

## الفصل الثالث

الدفعات المتساوية المؤكدة بفائدة بسيطة

**Certain Annuities in Simple Interest**



#### ما درسنه سالها:

فى الفصلين السالفين كانت الدراسة منصبة على شقين الأول كيفية حساب الفائدة والجملة لمبلغ معين أو عدة مبالغ فضلاً عن حساب الفوائد الدورية وفوائد تأخيرها ومعدل الاستثمار العام ، الشق الثانى كان منصباً على دراسة القيمة الحالية والخصم بنوعية التجارى والصحيح لمبلغ واحد أو عدة مبالغ فضلاً عن دراسة تفصيلية لخصم الأوراق الأوراق التجارية وكيفية حساب معدل الخصم الاجمالى وتصوير حافطة الخصم التى تقدمها البنوك التجارية لعملائها بعد خصم الأوراق التجارية المقدمة لها.

#### ما ندرسه حالياً:

فى هذا الفصل سيتعرض القارئ لدراسة المفاهيم الأساسية للدفعات المتساوية المؤكدة من حيث مفهومها وأنوعها فضلاً عن كيفية حساب الجملة والقيمة الحالية والخصم لهذه الدفعات المتساوية سواء بمعدل خصم أو بمعدل فائدة.



## الفصل الثالث

### الدفعات المتساوية المؤكدة بفائدة بسيطة

#### **Certain Annuities in Simple Interest**

أولاً: المفاهيم الأساسية للدفعات المتساوية المؤكدة بفائدة بسيطة

انصبت دراستنا في الفصول السالفة على التعامل مع مبلغ واحد لا يتكرر دفعه (أو مبالغ مختلفة لا يتكرر دفعها) لإيجاد جملته أو قيمته الحالية أما إذا تكرر المبلغ بنفس القيمة وعلى فترات منتظمة (كل شهر أو شهرين أو ثلاثة ..... الخ) فإنه يطلق على هذه المبالغ المتكررة بالدفعات المنتظمة على سبيل المثال المبالغ التي يدخرها الطالب من مصروفه الشهري (10 جنيهات مثلاً) في آخر كل شهر تعتبر دفعات منتظمة لأن الفترات الزمنية بين كل مبلغ وآخر هي فترات زمنية متساوية. من ثم وقبل تحديد كيفية إيجاد جملة الدفعات أو القيمة الحالية لها ينبغي أن نبين ماهية الدفعة وما هي أنواعها كما يتجلى لنا فيما يلي:

#### 1-تعريف الدفعة

هي عبارة عن مجموعة مبالغ متساوي تدفع على فترات زمنية متساوية. وتجدر الإشارة بأنه إذا كانت مبالغ الدفعات متساوية فإنه يطلق عليها دفعات منتظمة ذات مبالغ متساوية.

#### 2-أنواع الدفعات

تقسم الدفعات بصفة رئيسية الى نوعين هما:

#### أولاً: الدفعات الاحتمالية:

وهي عبارة عن مبالغ متساوية يتوقف دفعها على وقوع حادث معين لذا قد يطلق عليها "دفعات شرطية" ومن ثم فإن عدد هذه الدفعات يتوقف على ظروف الشرط المتعلق بها ، مثال ذلك "دفعات المعاش" التي يحصل عليها الشخص طالما كان على قيد الحياة فإذا توفي فيتوقف الدفع لهذا نجد أن هذه الدفعات مشروطة بحياة الشخص ويتم دراسة هذه الدفعات بتوسع في مادة رياضيات التأمين.

## ثانياً: الدفعات المؤكدة:

هى عبارة عن مبالغ متساوية لا يتوقف دفعها على وقوع حادث معين لذا فيطلق عليها "دفعات مؤكدة" مثال ذلك التزام شخص بدفع أقساط شراء سيارة أو ثلاجة أو منزل ..... الخ فهذه الأقساط يلتزم الشخص بسدادها اذا كان على قيد الحياة حتى نهاية مدة السداد أو الورثة من بعده فى حالة وفاته.

وسوف تقتصر دراستنا على الدفعات المؤكدة التى تنقسم الى نوعين هما:

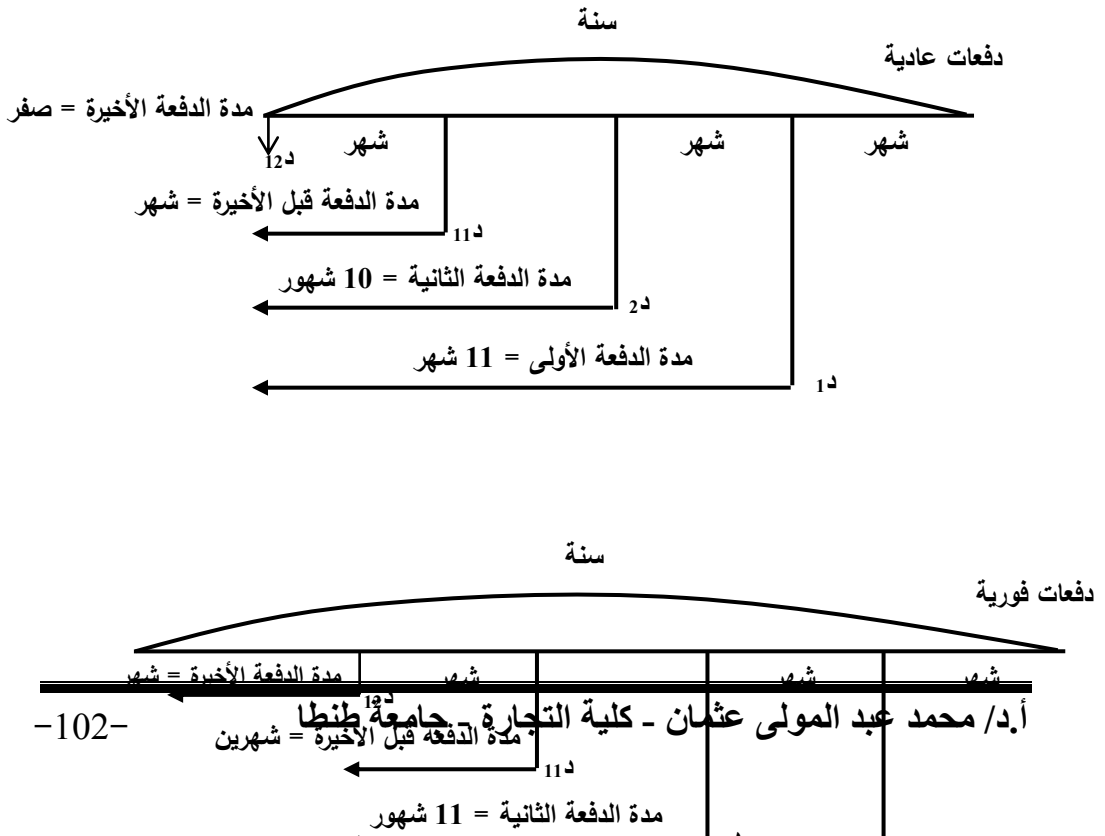
### ( أ ) دفعات متساوية عادية:

وهى التى تدفع فى آخر كل فترة زمنية ويطلق عليها "دفعات سداد" لأنها عادة تدفع لسداد دين أو استهلاك قرض.

