

[01_intro.pdf](#)

[02_waves.pdf](#)

[02_waves_1.pdf](#)

[03_geometry.pdf](#)

[04_1D Fourier.pdf](#)

[04_FFT1.pdf](#)

[05_velocity-Amp.pdf](#)

[06.Velocity.pdf](#)

[07_linearsystems.pdf](#)

[cross-correlation.pdf](#)

[Regression-Correlation.pdf](#)

[Smoothing-filters.pdf](#)

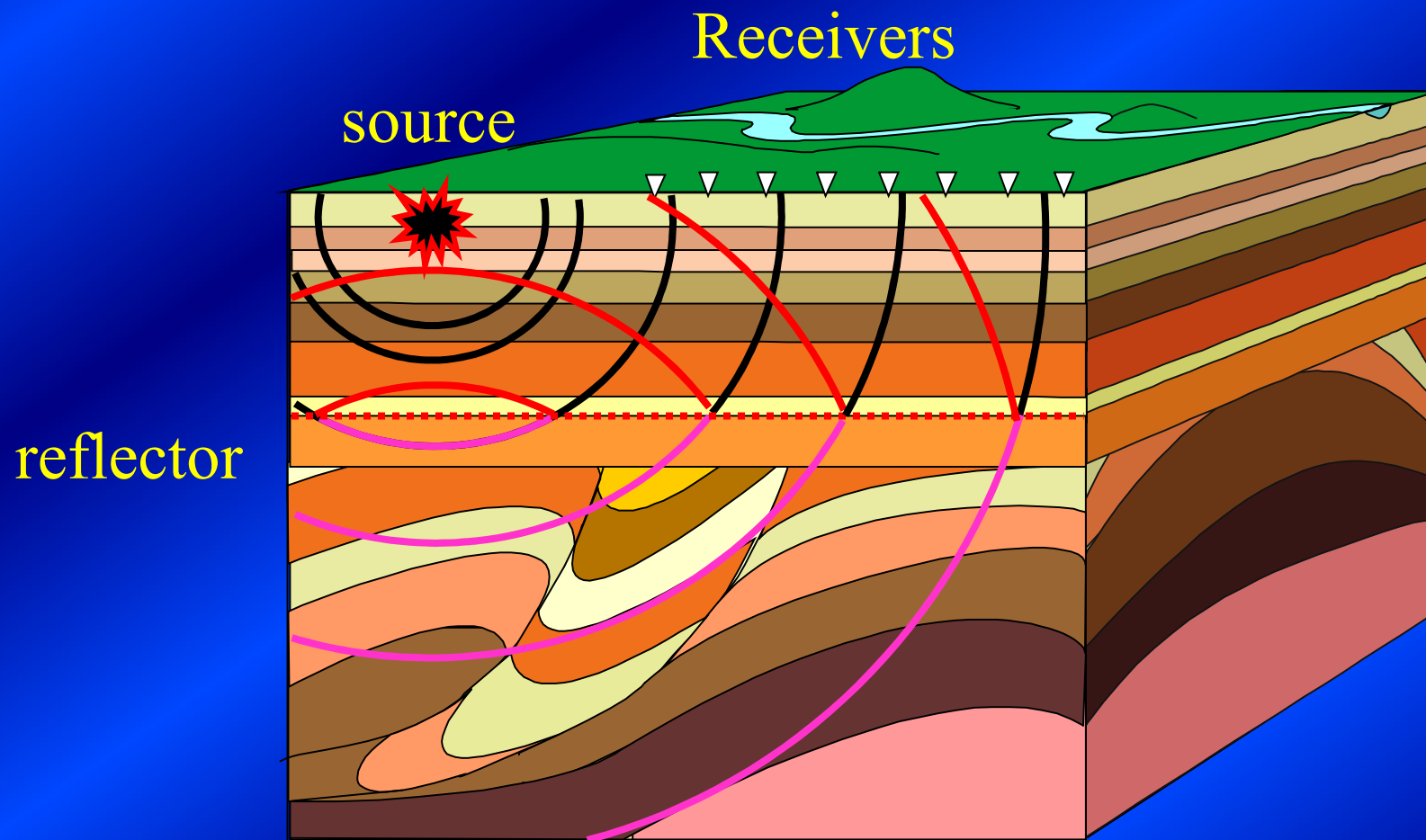
[Moving_Averages.pdf](#)

[Introduction To Filters.pdf](#)

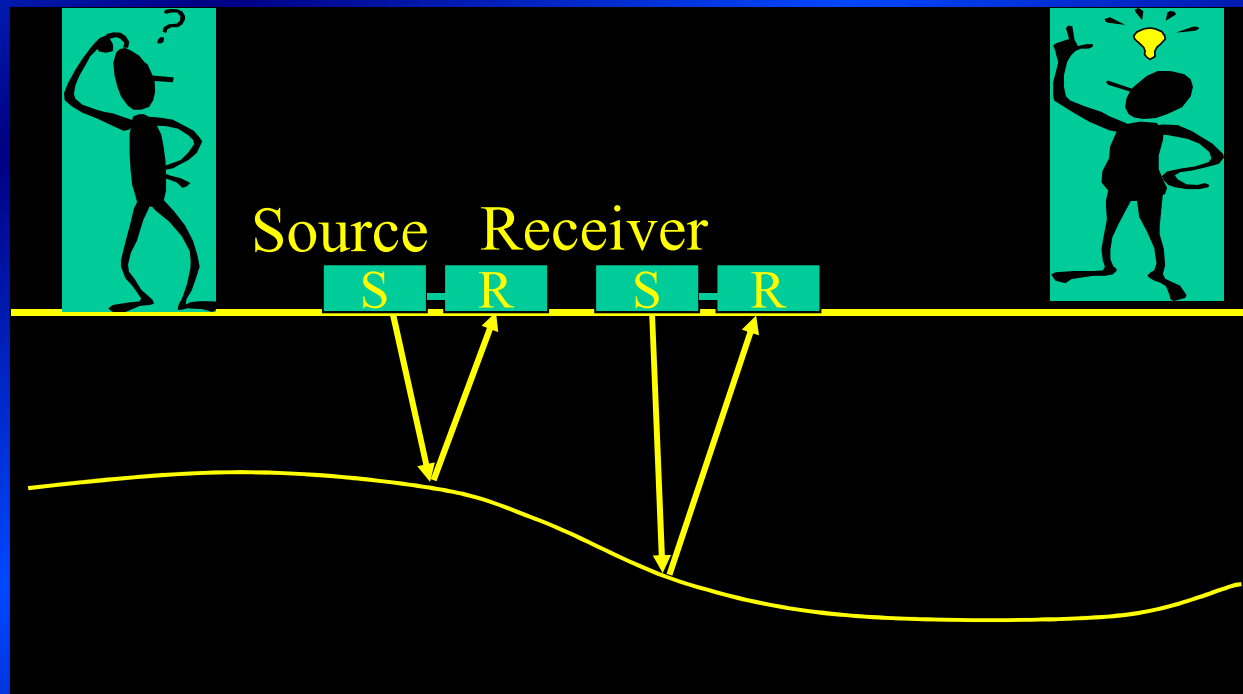
[Afilters.pdf](#)

[filters.pdf](#)

الانعكاس السيزمي



- Seismic measurement:
tool to obtain an image of the subsurface



Measurement →

Processing

→ Image

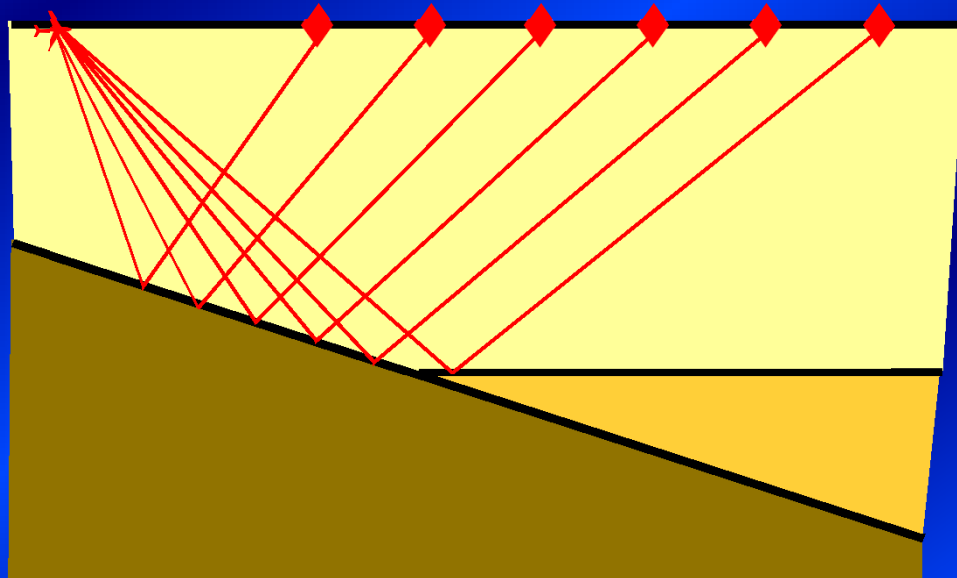
- Detect changes in the subsurface
- Detect objects

Reflection Seismics

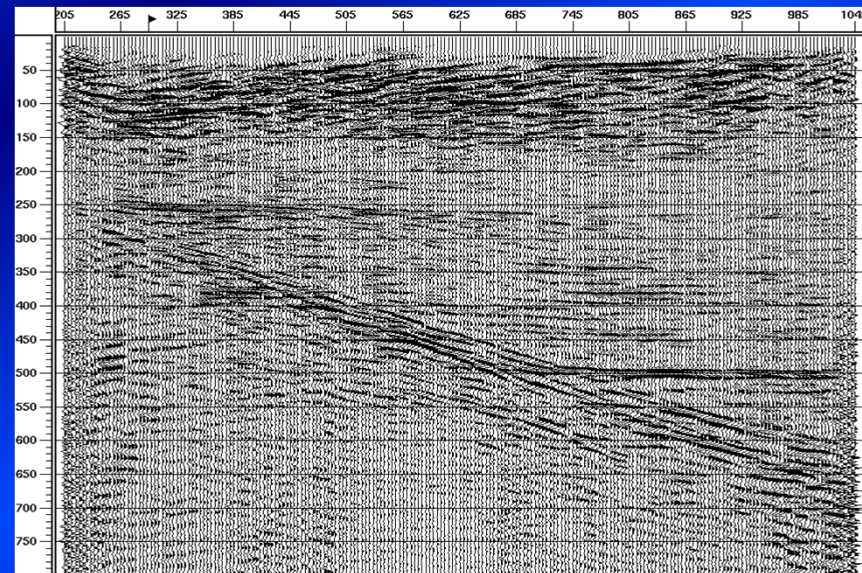
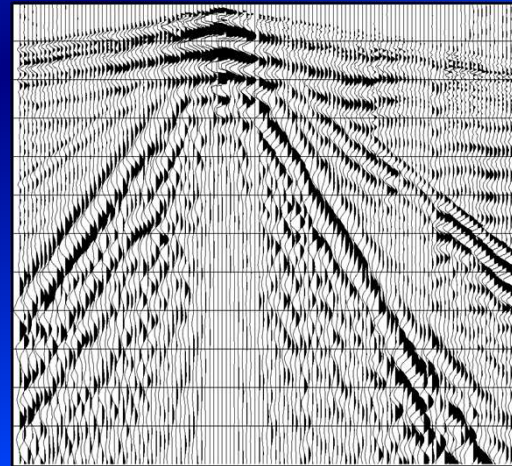
Source

