*(F\Delta G)=0$$
$$m^*(G\setminus F) \le m^*(F\Delta G)=0$$

وبالتالي $m^*(F\setminus G) = m^*(G\setminus F)=0$. لذا

$G\setminus F$ ، $F\cap G\in\mathcal{M}$

لذا $F\cap G\in\mathcal{M}$. وبما أن $G=(G\setminus F)\cup(F\cap G)$ ، لذا $G\in\mathcal{M}$.

السؤال الخامس:

أ) لدينا $f,g:\Omega\to\overline{\mathbb{R}}$ ، حيث $\Omega\in\mathcal{M}$.

لدينا أيضاً $f=g$ a.e. ، حيث f قابلة للقياس.

لنضع $E=\{x;\ f(x)\neq g(x)\}$. لذا $E\in\mathcal{M}$ وأن $m(E)=0$

لتكن $\alpha\in\mathbb{R}$. لدينا

$$\{x;\ g(x)>\alpha\}=(\{x;\ f(x)>\alpha\}\cap E^c)\cup(\{x;\ g(x)>\alpha\}\cap E)$$

وبما أن $m(E)=0$ لذا $m^*(\{x;\ g(x)>\alpha\}\cap E)=0$ أي أن

$$\{x;\ g(x)>\alpha\}\cap E\in\mathcal{M}$$

ولكن $\{x;\ f(x)>\alpha\}\cap E^c\in\mathcal{M}$ لأن f قابلة للقياس، ومنه

$\{x;\ g(x)>\alpha\}\in\mathcal{M}$ أي أن g قابلة للقياس..

ب) لدينا $f:\Omega\to\overline{\mathbb{R}}$ قابلة للقياس. لتكن

$A=\{x;\ |f(x)|\le\alpha\}=\{x;\ f(x)\le\alpha\}\cap\{x;\ f(x)\ge-\alpha\}$ ، حيث $\alpha\in\mathbb{R}$

فإذا كانت $\alpha<0$ فإن $A=\emptyset\in\mathcal{M}$ ، أما إذا كانت $\alpha=0$

لدينا $A=\{x;\ f(x)=0\}\in\mathcal{M}$. أي أن $A\in\mathcal{M}$ إذا كانت

$\alpha>0$ وهنا نعود إلى أن f قابلة للقياس. لذا $|f|$ دالة قابلة للقياس.

ج) لنضع $f=\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{E_i}$ ، $g=\sum_{j=1}^{m}b_j\chi_{F_j}$

حيث $E_i\cap E_j=\emptyset$ ($i\neq j$) ، $\bigcup_{i=1}^{n}E_i=\Omega$ ، $F_i\cap F_j=\emptyset$ ($i\neq j$) ، $\bigcup_{j=1}^{m}F_j=\Omega$

$a_i\ge 0$ ، $i=1,\dots,n$ ، $j=1,\dots,m$.

لدينا

$$m(F_j)=\sum_{i=1}^{n}m(F_j\cap E_i)$$

$$b_j\,m(F_j)=\sum_{i=1}^{n}b_j\,m(F_j\cap E_i)$$

نفرض أن $F_j\cap E_i\neq\emptyset$ ، وعليه المجموعة $F_j\cap E_i$ ، لدينا $g(x)=b_j\le a_i\le f(x)$

وبالتالي لدينا $b_j\,m(F_j\cap E_i)\le a_i\,m(F_j\cap E_i)$. لذا

$$b_j\,m(F_j)\le\sum_{j=1}^{n}a_i\,m(F_j\cap E_i)$$

$$\sum_{j=1}^{m} b_j \, m(F_j) \le \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_i \, m(F_j \cap E_i)$$

$$\sum_{j=1}^{m} b_j \, m(F_j) \le \sum_{i=1}^{n} a_i \, m(E_i)$$

$$\int_a^b g(x)\, dx \le \int_a^b f(x)\, dx$$

حسام مكي