### (ب) دفعات متساوية فورية:

وهى التى تدفع فى أول كل فترة زمنية ويطلق عليها "دفعات استثمار" لأنها تقطع عادة من المرتب أو الدخل فى أول كل فترة زمنية وتودع فى البنك أو صندوق التوفير بغرض رئيسى هو الاستثمار وتكوين رأس المال.

مما سبق يمكننا تصور الدفعات بنوعيهما على الرسوم التالية:



والجدير بالذكر أن الرسم السابقة توضح شكل كل من الدفعات العادية والفورية حيث يتبين الآتى:

1- أن مبالغ الدفعات عبارة عن مبالغ متساوية تدفع فى أول أو آخر كل فترة زمنية ويرمز لها بالرمز "د"

2- أن مدد الدفعات هى الفترات الزمنية المتساوية التى تفصل كل دفعه عن التى تليها وتختلف باختلاف المدة المتفق عليها فقد تكون شهر كما فى الرسمين السابقين أو ربع سنوية أو 6 شهور ... الخ كما أن مدة الدفعة الأولى ومدة الدفعة الأخيرة تختلف فى الدفعات المتساوية العادية عنها فى الفورية. لهذا اذا أردنا أن نحسب مدد الدفعات فيجدر الإشارة بنا أن نقول أن مدد الدفعات سواء كانت عادية أو فورية تتناقص بمقدار فترة زمنية واحدة فضلاً عن أن عدد الدفعات محدود.

من ثم نلاحظ أن مدد الدفعات تمثل متوالية عددية.

حدها الأول = مدة الدفعة الأولى

حدها الأخير - مدة الدفعة الأخيرة

عدد الحدود = عدد الدفعات

وعلى ذلك فإن حساب مجموع مدد الدفعات يتم باستخدام قانون "مجموع المتوالية العددية" كما يلى:

أ- فى حالة الدفعات العادية والتى مدتها شهر (أنظر الرسم)

$$\text{مجموع مدد الدفعات العادية} = \frac{12(11 + \text{صفر})}{2} = 66 \text{ شهراً} = \frac{66}{12} \text{ سنة}$$

حيث مجموع المتوالية العددية =  $\frac{\text{عدد الحدود}}{2} \times (\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير})$

ب- في حالة الدفعات الفورية والتي مدتها شهر (أنظر الرسم)

مجموع مدد الدفعات العادية =  $\frac{(1+12)12}{2} = 78$  شهراً =  $\frac{78}{12}$  سنة

حيث مجموع المتوالية العددية =  $\frac{\text{عدد الحدود}}{2} \times (\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير})$

3- جملة الدفعات المتساوية المؤكدة بفائدة بسيطة

قبل تحديد جملة الدفعات ينبغي تحديد المعالجة الرياضية لحساب فوائد الدفعات كما يتبين لنا فيما يلي.

1- المعالجة الرياضية لكيفية حساب فوائد الدفعات

بفرض أن مبلغ الدفعة يرمز له بالرمز "د"

وأن مدد الدفعات بالشهور يرمز لها بالرمز ش 1 ، ش 2 ، ..... ش ن على التوالي

ومعدل الفائدة البسيطة المئوي يرمز له بالرمز "ع"

وعدد الدفعات يرمز له بالرمز "ن" فإن:

$$\text{مجموع فوائد الدفعات} = \left( \frac{1 \times \text{ش} \times \text{د} \times \text{ع}}{12} \right) + \left( \frac{2 \times \text{ش} \times \text{د} \times \text{ع}}{12} \right) + \dots + \left( \frac{\text{ن} \times \text{ش} \times \text{د} \times \text{ع}}{12} \right)$$

$$= \left( \frac{1 + 2 + \dots + \text{ش} \text{ن}}{12} \right) \times \text{د} \times \text{ع}$$

وحيث أن الكمية بين القوسين تمثل متوالية عددية عدد حدودها "ن"

$$\text{مجموع فوائد الدفعات} = \sum_{r=1}^n \text{ف} \text{د}$$

$$(1) \quad \text{قيمة الدفعة} \times \text{المعدل} \times \frac{\text{عدد الدفعات}}{2} \times \frac{\text{مدة الدفعة الأولى} + \text{مدة الدفعة الأخيرة}}{12}$$

وينوه المؤلف بأنه إذا كانت مدد الدفعات بالأيام فينبغي القسمة على 360 بدلاً من

12 (إذا كانت المدة بالشهور)

ب- حساب جملة الدفعات المتساوية بفائدة بسيطة

حيث أن جملة أى مبلغ تساوى المبلغ مضافاً اليه فائدته لذا فإنه يمكن القول أن جملة الدفعات المتساوية بفائدة بسيطة ما هى الا مجموع الدفعات مضافاً اليها مجموع فوائدها. وحيث أن الدفعات متساوية القيمة من ناحية وعددها محدود من ناحية أخرى فإن مجموعها يمكن الحصول عليه بضرب مبلغ الدفعة  $\times$  عدد مرات دفعها لذا فإن:

جملة الدفعات المتساوية = مجموع الدفعات + مجموع فوائد هذه الدفعات

= مبلغ الدفعة  $\times$  عدد الدفعات + مبلغ الدفعة  $\times$  المعدل  $\times$  مجموع مدد الدفعات السنوية

أى أن:

$$(2) \quad \sum_{r=1}^n d + n \times d \times \frac{e}{2} \times \frac{n+1}{12} = \sum_{r=1}^n f_r + n \times d$$

والجدير بالذكر أن المعادلة (2) تحتوى على عدة عناصر اذا علمت كل العناصر ما عدا عنصر مجهول فإنه يمكننا بالتعويض بالعناصر المعلومة فى المعادلة حساب العنصر المجهور سواء كان ذلك العنصر مبلغ الدفعة أو معدل الفائدة أو عدد الدفعات أو مدة الدفعة.