Receiver

Raw data



geology



seismic Section

Seismic Imaging

Data acquisition

Data processing

Interpretation

Overview

Fundamentals

Introduction

Seismic waves: Propagation Velocity and Amplitudes

Seismogram

Measurement systems

Sources, receivers, Acquisition strategies

Data processing

“Pre-processing”

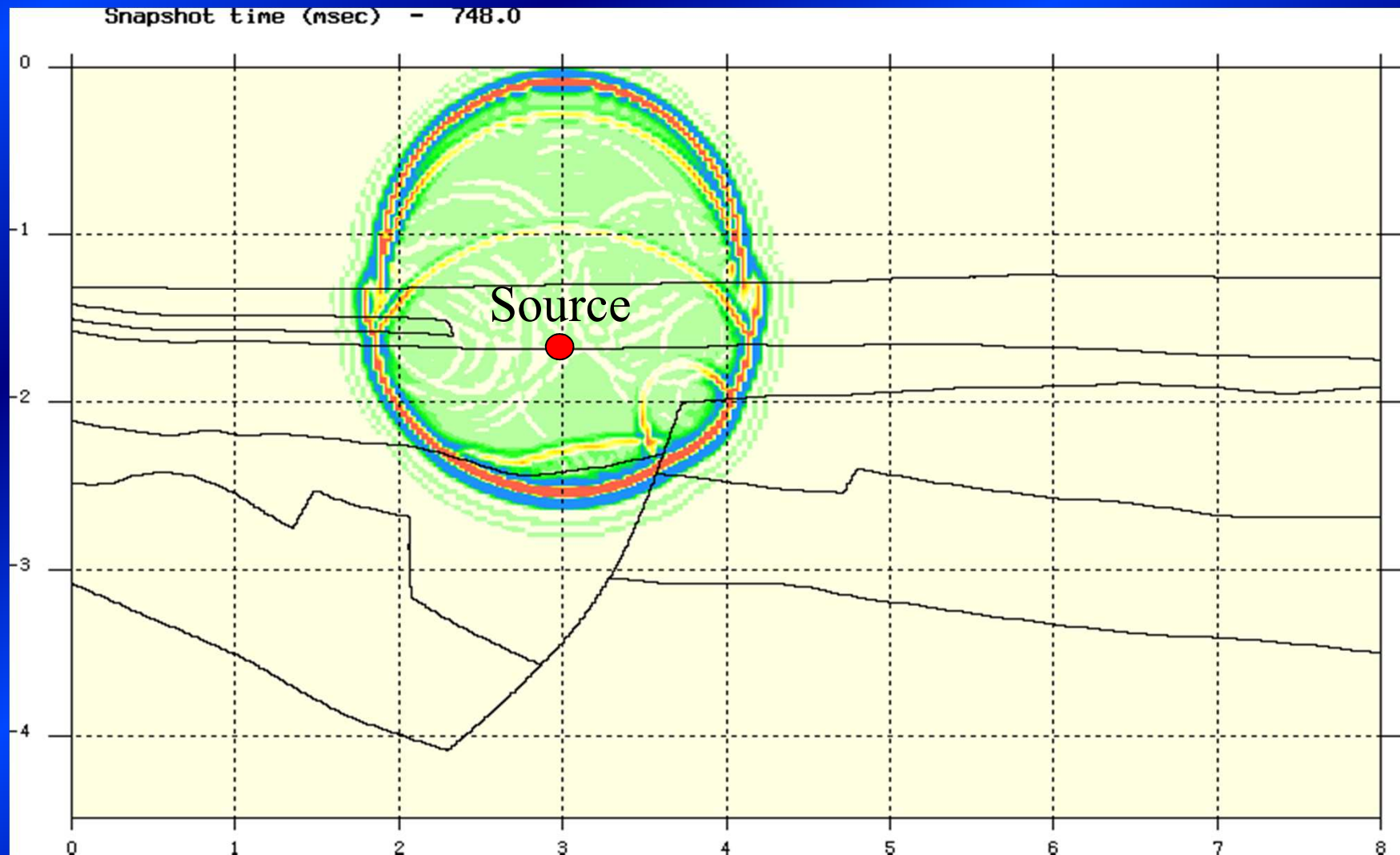
Filter und Deconvolution

Velocity analysis and Stacking

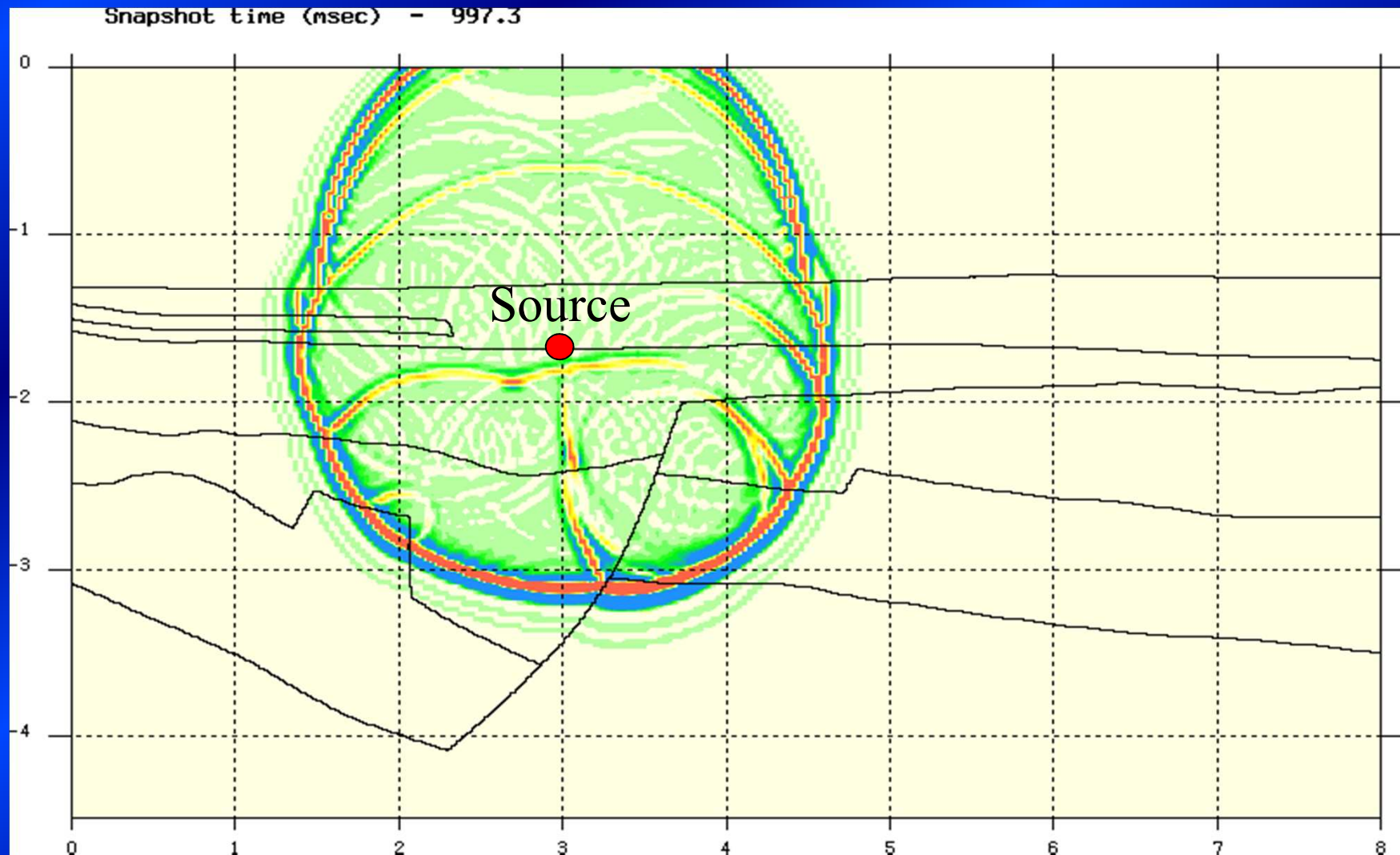
Migration

Interpretation

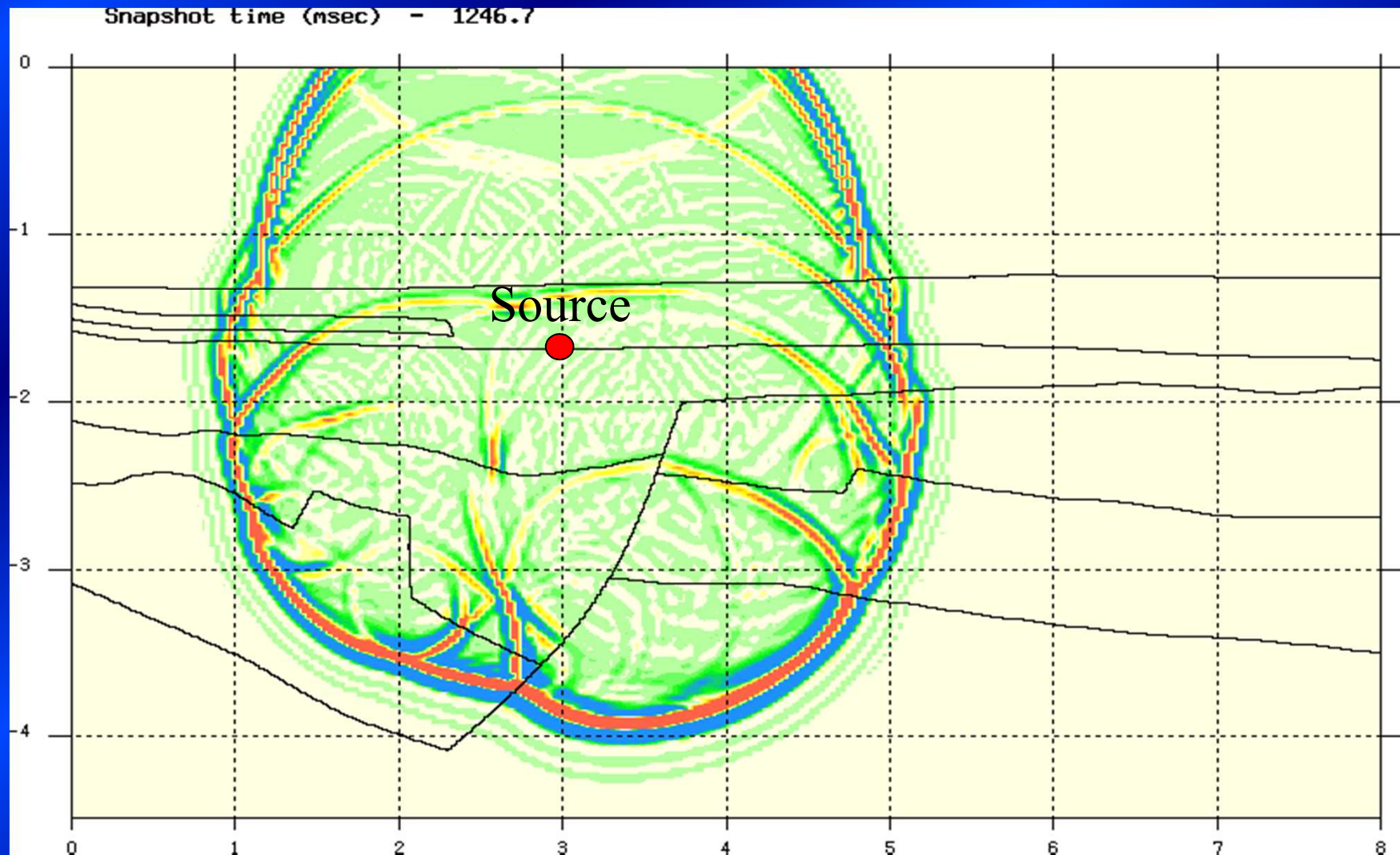
Snapshots of wavefield propagation



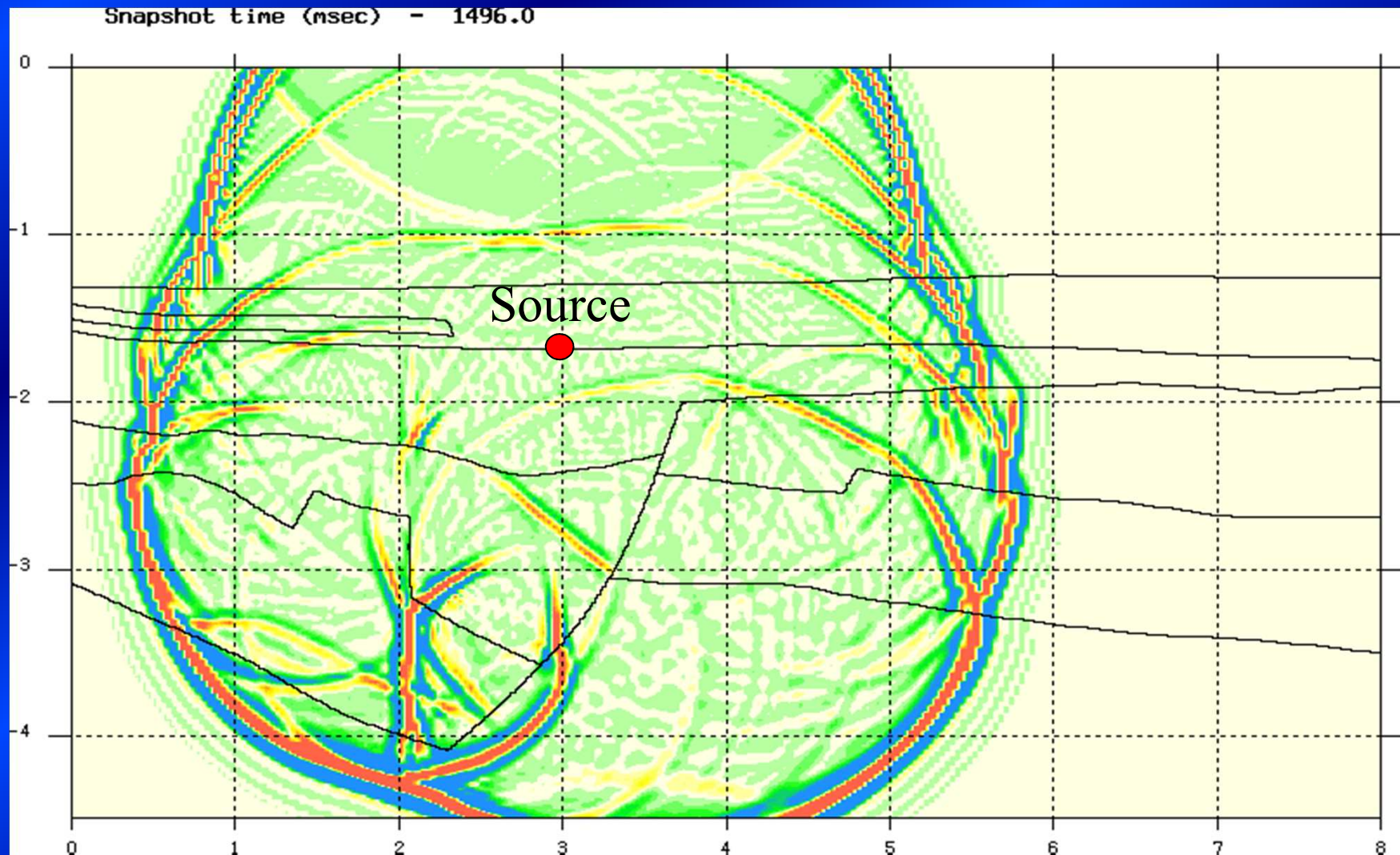
Snapshots of wavefield propagation



Snapshots of wavefield propagation



Snapshots of wavefield propagation



Field of application

	Aim	Depth of penetration
Oil/Gas	Exploration of layers	100 m - 5 km
Engineering geophysics	Groundwater Pollution Archaeological	10-500 m
Earth crust seismic	Composition of Earth Crust/Geodynamics	-60 km
Measurements in water	Echo sounder, High resolution seismic	~ 0 m <100 m
Georadar (GPR)	Shallow investigation of earth	0.5-10 m

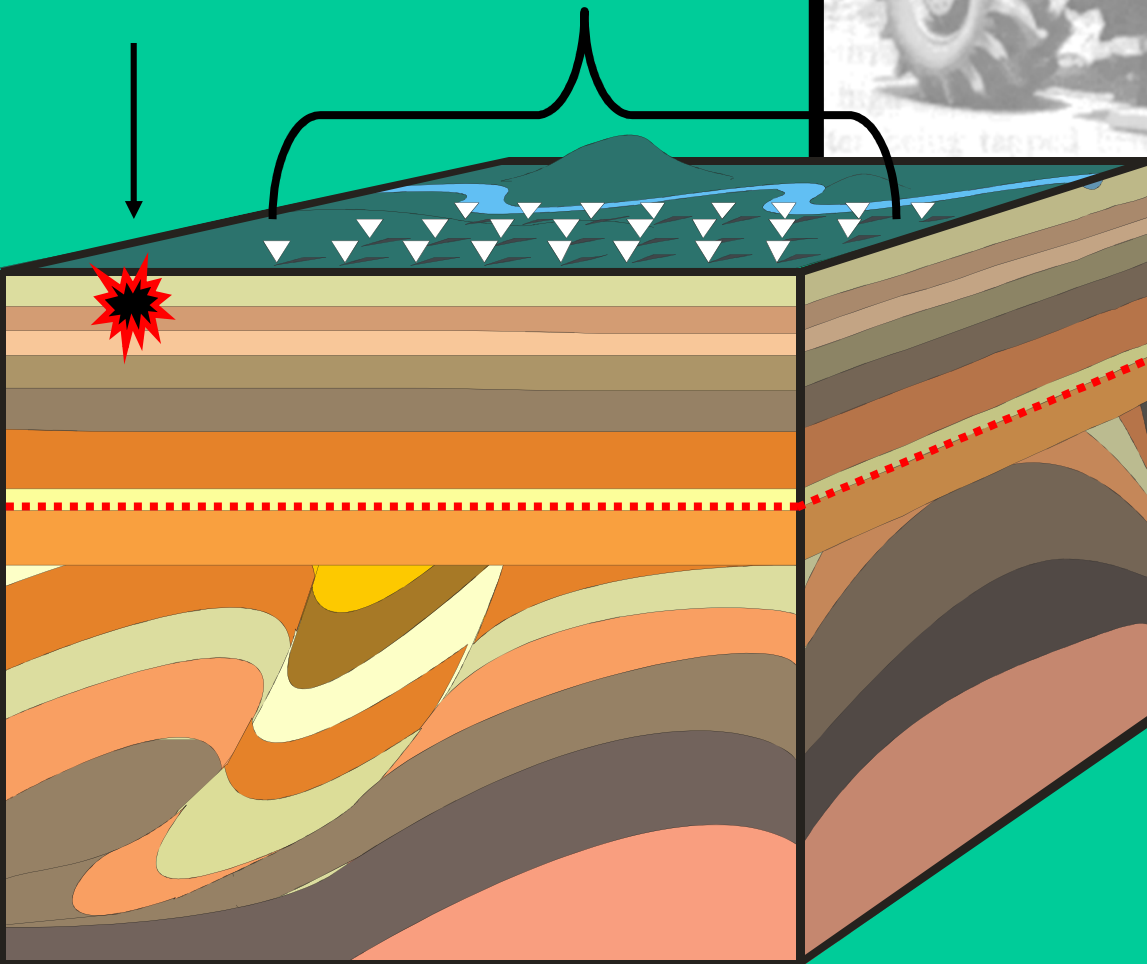
dynamite

geophones



Seismic vibrator

Acquisition
on land

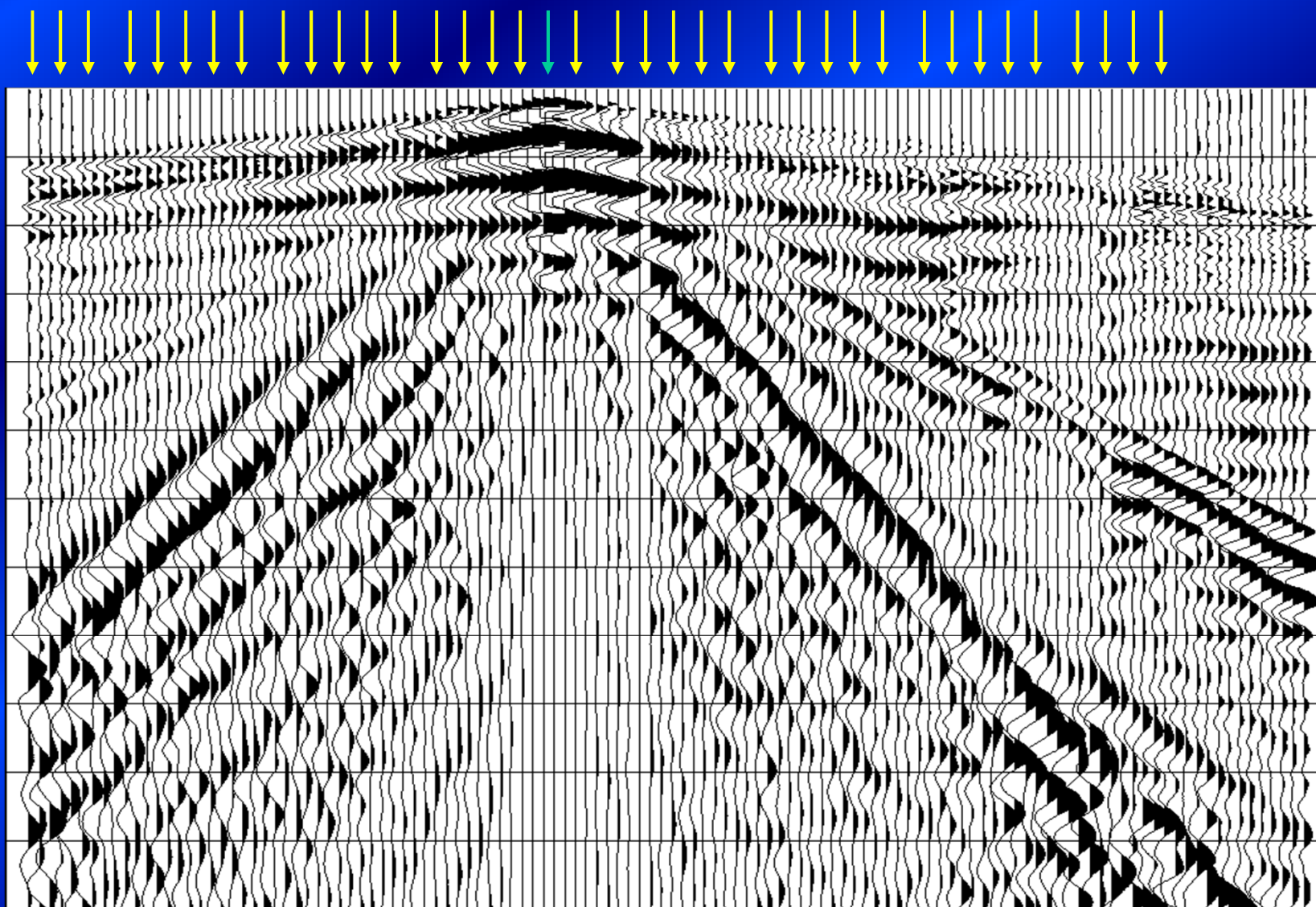


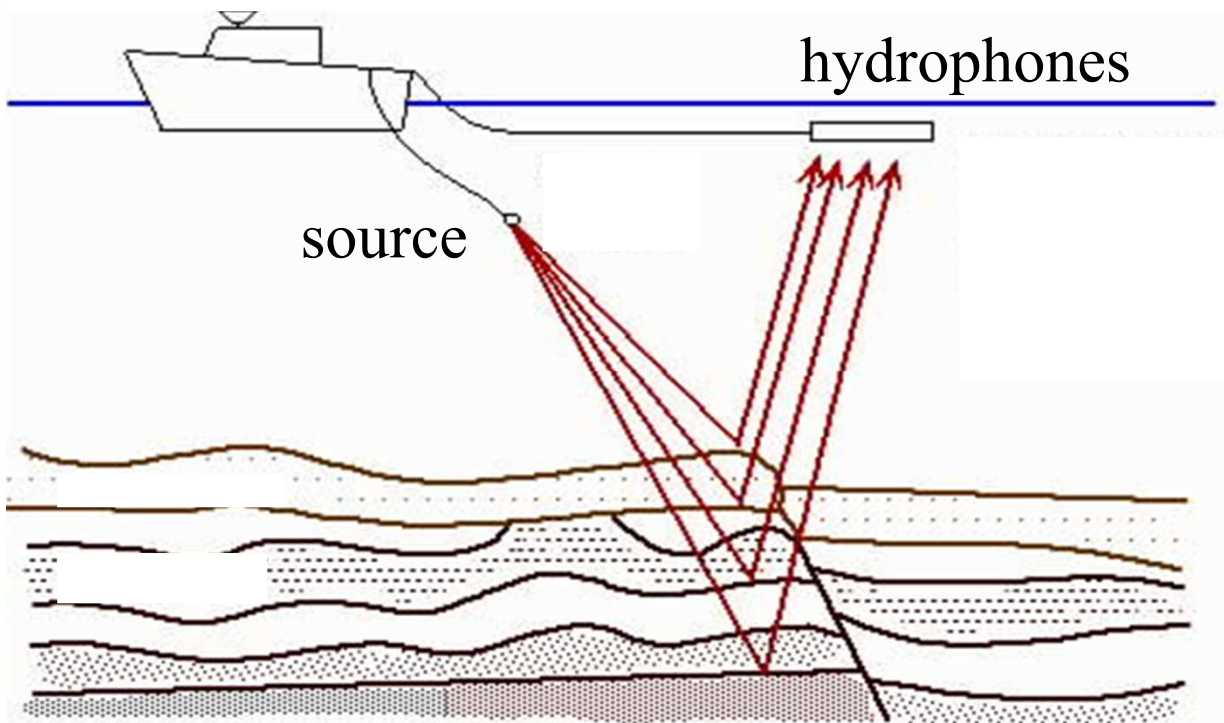