فضلاً عن ذلك يمكن القول أن المعادلة (2) تمكننا من حساب جملة الدفعات أيأ كان التاريخ المزمع حساب الجملة فيه (نهاية مدة السداد أو الايداع أو تاريخ لاحق على نهاية تلك المدة).

### مثال 1

أودع أحد موظفى جامعة طنطا مبلغ 30 جنية شهرياً فى أحد البنوك - فإذا علمت أن البنك يحسب فوائد الاستثمار بمعدل فائدة بسيطة 11% فاحسب جملة ما يصير لذلك الموظف فى البنك فى نهاية 18 شهراً فى هاتين الحالتين.

أ- إذا كان يودع فى أول كل شهر

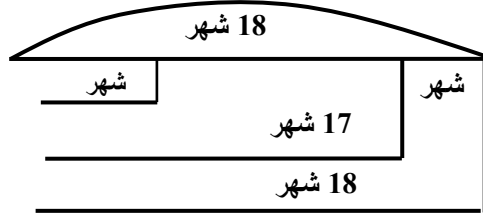
ب- إذا كان يودع فى آخر كل شهر (ثم قارن بين الحالتين)

### الحل

أولاً: إذا كان الايداع فى أول كل شهر (الدفعة الفورية)

جملة الدفعات = مبلغ الدفعة × عدد الدفعات + مبلغ الدفعة × المعدل × مجموع مدد الدفعات بالسنوات

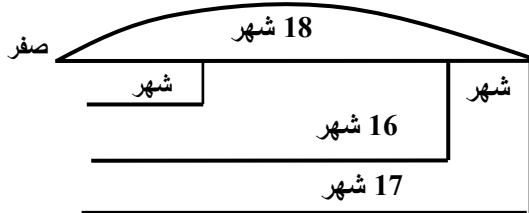
$$\sum_{r=1}^n F_r = D \times n + D \times E \times \frac{n}{2} \times \frac{ش+1}{12}$$



جملة ما يصير للموظف إذا كان يودع فى أول الشهر

$$587.025 \text{ جنية} = \frac{1+18}{12} \times \frac{18}{2} \times \frac{11}{100} \times 30 \times 18 \times 30 =$$

ثانياً: إذا كان الايداع فى آخر الشهر (الدفعة عادية)



جملة ما يصير للموظف إذا كان يودع فى آخر الشهر

$$582.025 \text{ جنية} = \frac{17 + \text{صفر}}{12} \times \frac{18}{2} \times \frac{11}{100} \times 30 \times 18 \times 30 =$$

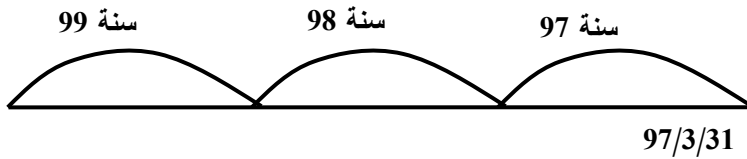
بمقارنة الجملتين معاً نجد أن الجملة في حالة الدفعات الفورية أكبر منها في حالة الدفعات العادية وهذا يعزى الى أن الدفعة الأولى في الدفعات الفورية استثمرت لمدة 18 شهراً والثانية 17 شهراً ..... وهكذا حتى الدفعة الأخيرة فقد استثمرت شهراً أما في حالة الدفعات العادية فإن الدفعة الأولى استثمرت فقط 17 شهراً والثانية 16 شهراً .... وهكذا حتى الدفعة الأخيرة فلم تستثمر على الإطلاق ولذا تنقص فوائد الدفعات العادية عن الدفعات الفورية.

## مثال 2

موظف يريد أن يشتري شقة سكنية في عمارة ينتهى تشطيبها في نهاية سنة 1999 فاذا علمت أن ثمن هذه الشقة في نهاية العام المذكور يبلغ 25000 جنية وسيدفع الموظف نقداً 18000 جنيهاً فاذا علمت أن الموظف يريد أن يودع في بنك الدلتا مبلغاً متساوياً من مرتبه الشهرى اعتباراً من آخر مارس 1997 وحتى تاريخ التشطيب بحيث يتمكن من سداد بقية ثمن الشقة في الموعد المقرر في نهاية 1999. المطلوب حساب مبلغ الدفعة التى يجب أن يودعها الموظف اذا كان البنك يحسب الفوائد البسيطة بمعدل 12%.

## الحل

المبلغ الباقي من ثمن الشقة = 18000 - 25000 = 7000 جنية = جملة الدفعات



$$\sum_{r=1}^n \text{دف} = \text{د} \times \text{ن} + \text{د} \times \text{ع} \times \frac{\text{ن}}{2} \times \frac{\text{ش}+1}{12}$$

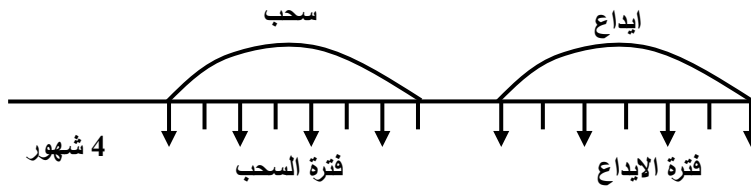
$$7000 = \text{د} \times 34 + \text{د} \times 5.61 = \frac{33 + \text{صفر}}{12} \times \frac{34}{2} \times \frac{12}{100} \times \text{د} + 34 \times \text{د} = 39.61$$

$$د = \frac{7000}{39.61} = 176.723 \text{ جنية أى أن مبلغ الدفعة} = 176.723 \text{ جنية}$$

### مثال 3

أودع شخص فى أحد البنوك مبلغاً قدره 100 جنية فى أول كل شهر من الشهور الأربعة لعام 1996 ثم قام بسحب مبلغاً قدره 50 جنيهاً فى آخر كل شهر من الشهور الأربعة التالية.

فالمطلوب حساب رصيد هذا الشخص فى نهاية العام المذكور اذا كان معدل الفائدة البسيطة 3% سنوياً.



أولاً: جملة دفعات الإيداع

$$\sum_{r=1}^n F_r = د \times ن + ع \times \frac{ن}{2} \times \frac{ش+1}{12}$$

عدد دفعات الإيداع = 4 دفعات

مدة الأولى = المدة كلها 12 شهراً

الدفعة الأخيرة = 9 شهور

$$\text{جملة الإيداع} = 4 \times 100 + \frac{3}{100} \times \frac{4}{2} \times \frac{9+12}{12} \times 100 = 410.5 \text{ جنية}$$

ثانياً: جملة دفعات السحب

عدد دفعات السحب = 4 دفعات

مدة الدفعة الأولى = 7 شهور

الدفعة الأخيرة = 4 شهور

$$\text{جملة دفعات السحب} = 4 \times 50 + \frac{3}{100} \times \frac{4}{2} \times \frac{4+7}{12} \times 50 = 202.75 \text{ جنية}$$

رصيد الشخص فى نهاية 1996 = 410.5 - 202.75 = 207.75 جنية

#### مثال 4

قام شخص بايداع 300 جنية فى أول ومنتصف كل شهر من شهور سنة 1995 وكان يسحب 50 جنية يوم 20 من كل شهر من شهور نفس العام وفى آخر العاد وجد المستحق له عند البنك 6852.458 جنيهاً فاحسب معدل الفائدة البسيطة باعتبار أن الشهر 30 يوماً.

#### الحل

عدد دفعات الايداع = 24 دفعة

مدة الدفعة الأولى = 12 شهراً

مدة الدفعة الأخيرة = 1/2 شهر

$$\text{جملة الايداع} = 300 \times 24 + 300 \times \frac{1/2 + 12}{12} \times \frac{24}{2} \times \text{ع}$$

$$= 7200 + 3750 \text{ ع}$$

ثانياً: جملة دفعات السحب

عدد دفعات السحب = 12 دفعة

مدة الدفعة الأولى = 11 1/3 شهر

الدفعة الأخيرة = 1/3 شهر

$$\text{جملة دفعات السحب} = 50 \times 12 + 50 \times \frac{1/3 + 11 1/3}{12} \times \frac{24}{2} \times \text{ع}$$

$$= 600 + 291.67 \text{ ع}$$

$$6852.458 = (7200 + 3750 \text{ ع}) - (600 + 291.67 \text{ ع})$$

$$= 3458.33 + 66000 \text{ ع}$$

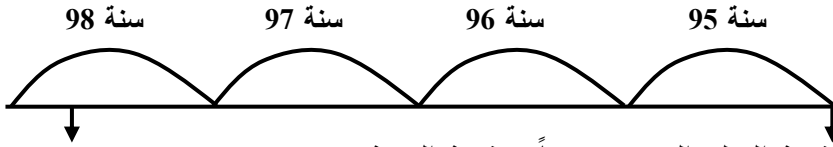
$$\text{ع} = 0.073 \text{ (أى أن معدل الفائدة البسيطة } = 7.3\%)$$

#### مثال 5

أودع طالب فى كلية التجارة - جامعة طنطا الفرقة الأولى مبلغاً ما فى أول كل شهر من أول يناير عام 1995 فى بنك القاهرة - فرع طنطا وفى نهاية السنة التى حصل على البكالوريوس فيها وجد جملة المستحق له فى البنك 693.6 جنية المطلوب تحديد المبلغ الذى كان يودعه الطالب شهرياً علماً بأنه لم يرسب فى أى عام كما أن البنك يستخدم معدل فائدة قدره 10% سنوياً.

### الحل

مدة الايداع 4 سنوات (من أول عام 1995 حتى نهاية عام 1998) كما هو مبين بالرسم التالى:



وبفرض أن قيمة المبلغ المودع شهرياً = قيمة الدفعة = د

$$\sum_{r=1}^n \frac{1}{(1 + \frac{d}{100})^r} = \frac{d}{\frac{d}{100}} \times \frac{n}{2} \times \frac{1}{12}$$

عدد الدفعات = 48 دفعة (4 سنوات  $\times$  12)

مدة الدفعة الأولى = 48 شهر

مدة الدفعة الأخيرة = شهر واحد

$$\frac{1 + 48}{12} \times \frac{48}{2} \times \frac{10}{100} \times d + 48 \times d = 693.6$$

$$9.8 + 48d =$$

$$57.8d = 693.6$$

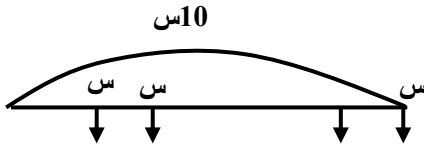
د = (المبلغ الذى يودعه الطالب شهرياً) = 12 جنية

### مثال 6

أودع موظف بجامعة طنطا عشرة مبالغ قيمة كل منها 100 جنية فى بنك مصر - فرع طنطا فاذا علمت أنه فى نهاية مدة الايداع وجد جملة المستحق له 1161.332 جنية المطلوب تحديد كل من مدة الايداع والفترة التى تفصل بين كل دفعه وأخرى اذا علمت أن معدل الفائدة البسيطة 8% سنوياً.

### الحل

بفرض أن الفترة التى تفصل بين كل دفعه وأخرى = مدى الدفعة = س شهراً



مدة الايداع = 10س شهراً

عدد الدفعات = 10 دفعات

مدة الدفعة الأولى = 10س شهراً

مدة الدفعة الأخيرة = س شهراً

$$\sum_{r=1}^n F_r = D \times n + D \times E \times \frac{n}{2} \times \frac{ش+1}{12}$$

$$1000 + 100 \times 10 + \frac{8}{100} \times \frac{10}{2} \times \frac{10س+10س}{12} =$$

$$1161.332 = 1000 + 40.333س$$

س (مدى الدفعة) = 4 شهور

مدة الايداع = 40 = 4 × 10 شهراً

### مثال 7

يودع تاجر فى البنك العقارى العربى - فرع طنطا فى بداية كل 3 شهور 1200 جنية بمعدل فائدة بسيطة 10% سنوياً فاذا علمت أنه فى نهاية مدة الايداع بلغ رصيده 30300 جنية المطلوب حساب مدة الايداع وعدد المبالغ التى أودعها التاجر.

### الحل

بفرض أن مدة الايداع = س شهراً

عدد المبالغ المودعه (عدد الدفعات) =  $\frac{س}{3}$  دفعة

مدة الدفعة الأولى = س شهراً

مدة الدفعة الأخيرة = 3 شهور

$$\sum_{r=1}^n \text{فج} = د \times ن + د \times ع \times \frac{ن}{2} \times \frac{ش+1}{12}$$

$$\frac{3+س}{12} \times \frac{س}{2} \times \frac{10}{100} \times 1200 + \frac{س}{3} \times 1200 = 30300$$

$$\frac{3+س}{12} \times \frac{1}{2} \times \frac{س}{3} \times \frac{10}{100} \times 1200 + 400س =$$

$$\frac{10س^2 + 30س}{12} + 400س = 30300$$

وبضرب طرفي المعادلة في 6 ينتج أن

$$181800 = 2400س + 10س^2 + 30س$$

$$10س^2 + 2430س - 181800 = \text{صفر بالقسمة على } 10$$

$$س^2 + 243س - 18180 = \text{صفر}$$

$$(س - 60)(س + 303) = \text{صفر}$$

$$س = 60 / س = -303 \text{ وهذا مرفوض}$$

مدة الايداع = 60 شهراً

وبالتالى فإن:

$$\text{عدد المبالغ المودعه} = \frac{60}{3} = 20 = \text{مبلغ } 20 \text{ دفعه}$$