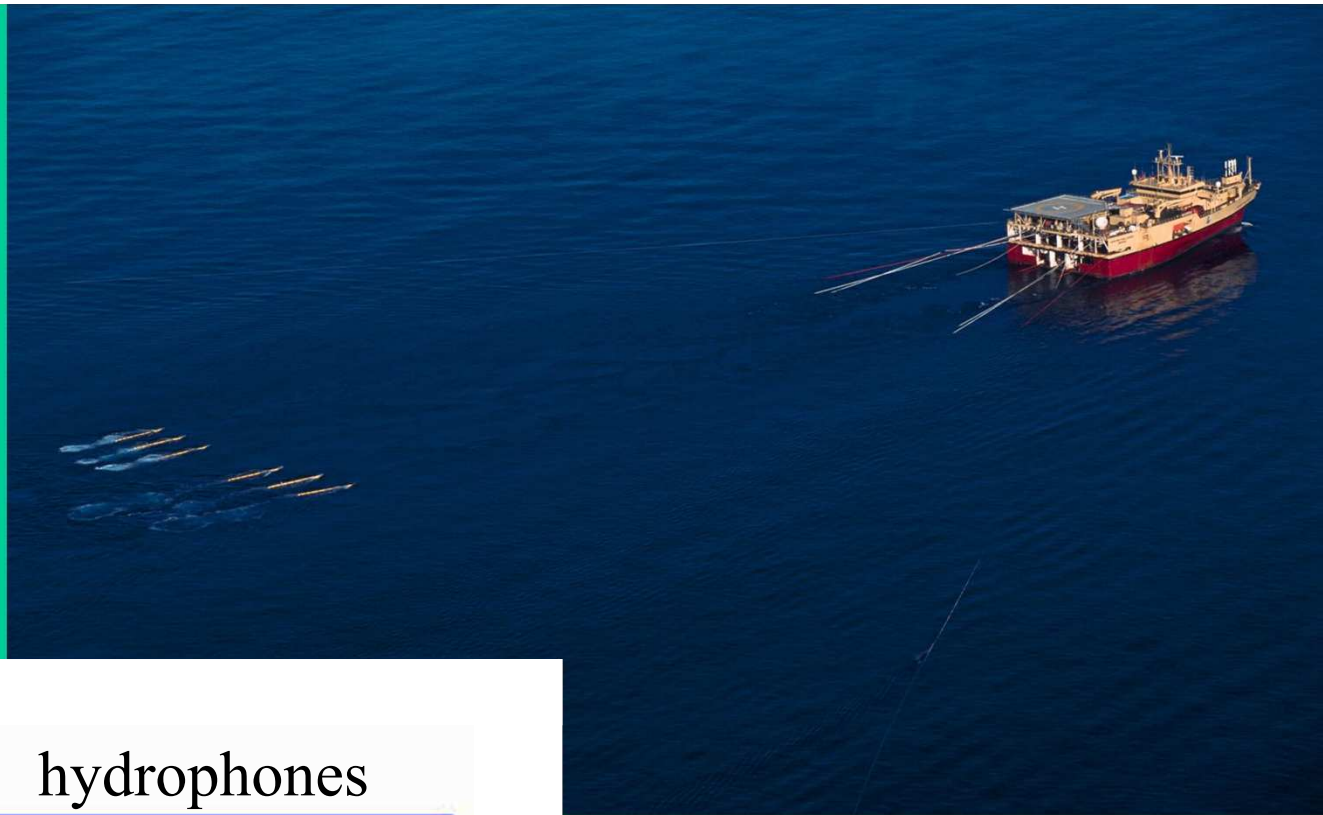
Receivers

Source

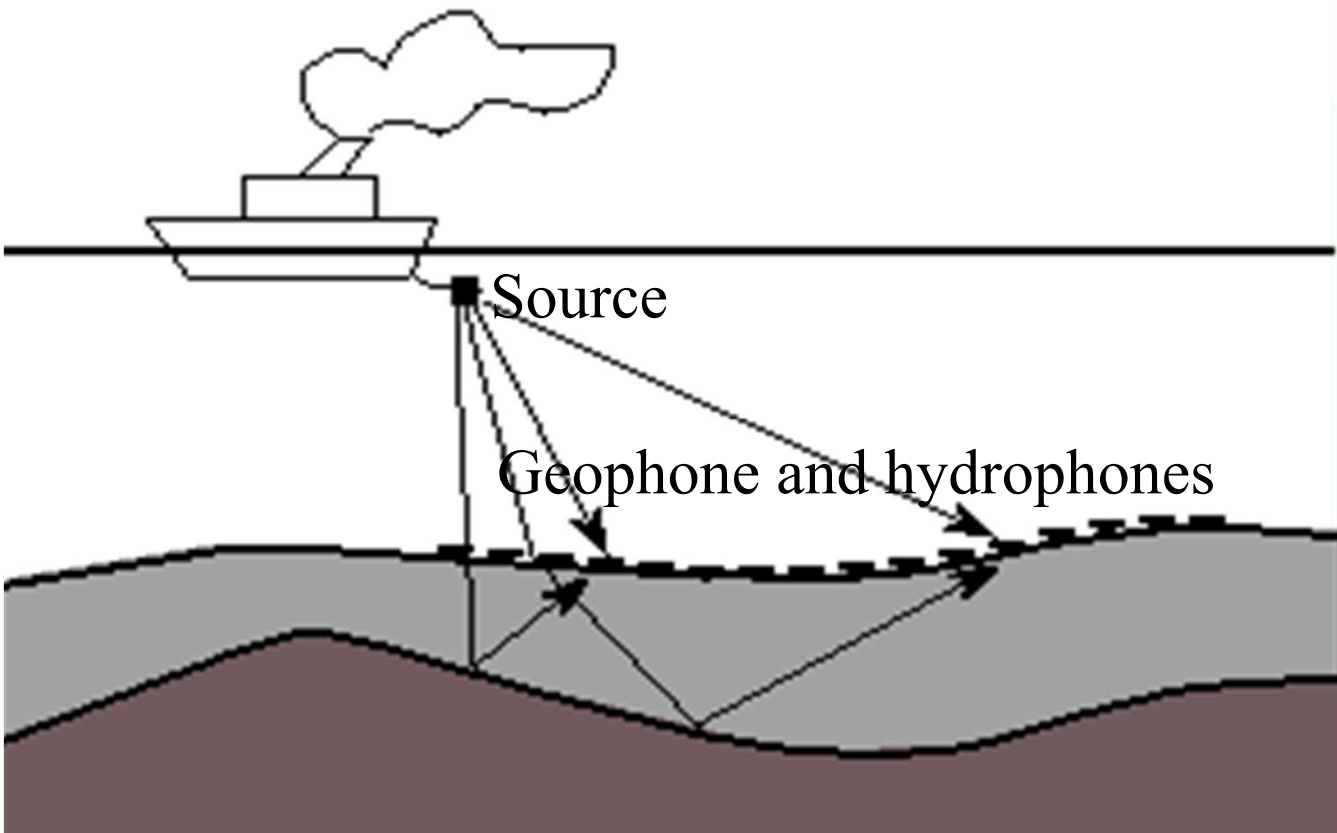
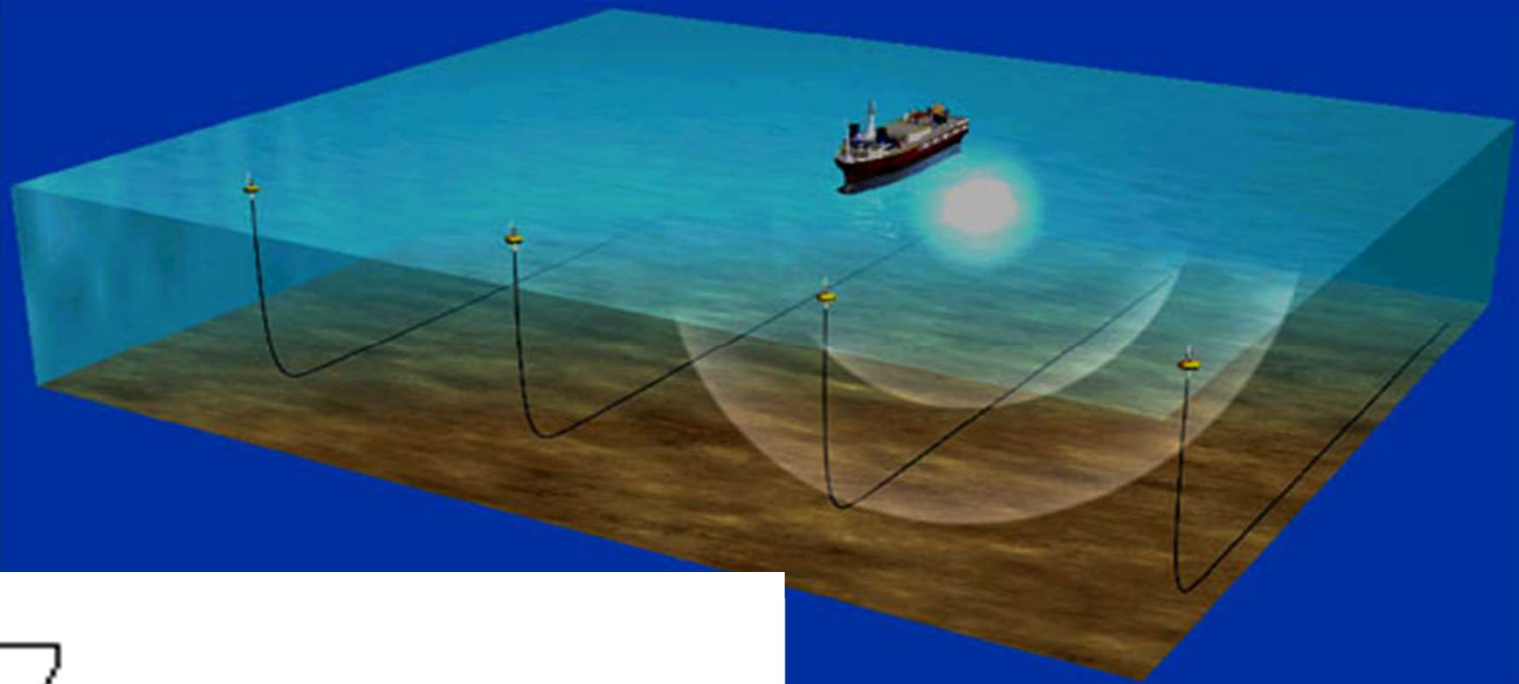
Receivers