4- القيمة الحالية والخصم للدفعات المتساوية المؤكدة بفائدة بسيطة أحياناً يقتضى الأمر إيجاد القيمة الحالية للدفعات المتساوية التى تدفع على فترات زمنية متساوية وهناك أمثلة عديدة فى حياتنا العملية لعل أبرزها هذين المثالين:

المثال الأول شخص اقترض مبلغ ما واتفق مع الدائن على سداده فى شكل دفعات (أقساط) متساوية عددها خمسة عشر دفعة الا أنه عند سداد الدفعة العاشرة تيسر له الحال ورغب فى سداد الدفعات (الأقساط) الخمسة المتبقية أى سدادها قبل تواريخ استحقاقها ، هنا يقتضى الأمر تحديد القيمة الحالية للدفعات المتبقية وذلك يعد تحديد قيمة الخصم المستحق للمدين مقابل تعجيله الدفع.

المثال الثانى شخص أراد التبرع لبعض الطلاب الفقراء بمبالغ شهرية متساوية لمساعدتهم خلال فترة الدراسة (التعليم الأساسى والثانوى والجامعى) الا أنه يزمع فى معرفة قيمة المبلغ الذى يودعه فى البنك بمعدل فائدة معين للوفاء بهذا الغرض فكيف يتم حساب قيمة هذا المبلغ؟ للإجابة على ذلك نرد ونقول أن القيمة الحالية للمبالغ الشهرية المتساوية المراد التبرع بها تعادل قيمة المبلغ الذى يجب ايداعه فى البنك لذلك يقتضى الأمر حساب القيمة الحالية للمبالغ الشهرية المتساوية.

من ثم ينبغى تحديد ماهية العلاقات الخاصة بالقيمة الحالية للدفعات المتساوية المؤكدة غير أنه قبل ذلك يجب تحديد المعالجة الرياضية لحساب الخصم لمبالغ الدفعات المتساوية كما يتبين فيما يلى.

أ-المعالجة الرياضية لكيفية حساب خصم مبالغ الدفعات المتساوية  
بفرض أن مبلغ الدفعة يرمز له بالرمز " د "

ومدى الدفعات بالشهور يرمز لها بالرموز ش1 ، ش2 ، ..... ، شn على التوالى

معدل الخصم يرمز له بالرمز "ص"

عدد مبالغ الدفعات يرمز لها بالرمز "ن"

قيمة خصم مبالغ الدفعات المتساوية بالرمز خ د

لذا فإن:

خصم مبالغ الدفعات المتساوية = خصم مبلغ الدفعة الأولى + خصم مبلغ الدفعة الثانية + ..... + خصم مبلغ الدفعة الأخيرة

$$\text{خ د} = \frac{\text{ش ن}}{12} \times \text{ص} \times \text{د} + \dots + \frac{2 \text{ش}}{12} \times \text{ص} \times \text{د} + \left( \frac{1 \text{ش}}{12} \right) \times \text{ص} \times \text{د} = \left( \frac{\text{ش ن} + 2 \text{ش} + \dots + 1 \text{ش}}{12} \right) \times \text{ص} \times \text{د} =$$

وحيث أن الكمية بين القوسين تمثل متوالية عددية عدد حدودها "ن" لهذا فإن:

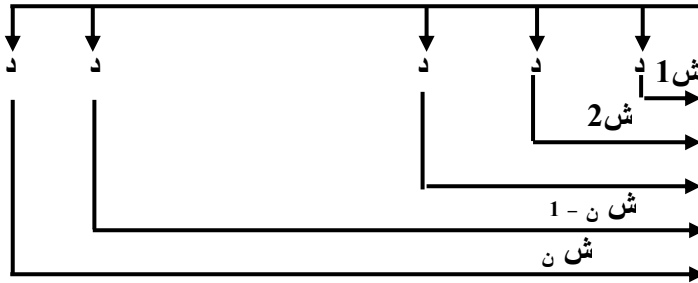
$$(3) \quad \boxed{\text{خ د} = \frac{\text{ش ن} + 1 \text{ش}}{12} \times \frac{\text{ن}}{2} \times \text{ص} \times \text{د} =}$$

خصم مبالغ الدفعات المتساوية =

$$\text{قيمة الدفعة} \times \text{معدل الخصم} \times \frac{\text{عدد مبالغ الدفعات}}{2} \times \frac{\text{مدة مبلغ الدفعة الأولى} + \text{مدة مبلغ الدفعة الأخيرة}}{12}$$

ب- حساب القيمة الحالية للدفعات المتساوية بفائدة بسيطة

باستخدام نفس الرموز السالفة المبينة في البند " أ " وكما هو موضح لنا من الرسم التالى:



يمكن ايجاد القيمة الحالية لمبالغ الدفعات المتساوية الذى يرمز لها بالرمز ج د وذلك بطرح خصم كل دفعة من القيمة الاسمية لها (أى باستخدام المعادلة : القيمة الحالية = القيمة الاسمية - الخصم) كما يلى:

القيمة الحالية لمبالغ الدفعات المتساوية = القيمة الحالية لمبلغ الدفعة الأولى + القيمة الحالية لمبلغ الدفعة الثانية + ..... + القيمة الحالية لمبلغ الدفعة قبل الأخيرة + القيمة الحالية لمبلغ الدفعة الأخيرة

$$= (د - د \times ص \times \frac{ش}{12}) + (د - د \times ص \times \frac{ش}{12}) + \dots + (د - د \times ص \times \frac{ش-1}{12}) + (د - د \times ص \times \frac{ش}{12})$$

وحيث أن عدد الدفعات = ن لذا فإن:

$$\sum_{r=1}^n (د - د \times ص \times \frac{ش+1+ش+2+\dots+ش}{12})$$

وحيث أن ش<sub>1</sub> + ش<sub>2</sub> + ..... + ش<sub>ن</sub> هي مجموع مدد الدفعات وهي تمثل متوالية عددية حدها الأول ش<sub>1</sub> ، وحدها الأخير ش<sub>ن</sub> وعدد حدودها ن لذا فإن:

$$(4) \quad \sum_{r=1}^n (د - د \times ص \times \frac{ش+1+ش}{12}) \times \frac{ن}{2}$$

أى أن:

القيمة الحالية لمبالغ الدفعات المتساوية = قيمة الدفعة × عدد مبالغ الدفعات - قيمة الدفعة × معدل الخصم × مجموع مدد الخصم بالسنوات  
والجدير بالذكر أن المعادلتين (3) ، (4) تحتوى على عدة عناصر اذا علمنا كل العناصر ما عدا عنصر مجهول فإنه يمكننا الحصول عليه بالتعويض بالعناصر المعلومة فى المعادلة سواء كان العنصر المجهول مبلغ الدفعة أو معدل الخصم أو عدد الدفعات أو مدة الدفعة.

### ملحوظة

علاوة على ما سلف ينوه المؤلف بأنه فى حالة ايجاد القيمة الحالية والخصم لمبالغ الدفعات المتساوية وذكر فى المسألة معدل فائدة بسيطة (ع) وليس معدل خصم (ص) ينبغى أولاً ايجاد معدل الخصم (ص) المكافئ لمعدل الفائدة البسيطة (ع) من العلاقة  $ص = \frac{ع}{ع+1}$  ثم ايجاد القيمة الحالية لمبالغ الدفعات بمعدل خصم وفقاً للمعادلة (4) كما يتبين لنا من الأمثلة الآتية.

### مثال 8

اشترى شخص ثلاجة من محلات عمر أفندى واتفق على دفع مقدم نقدي قدره 200 جنية من ثمنها وسداد الباقي على أقساط شهرية متساوية قيمة كل منها 100 جنية لمدة سنتان يدفع القسط الأول بعد مرور شهر من تاريخ الشراء المطلوب حساب ثمن الثلاجة النقدي اذا علمت أن معدل الخصم 15% سنوياً.

### الحل

ثمن الثلاجة النقدي = المقدم النقدي (200) + القيمة الحالية للأقساط الشهرية  
(القيمة الحالية لمبالغ الدفعات)

عدد الأقساط = 24 قسط = عدد الدفعات

$$\sum_{r=1}^n \frac{د}{(1+\frac{ص}{12})^{\frac{ش}{12}}} = د \times ن - د \times ص \times \frac{ن}{2} \times \left(\frac{ش+1}{12}\right)$$

$$\frac{24+1}{12} \times \frac{24}{2} \times \frac{15}{100} \times 100 - 24 \times 100 = \text{القيمة الحالية للأقساط الشهرية}$$

$$2025 = 375 - 2400 = \text{جنية}$$

$$\text{ثمن الثلاجة النقدي (الفوري)} = 200 + 2025 = 2225 \text{ جنية}$$

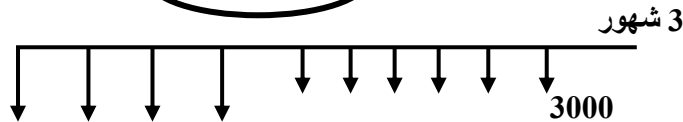
### مثال 9

اشترى شخص سيارة ولم يتمكن من سداد كامل قيمتها واتفق مع البائع على سداد الباقي من ثمن السيارة على عشرة أقساط ربع سنوية متساوية قيمة كل منها 3000 جنية فاذا علمت أنه في تاريخ استحقاق القسط السادس وقبل سداد القسط أراد سداد كافة الأقساط الباقية المطلوب:

1- تحديد القيمة الواجب سدادها

2- تحديد قيمة الخصم الواجب الحصول عليه مقابل السداد مبكراً اذا علمت أن معدل الخصم 7% سنوياً.

### الحل



1- القيمة الواجب سدادها قبل سداد القسط السادس

القيمة الواجب سدادها قبل سداد القسط السادس = القيمة الحالية للأقساط المتبقية

القيمة الحالية للأقساط المتبقية

$$\sum_{r=1}^n \frac{د}{(1+ش)^r} - د \times \frac{ن}{2} \times ص$$

د = 3000 ، ش<sub>1</sub> = صفر ، ش<sub>ن</sub> = 12 شهر

$$\frac{12+صفر}{12} \times \frac{5}{2} \times \frac{7}{100} \times 3000 - 5 \times 3000 = \text{القيمة الحالية للأقساط المتبقية}$$

القيمة الواجب سدادها قبل سداد القسط السادس = 15000 - 252 = 14475 جنية

2- قيمة الخصم الواجب الحصول عليه

يمكن الحصول على قيمة الخصم بطريقتين هما

الطريقة الأولى:

$$خ_د = د \times ص \times \frac{ن}{2} \times \frac{ش+1}{12}$$

$$525 \text{ جنية} = \frac{12+صفر}{12} \times \frac{5}{2} \times \frac{7}{100} \times 3000 = \text{الخصم الواجب الحصول عليه}$$

الطريقة الثانية:

الخصم الواجب الحصول عليه = مجموع مبالغ الأقساط المتبقية - القيمة الحالية للأقساط المتبقية

$$14475 - 5 \times 3000 =$$

$$525 \text{ جنية} = 14475 - 15000 =$$

مثال 10

أوجد القيمة الواجب سدادها بعد سداد القسط السادس مباشرة في المثال السابق رفق (9)

الحل

في هذه الحالة نجد أن:

$$\begin{aligned} \text{ش}_1 = 3 \text{ شهور} , \text{ش}_2 = 12 \text{ شهر} , \text{ن} = 4 \\ \text{القيمة الواجب سدادها بعد سداد القسط السادس مباشرة} = \\ \frac{12+3}{12} \times \frac{4}{2} \times \frac{7}{100} \times 3000 - 4 \times 3000 \\ = 11475 - 12000 = 525 \text{ جنية} \end{aligned}$$

الحل بطريقة أخرى:

$$\begin{aligned} \text{القيمة الواجبة السداد بعد سداد القسط السادس مباشرة} \\ = \text{القيمة الحالية للأقساط المتبقية في مثال (9) - قيمة القسط السادس} \\ = 14475 - 3000 = 11475 \text{ جنية} \end{aligned}$$

مثال 11

اشترى صاحب مطبعة ماكينة طباعة واتفق على سداد ثمنها على خمسة عشر قسط شهري قيمة كل منها 500 جنية الا أنه لم يتمكن من سداد الخمسة أقساط الأولى نظراً لظروفه المالية الصعبة وبعد تحسن ظروفه المالية في تاريخ استحقاق القسط السادس طلب سداد كافة الأقساط المتفق عليها مرة واحدة المطلوب حساب القيمة الواجب سدادها اذا علمت أن معدل الخصم 6% سنوياً ومعدل فائدة تأخير الأقساط 15% سنوياً.

الحل

بفرض أن القسط يدفع فوري أى في أول كل شهر ابتداء من تاريخ الشراء.