Time



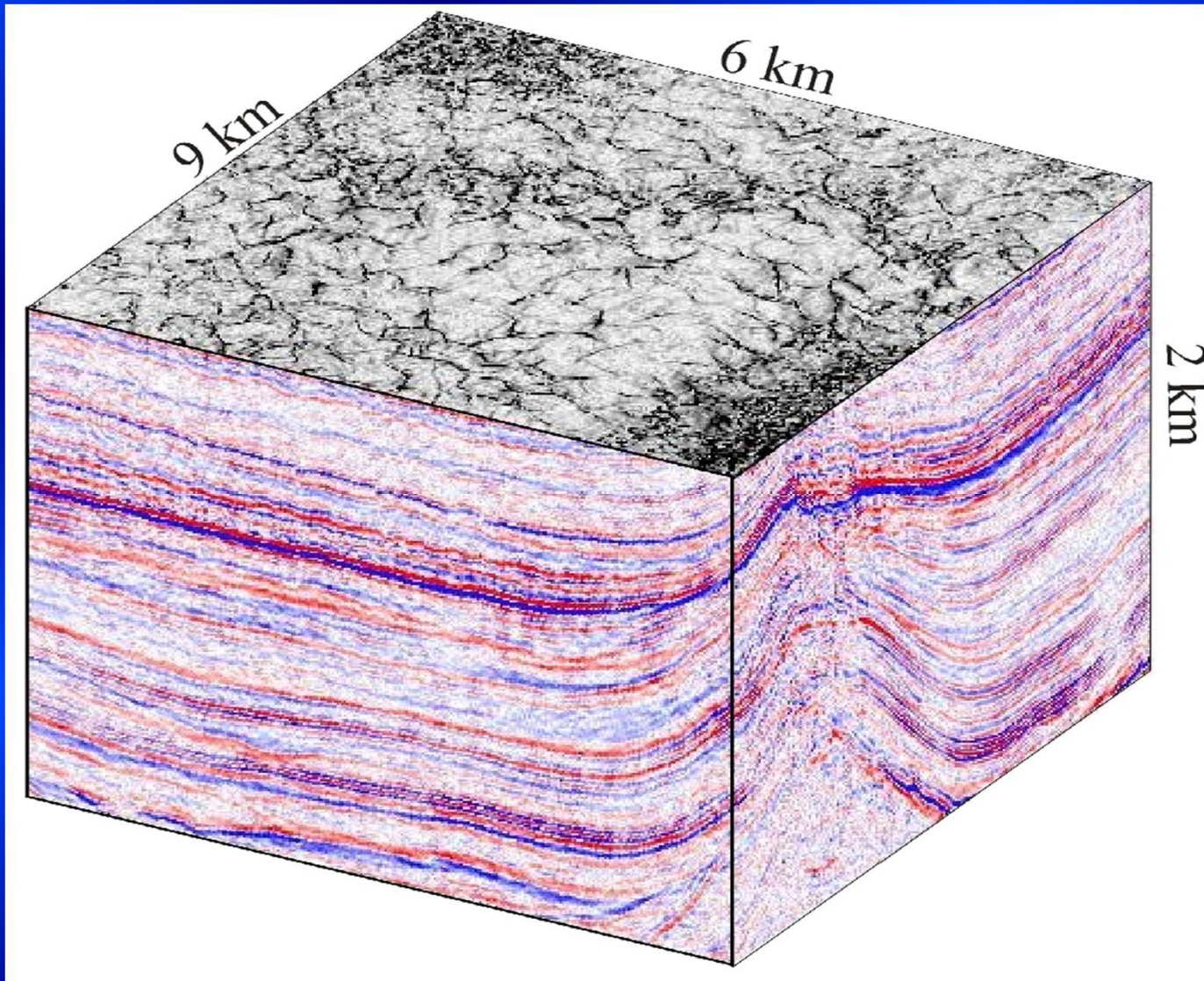


Acquisition
on zee

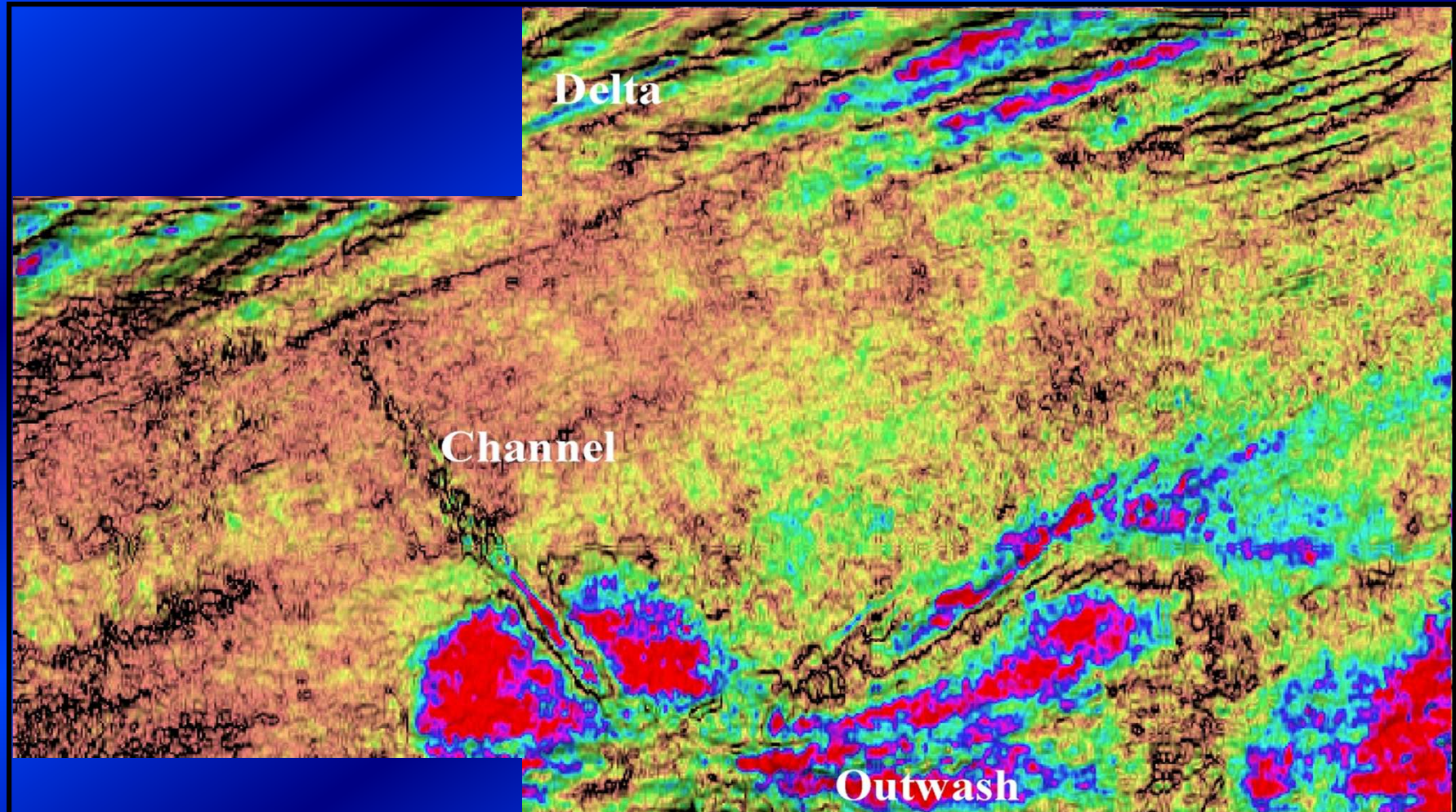


Acquisitie on
The seabottom

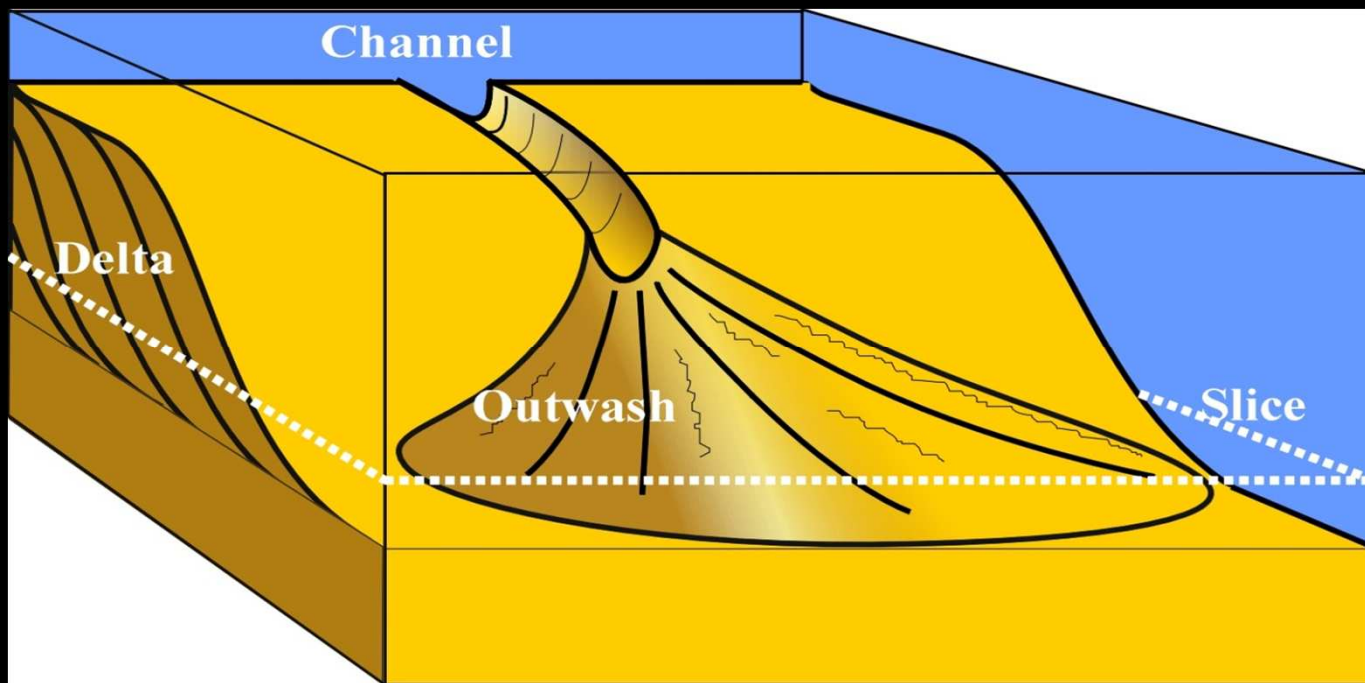
Seismic datacube



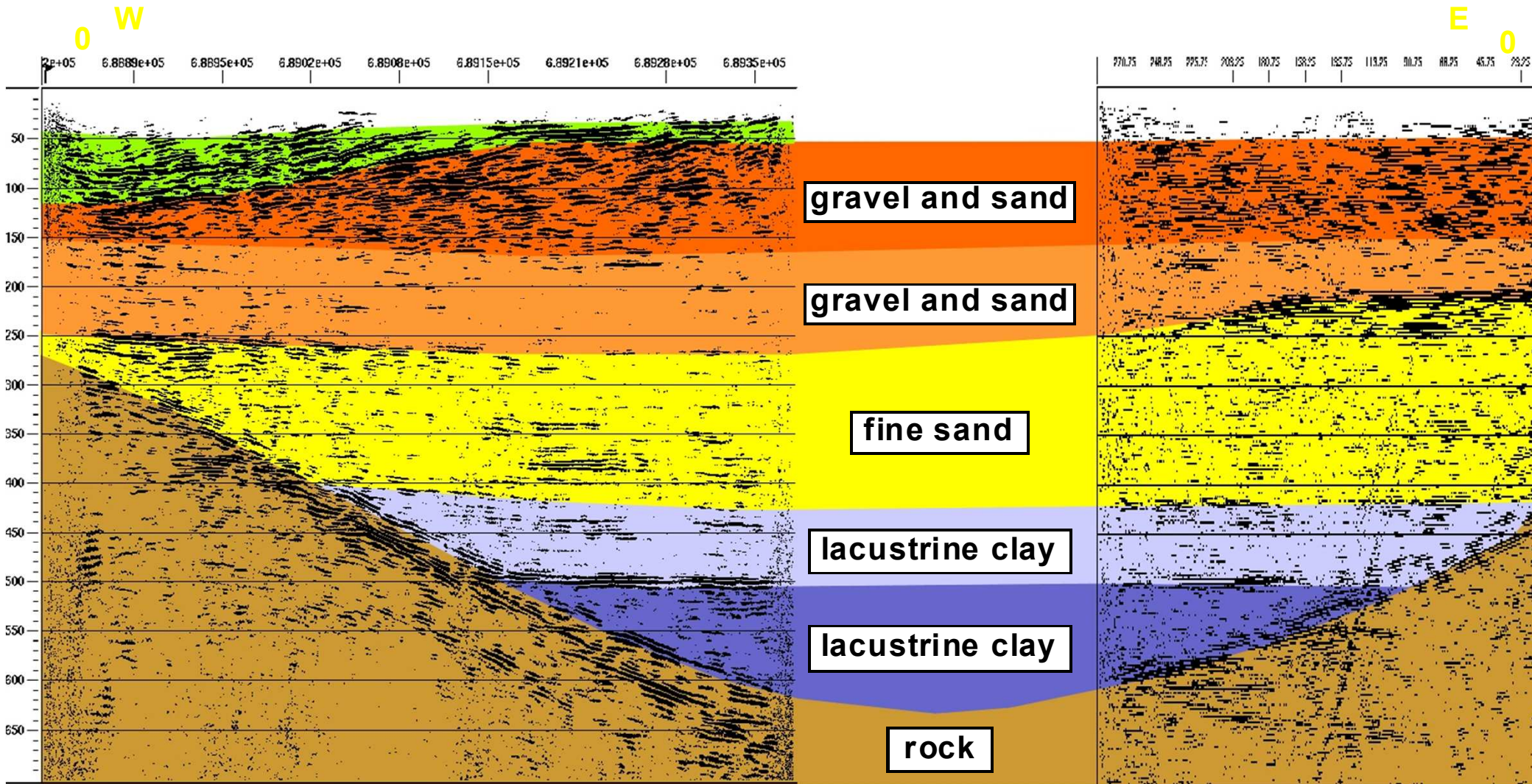
Depth slice



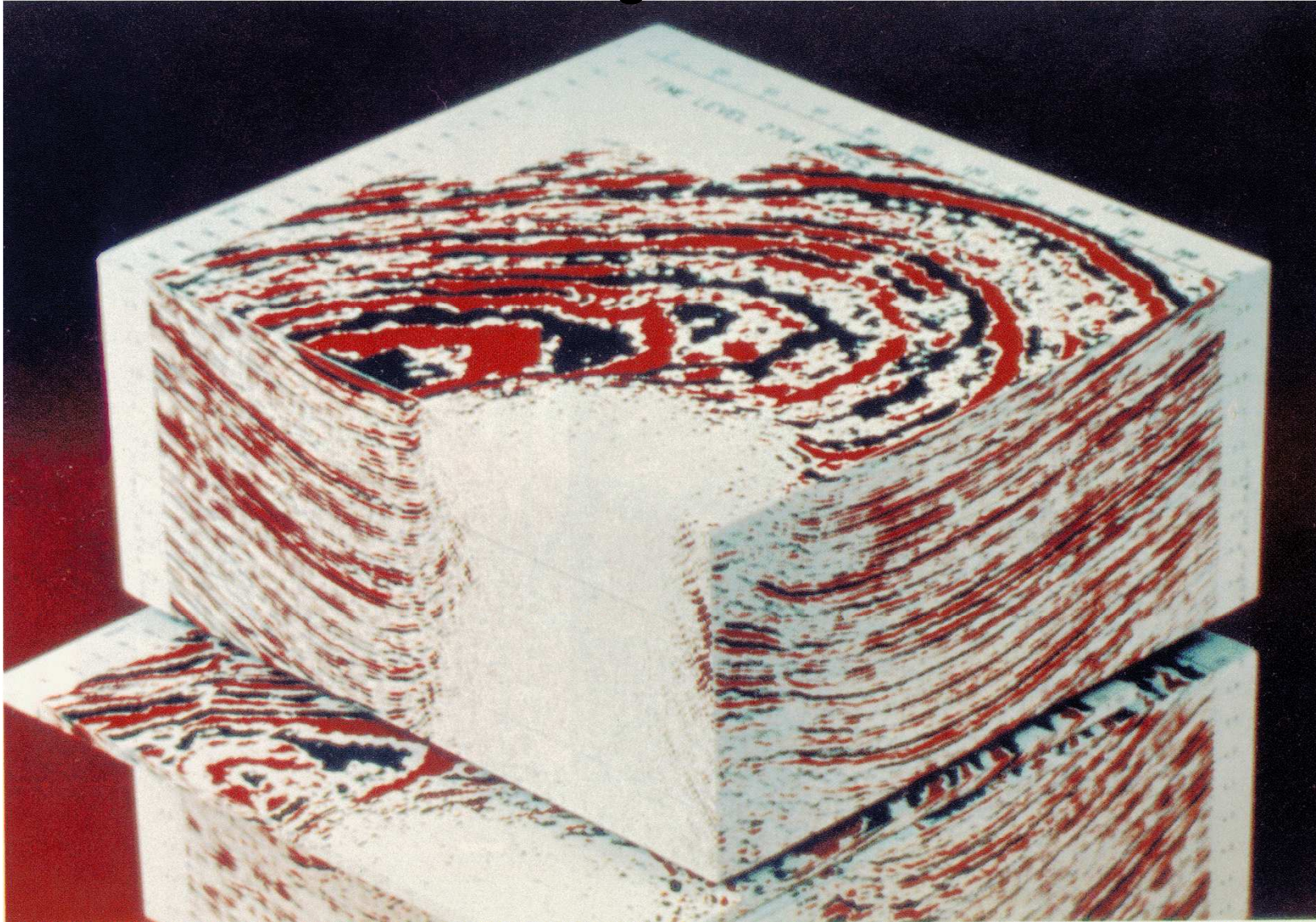
Geological interpretation



Interpretation of west-east-line

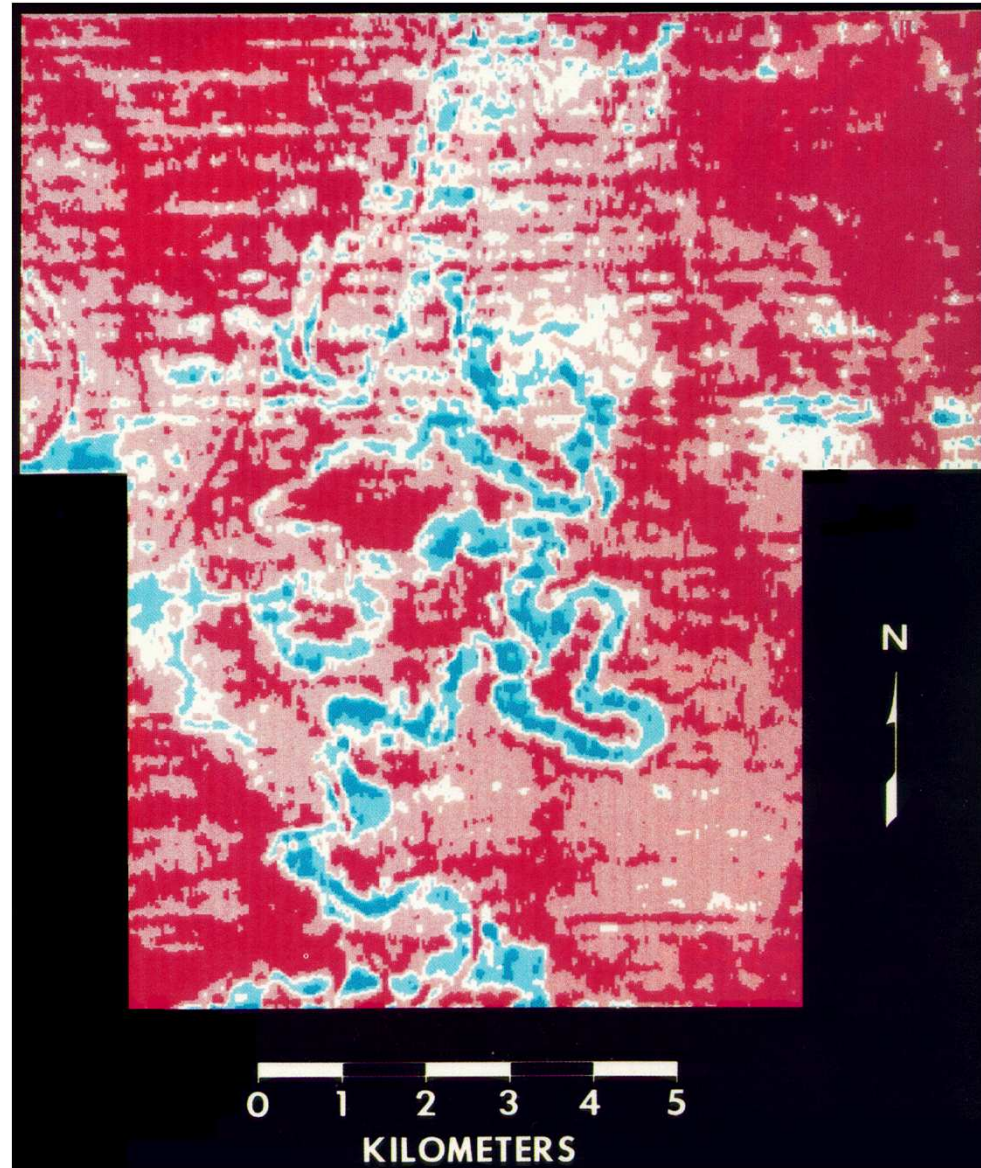


Time slice through a 3D seismic data set



(from Keary and Brooks, 1991)

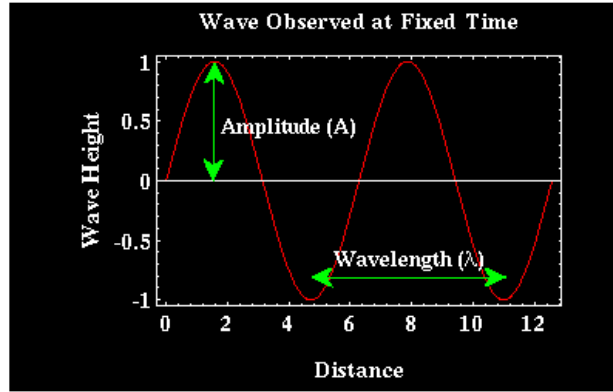
Time slice through a 3D seismic data set



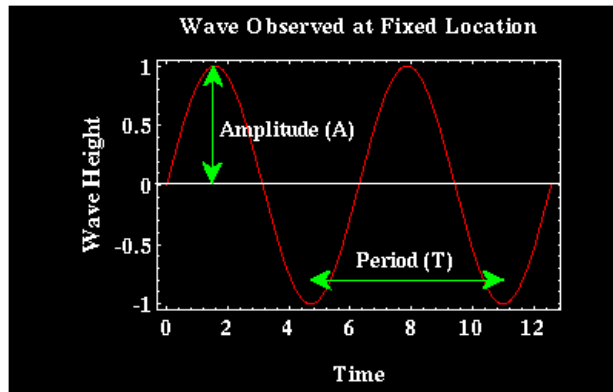
(from Kearey and Brooks, 1991)

الموجات السيزمية Seismic waves

و للتعرف على الموجات السيزمية نتخيل حجرا صغيرا قذف في وسط بحيرة ..
ستبدأ الموجات بالانتشار على سطح البحيرة على شكل حلقات. لو أخذنا مقطع
عرضي لهذه الحلقات وأوقفنا الزمن بالنسبة لها فتسمى المسافة بين قمتين
متتاليتين أو قاعين متتاليين بالطول الموجي wavelength وتعرف المسافة بين خط