القيمة التى يجب على صاحب المطبعة سدادها فى تاريخ استحقاق القسط السادس = (مجموع الأقساط الخمسة الأولى + فوائد تأخيرها) + القيمة الحالية للأقساط العشرة الباقية.

$$= \left[ \frac{9 + \text{صفر}}{12} \times \frac{10}{2} \times \frac{6}{100} \times 500 + 10 \times 500 \right] + \left[ \frac{1+5}{12} \times \frac{5}{2} \times \frac{15}{100} \times 500 + 5 \times 500 \right] =$$

$$[ 112.5 - 5000 ] + [ 93.75 + 2500 ] =$$

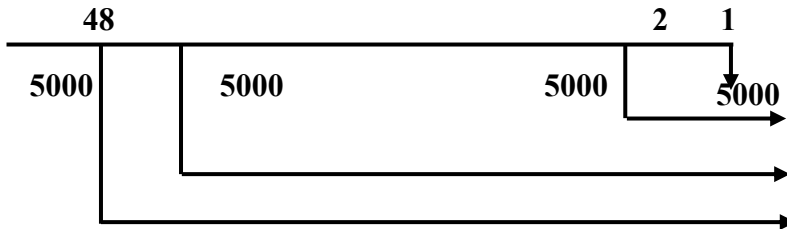
$$7481.25 = 4887.5 + 2593.75 =$$

### مثال 12

رغب أحد الأثرياء بطنطا التبرع بمبلغ ما وإيداعه فى البنك الأهلى - فرع طنطا للاتفاق على مجموعة من الطلاب الأيتام خلال فترة دراستهم الجامعية فى كلية التجارة - جامعة طنطا فاذا علمت أن المبلغ الذى يكفى للاتفاق الشهرى على الطلاب الأيتام قدره 5000 جنية المطلوب حساب قيمة المبلغ الذى يتبرع به هذا الثرى لإيداعه فى البنك المذكور للوفاء بالغرض المخصص له اذا علمت أن معدل الفائدة فى البنك 11% سنوياً كما أن مجموعة الطلاب الأيتام فى كلية التجارة ينجحون بتفوق كل عام.

### الحل

فترة الدراسة فى كلية التجارة 4 سنوات كما أن الاتفاق الشهرى سيكون أول الشهر لذا فإن الاتفاق يمثل دفعة فورية وبالتالي سيكون عدد الدفعات 48 دفعة كما هو مبين بالرسم التالى:



قيمة المبلغ الواجب إيداعه فى البنك = القيمة الحالية لمبالغ الاتفاق الشهرى خلال فترة دراسة الطلاب بالكلية.

لذا يمكن إيجاد القيمة الحالية لمبالغ الانفاق الشهرى وذلك بعد تحويل معدل الفائدة الى معدل خصم بمقتضى العلاقة التالية:

$$\%7.64 = 0.07639 = \frac{0.1}{0.11 \times 4 + 1} = \frac{ع}{ن + 1} = ص$$

القيمة الحالية لمبالغ الانفاق الشهرى =

$$\sum_{r=1}^n \frac{د}{(1 + \frac{ع}{ن})^r} = د \times ن - ص \times \frac{ن}{2} \times \left( \frac{ش + 1}{12} \right)$$

$$\frac{47 + \text{صفر}}{12} \times \frac{48}{2} \times 0.07639 \times 5000 - 48 \times 5000 =$$

$$204096.7 = 35903.3 - 240000 =$$

المبلغ الواجب ايداعه فى البنك = 204096.7 جنية

### مثال 13

يعرض أحد محلات بيع الأدوات المنزلية والكهربائية بطنطا طريقتان لبيع منتجاته الأولى الدفع نقداً والثانية الدفع بالتقسيط وذلك باضافة نسبة من الثمن النقدي للسلعة تختلف حسب عدد الأقساط فاذا علمت أن المحل يعرض تليفزيون سونى بمبلغ 4000 جنية نقداً أو اضافة 25% على ثمن البيع النقدي وبيعه بالتقسيط الشهرى لمدة 25 شهر.

المطلوب:

1- تحديد معدل الخصم السنوى المئوى.

2- تحديد معدل الفائدة البسيطة الذى يستثمر به صاحب المحل أمواله.

### الحل

1- تحديد معدل الخصم السنوى المئوى

القيمة الحالية لمبالغ الدفعات (الأقساط) =

$$\sum_{r=1}^n \frac{د}{(1 + \frac{ع}{ن})^r} = د \times ن - ص \times \frac{ن}{2} \times \left( \frac{ش + 1}{12} \right)$$

القيمة الحالية لمبالغ الدفعات (الأقساط) = الثمن النقدي للتليفزيون = 4000 جنية

### الفصل الثالث: الدفعات المتساوية المؤكدة بفائدة بسيطة

قيمة القسط الشهري (فى حالة البيع بالتقسيط) =  $25 \div \left( \frac{25 \times 4000}{100} + 4000 \right) = 200$  جنية = قيمة الدفعة

مدة الخصم للقسط الأول = صفر شهراً حيث سيدفع عند الشراء

مدة الخصم للقسط الأخير = 24 شهراً

$$4000 = 25 \times 200 - 200 \times \frac{25}{2} \times \frac{24 + \text{صفر}}{12}$$

$$5000 - 5000 =$$

$$1000 = 4000 - 5000 = \text{ص}$$

ص (معدل الخصم السنوى المئوى) = 20%

2- معدل الفائدة البسيطة الذى يستثمر به صاحب المحل أمواله

$$\text{ع (معدل الفائدة)} = \frac{\text{ص}}{1 - \text{ن ص}} = \frac{\text{معدل الخصم}}{1 - \text{المدة} \times \text{معدل الخصم}}$$

$$\text{معدل الفائدة الحقيقى الذى يستثمر به التاجر أمواله} = \frac{0.2}{0.2 \times \frac{25}{12} - 1} = 34.28\%$$

### تمارين على الفصل الثالث

- 1- أودع شخصاً مبلغ قدره 50 جنيهاً شهرياً فى بنك مصر - فرع القاهرة لمدة سنة ونصف فاذا علمت أن معدل الفائدة البسيطة 10% سنوياً المطلوب حساب جملة المستحق لهذا الشخص فى الحالتين الآتيتين:  
أ- اذا كان الايداع أول كل شهر  
ب- اذا كان الايداع آخر كل شهر
- 2- اتفق أحد موظفى جامعة طنطا مع بنك الاسكندرية - فرع طنطا الذى يحول عليه مرتبة على خصم 30 جنيهاً من مرتبة لمدة 4 سنوات المطلوب حساب جملة المستحق للموظف فى نهاية المدة اذا علمت أن معدل الفائدة البسيطة فى البنك 10% سنوياً وذلك فى الحالتين التاليتين:  
أ- اذا تم الخصم من المرتب أول الشهر  
ب- اذا تم الخصم من المرتب آخر الشهر
- 3- اقترض مزارع سلفه قدرها 5000 جنية من بنك التتية والائتمان الزراعى فى أول عام 1996 على أن يسدها على أقساط شهرية ابتداء من آخر يناير لنفس العام المذكور المطلوب حساب قيمة القسط الشهرى الذى يدفعه المزارع اذا علمت أن معدل الفائدة البسيطة 6% سنوياً.
- 4- أودع شخص عشرة دفعات عادية فى بنك القاهرة قيمة كل منها 50 جنية وفى النهاية وجد جملة المستحق له فى البنك مبلغ قدره 567.5 جنية المطلوب:  
أ- حساب الفترة التى تفصل بين كل دفعه وأخرى.  
ب- مدة سداد الدفعات اذا علمت أن معدل فائدة الاستثمار فى البنك 12% سنوياً
- 5- يودع شخص فى بنك النيل بطنطا فى أول ومنتصف الشهر مبلغ قدره 40 جنية كما أنه فى ذات الوقت يسحب نصف ما يودعه فى أول العشرة أيام الثانية كم كل شهر المطلوب حساب رصيد هذا الشخص فى نهاية سنتين كاملتين اذا علمت أن معدل الفائدة البسيطة 6% سنوياً.
- 6- أودع أيمن عبد المولى مبلغاً ما فى أول كل شهر من شهور سنة 1996 ثم أودع فى نهاية كل شهر من شهور سنة 1997 4 أمثال ما أودعه فى سنة

- 1996 فاذا علمت أنه كان يسحب في أول العشرة أيام الثانية من كل شهر من شهور سنتي 1996 ، 1997 نصف ما يودعه في سنة 1997 المطلوب
- أ- حساب قيمة الدفعة المودعه في سنة 1996
- ب- حساب قيمة الدفعة المودعه في سنة 1997
- ت- حساب قيمة الدفعة المسحوب في سنة 1997
- إذا علمت أن جملة الرصيد المستحق لأيمن عبد المولى في نهاية 1996 مبلغ قدره 233.467 جنية كما أن معدل الفائدة البسيطة 4% سنوياً.
- 7- أودع جمال حمودة في البنك الأهلي أول ومنتصف كل شهر مبلغ قدره 50 جنيهاً في نفس الوقت كان يسحب في أول العشرة أيام الأولى من كل شهر مبلغ قدره 40 جنيهاً المطلوب حساب رصيد جمال حمودة في نهاية 18 شهر على أساس معدل فائدة بسيطة 10%.
- 8- موظف مرتبه الشهري 300 جنية أراد ادخار 10% من مرتبة في أحد البنوك خلال عام 1997 فأى من الطريقتين الآتيتين أفضل للموظف ولماذا؟
- الطريقة الأولى: ايداع النسبة المراد ادخارها كدفعه فورية في أول العشرة أيام الثانية من كل شهر خلال العام المذكور.
- الطريقة الثانية: ايداع النسبة المراد ادخارها في منتصف كل شهر خلال العام المذكور اذا علمت أن معدل الفائدة البسيطة 8% سنوياً.
- 9- في بداية عام 1996 اقترض مزارع سلفة من بنك التنمية ولائتمان الزراعى - فرع كفر الشيخ على أن يسدها بع
- 10- سنتين على أساس معدل فائدة بسيطة 5% فاذا علمت أن جملة المستحق على المزارع في نهاية المدة المذكورة مبلغ قدره 2980.8 جنية كما أن المزارع بعد مرور شهرين من حصوله على السلفة اتفق مع البنك على سداد هذه السلفة على دفعات (بدلاً من دفعها في نهاية المدة المذكورة) الدفعة الأولى منها أول مارس 1996 وآخر دفعه في أول ابريل 1997.
- المطلوب حساب قيمة الدفعة الشهرية التى يدفعها المزارع اذا علمت أن معدل الفائدة البسيطة 5% سنوياً.

- 11- فى التمرين رقم (5) اذا علمت أن رصيد الشخص 15000 جنية بعد 3 سنوات المطلوب حساب معدل الفائدة الذى على أساسه تم حساب هذا الرصيد.
- 12- أودع عامل فى بنك العمال - فرع طنطا أول كل شهر دفعه متساوية قدرها 100 جنية وفى نهاية مدة معينة حسب جملة المستحق بمعدل فائدة بسيطة 12% فوجد 4130 جنية المطلوب ايجاد عدد الدفعات ومدة الايداع.
- 13- اشترى مهندس بشركة النصر للسيارات سيارة دوجان وتعهده بصاد ثمنها على 200 قسط ربع سنوى متساوى قيمة كل منها 2500 جنية الا أنه نتيجة ظروفه المالية الصعبة لم يتمكن من سداد العشرة أقساط الأولى وطلب فى تاريخ استحقاق القسط الحادى عشر سداد كافة الأقساط المستحقة عليه المطلوب حساب القيمة الواجبة السداد اذا علمت أن الشركة تستخدم معدل فائدة 15% سنوياً على الأقساط المتأخرة ومعدل خصم قدره 8% على الأقساط العاجلة.
- 14- دفعه فورية ربع سنوية قيمة كل منها 500 جنية أودعها تاجر أقمشة فى بنك التنمية الصناعى لمدة سنتان المطلوب:
- أ- حساب جملة هذه الدفعه فى نهاية المدة.
- ب- حساب جملة هذه الدفعه بعد مرور سنة كاملة من آخر دفعه تم ايداعها
- ت- حساب القيمة الحالية للدفعه فى الحالات التالية:
- 1- فى تاريخ استحقاق الدفعه الثالثة وقبل سداد الدفعه.
- 2- فى تاريخ استحقاق الدفعه الخامسة.
- 3- بعد سداد الدفعه الرابعة مباشرة.
- 4- فى تاريخ سالف على ايداع الدفعه الأولى بثلاثة شهور.
- 15- يودع شخص فى أحد البنوك دفعة ربع سنوية فاذا علمت أن جملة هذه الدفعه قبل دفع الدفعه السابعة مباشرة تبلغ 410.5 جنية المطلوب ايجاد قيمة هذه الدفعه الربع سنوية مبيناً تساوى قيمتها سواء كانت الدفعه عاديه أو فورية اذا كان معدل الفائدة البسيطة 4% سنوياً.