انتشار الموجة وحتى قمة الموجة أو قاعها بسعة الموجة (لاحظ الشكل التالي)



أما لو قمنا بتثبيت الموقع بالنسبة لحركة الموجات على سطح البحيرة فستعبر
المسافة بين القمتين المتتاليتين أو القاعين المتتاليين عن الزمن الدوري .



وهناك علاقة بين سرعة هذه الموجات وطولها الموجي والزمن الدوري لها حيث أن:

$C = \lambda / T$ حيث أن C = السرعة λ = الطول الموجي T = الزمن الدوري
وأيضاً هناك علاقة بين التردد f والزمن الدوري T حيث أن التردد يساوي مقلوب
الزمن الدوري و وحدته 1\ثانية أو هيرتز (Hz)

الإجهاد و الإنفعال Stress and Strain:

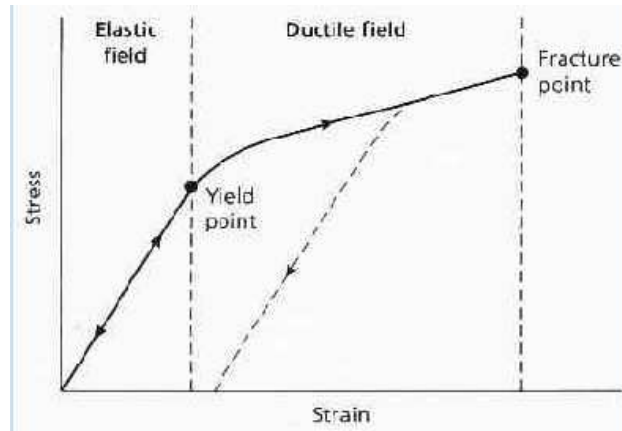
تنتشر الموجات السيزمية فى الجوامد على هيئة أشكال من تشوه جسيمات متحركة خلال المواد بسرعات تعتمد على خواصها المرنة و الكثافة . و حتى نبين طبيعة هذه العلاقة أو التبعية فإننا سوف نعبر عن هذه التشوهات بمصطلحات القوة المسببه لها من خلال مفهومين اساسيين و هما الإجهاد و الإنفعال. و العلاقة بينهما لمادة معينة يمكن و صف الخواص المرنة للمادة و التى تتحكم فى طبيعة إنتشار الموجات السيزمية فى طبقات الأرض بعيدا عن المصدر.

يعرف Stress بأنه النسبة بين القوة F إلى المساحة A المؤثرة عليها. و يمكن أن يحلل الإجهاد Stress إلى مركبتين :

- Normal Stress وهو الإجهاد المطبق عموديا على السطح
- Shear Stress و هو الإجهاد المطبق على مستوى السطح

من ناحية أخرى يعرف التغير فى الشكل أو الحجم نتيجة التعرض للإجهاد يسمى الإنفعال Strain.

طبقاً لقانون هوك Hook's Law فإن العلاقة بين الإجهاد و الإنفعال علاقة خطية و يتصرف الجسم تصرف مرناً حتى تصل العلاقة إلى نقطة حرجة تسمى Yielding Point . هذه العلاقة الطردية و الخطية هى علاقة إنعكاسية أى عندما يزال الإجهاد يزول الإنفعال.



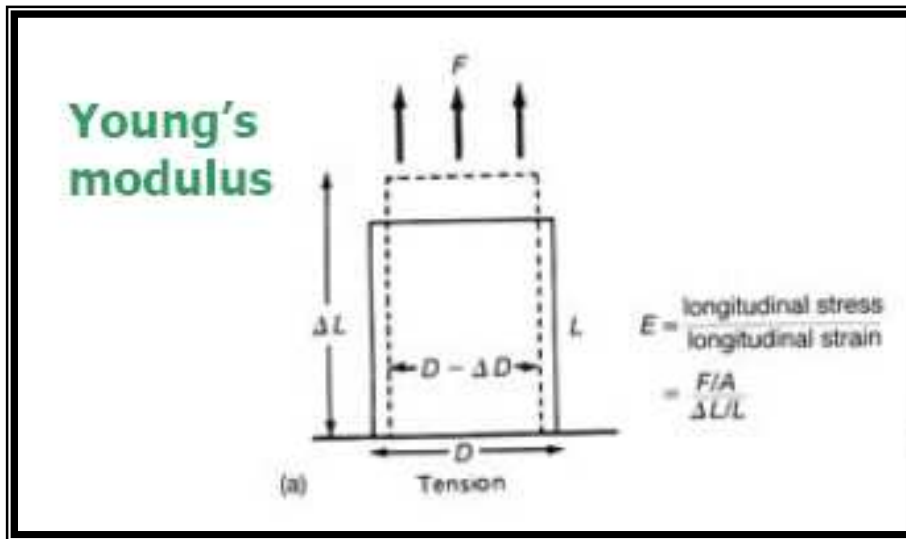
ولو إستمر الإجهاد بعد هذه النقطة الحرجة تصل المادة لمرحلة Plasticity أو التشوه الدائم. و إذا إستمر الإجهاد بعد ذلك يستمر التشوه فى المادة حتى الكسر.

ملحوظة

- 1: يحدث الزلزال إذا تعرض الصخر إلى إجهاد يوصل الصخر إلى مرحلة الكسر
- 2: فى مرحلة الإستكشاف السيزمى تتحدد العلاقة بين الإجهاد و الإنفعال داخل منطقة المرونة Elastic region .

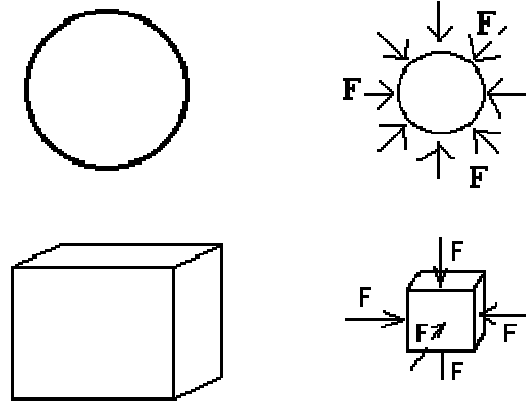
من ناحية أخرى فإن العلاقة الطردية بين Stress and strain داخل منطقة المرونة Elastic region تتحدد و تتأثر بمعاملات فيزيائية مختلفة منها:

أولاً : معامل بنج Young's Modulus



Young's Modulus $E = \text{Longitudinal stress } (F/A) / \text{longitudinal strain } \Delta L/L$

ثانياً: معامل الحجم Bulk Modulus: والذي يعرف أيضاً باسم the incompressibility of the medium ... أى مقاومة الجسم للإنضغاط. تخيل أنه يوجد بين يديك مكعب من مادة ما ..وقمت بالضغط على هذا المكعب وأثرت عليه بقوة من جميع الجهات .. كما في الشكل التالي

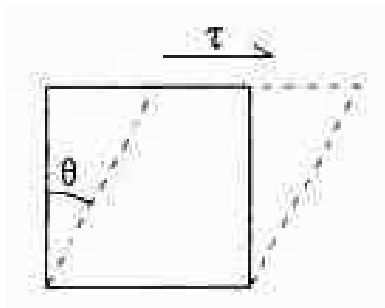


$$K = \frac{\text{volume stress } P}{\text{volume strain } \Delta v/v}$$

فإذا انضغط المكعب بكل سهولة وتغير حجمه فإن المعامل الحجمي له صغير مقارنة بمكعب صلب لا ينضغط بسهولة حيث يكون المعامل الحجمي له كبير .. مثال : المعامل الحجمي للغازات صغير جداً أما المعامل الحجمي للمواد الصلبة كبير جداً حيث أننا وسهولة يمكننا أن نضغط مكعب من الغاز إلا أنه ومن الصعوبة من المكان أن تضغط على مكعب من الخشب .

ثانياً : معامل القص: Shear Modulus

ويعرف هذا المعامل مدى صعوبة تشويه المادة تحت تأثير قوة قصية .. مثال : أحضر مكعباً من مادة ما وليكن من الخشب مثلاً وضعه على سطح طاولة ما وقم بتثبيتها عليها .. ثم أثر على السطح العلوي للمكعب بقوة اتجاهها مواز لسطح الطاولة ، عندها سيتشوه المكعب ويظهر على شكل متوازي أضلاع كما في الشكل التالي :



$$\mu = \frac{\text{shear stress } \tau}{\text{shear strain } \tan \theta}$$

معامل القص يدل على مقدار القوة التي استعملتها لتشويه المكعب فلو كانت القوة كبيرة فإن معامل القص للمكعب كبير جداً وإذا كانت القوة بسيطة فإن معامل القص صغير جداً. لاحظ أن معامل القص لا يدعم المواد السائل والغازية حيث أنه من المستحيل التأثير عليها بقوة قص. وبملاحظتنا للقانون الموضح في الأعلى فإن الموجات الثانوية لا تسري في الأوساط السائلة والغازية لأن قيم معاملات القص لها تساوي صفر وسرعة الموجات الثانوية تعتمد على معاملات القص فقط

ومما سبق نعلم أن أي تغير في قيم المعاملات الفيزيائية للوسط معامل القص ، المعامل الحجمي ، والكثافة) يؤدي إلى تغير سرعة الموجات المارة في الوسط

مثال : لو انتقلت الموجات من طبقة رملية غير مشبعة Saturated إلى طبقة أخرى مشبعة فإنه وبكل تأكيد ستتغير سرعة الموجات نتيجة لهذا الانتقال .. ويتحكم في ذلك كثافة الطبقة والمعاملات الحجمية لها .. حيث أن المسامات التي كانت مملوءة بالهواء أصبحت مملوءة بالماء ولو نلاحظ أن قيمة المعامل الحجمي للماء أكبر من قيمة المعامل الحجمي للهواء .. وفي الواقع أن المعامل الحجمي هو العامل المتحكم في هذا المثال لذلك نجد أن التغير في سرعة الموجات الأولية يكون أكبر من التغير في سرعة الموجات الثانوية.. تحكم في سرعة انتشار الموجات عبر الأوساط المختلفة ,,؟ تغير اتجاه الأمثلة عن انتشار الموجات من المصدر إلى باطن الأرض حيث تكون الطبقات التي في الأعلى عالية السرعة في حين أن الطبقات التي في الأسفل منخفضة السرعة

و بالتالي فإن السرعة السيزمية للموجات السيزمية في الصخور التي تمر خلالها الموجات السيزمية ترتبط ارتباطاً وثيقاً بهذه المعاملات الفيزيائية كما توضح المعادلات التالية:

لو افترضنا أنه يوجد لدينا وسط متجانس homogeneous, isotropic فإن سرعة الموجات الأولية P wave والموجات الثانوية S wave ستعطى بالعلاقات التالية:

$$V_p = \sqrt{\frac{(\frac{4}{3}\mu + k)}{\rho}}$$

$$V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

حيث أن

V_p : سرعة الموجات الأولية.

V_s : سرعة الموجات الثانوية

ρ : كثافة الوسط
the medium

μ : عامل القص Shear
Modulus

k : المعامل الحجمي Bulk
Modulus

و بالتالي فإن أي تغير في خواص الصخور و التى تسبب تغيرا فى المعاملات ρ كثافة الوسط و μ عامل القص و K المعامل الحجمي تتسبب فى تغير السرعة السيزمية للأمواج السيزمية التي تنتشر فى هذا الصخر. على سبيل المثال لو إنتقلنا من صخر مسبيع بالماء إلى صخر غير مشبع فإنه يصحب ذلك تغيرا فى الكثافة و تغيرا فى المعامل الحجمي. يحدث التغير فى المعامل الحجمي لأن المسام المملوء بالهواء أصبحت مملوءة بالماء و المعامل الحجمي للماء أكبر منه للهواء و ذلك بسبب أن قابلية الهواء للضغط أكبر من قابلية الماء. و هذا مثال بسيط و لكن هناك عوامل أخرى تؤثر فى سرعة انتشار الموجات السيزمية فى الصخور مثل نوعية الصخر و المادة اللاحمة و محتوى الصخر من السوائل و التغير فى الضغط الواقع على الصخر. و بذلك تعتبر التغيرات فى السرعة السيزمية هى المفتاح التى نفرق بها بين الصخور و التراكيب تحت سطحية.

يبين الجدول التالى متوسط السرعة السيزمية فى الصخور و المواد المختلفة و التى تبين وجود تداخل فى قيم أو مدى السرعات السيزمية للصخور مما يدل على أن هناك عوامل أخرى تضاف إلى نوع الصخر تتحكم و تؤثر فى السرعة السيزمية للصخور كما ذكر سابقا:

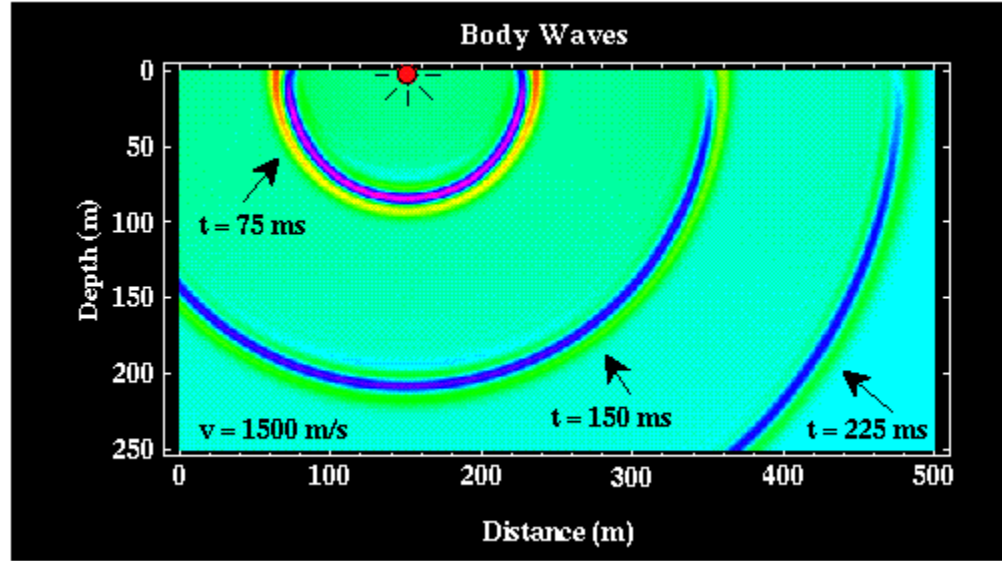
Material	P wave Velocity (m/s)	S wave Velocity (m/s)
Air	332	
Water	1400-1500	
Petroleum	1300 - 1400	
Steel	6100	3500
Concrete	3600	2000
Granite	5500 – 5900	2800 - 3000
Basalt	6400	3200
Sandstone	1400 – 4300	700 - 2800
Limestone	5900 – 6100	2800 – 3000
Sand (Unsaturated)	200 – 1000	80 - 400
Sand (saturated)	800 – 2200	320 - 880
Clay	1000 – 2500	400 - 1000
Glacial Till (Saturated)	1500 – 2500	600 - 1000

أنواع الموجات السيزمية

تنقسم الموجات السيزمية إلى قسمين وهي

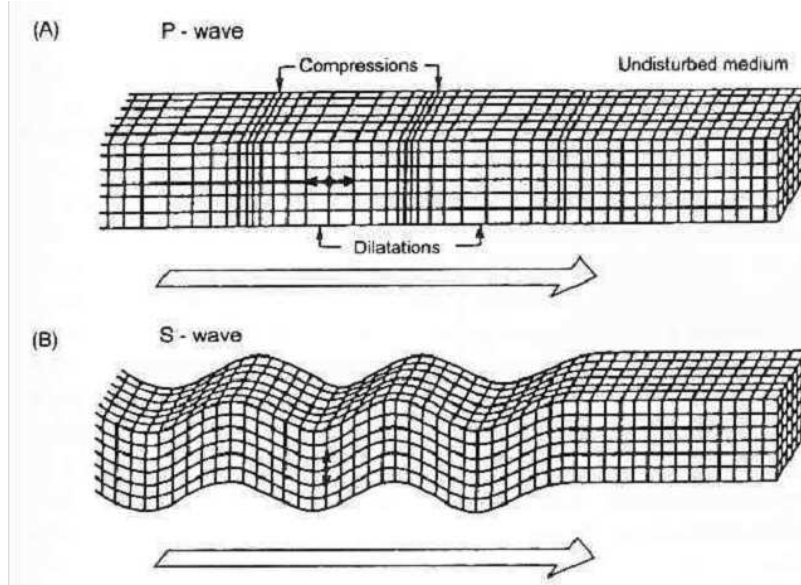
1- الموجات الجسمية : Body Waves وهذه هي الموجات التي تسري في باطن الأرض

نحن نعلم أن الموجات تنطلق بسرعة ثابتة مالم تتغير معاملات المرونة للوسط الذي تسري فيه كما أنها تنتشر في جميع الاتجاهات بعيداً عن المصدر .. من ذلك نستنتج أن الموجات السيزمية وعند أي لحظة تعطي شكلاً كروياً عند انتشارها في وسط متجانس homogeneous



وتنقسم الـ Body waves إلى نوعين:

الموجات الأولية : primary waves وتعرف باسم P- Waves وسميت بهذا الاسم لكونها الأسرع ولذلك فهي أولى الموجات وصولاً ، ويعود سبب سرعتها إلى أنها تسلك سلوكاً بسيطاً حيث تتحرك فيها الجزيئات في نفس خط انتشار الموجة وتشبه هذه الموجات الموجات الصوتية حيث أنها تنتشر في الهواء وفي الماء أيضاً .

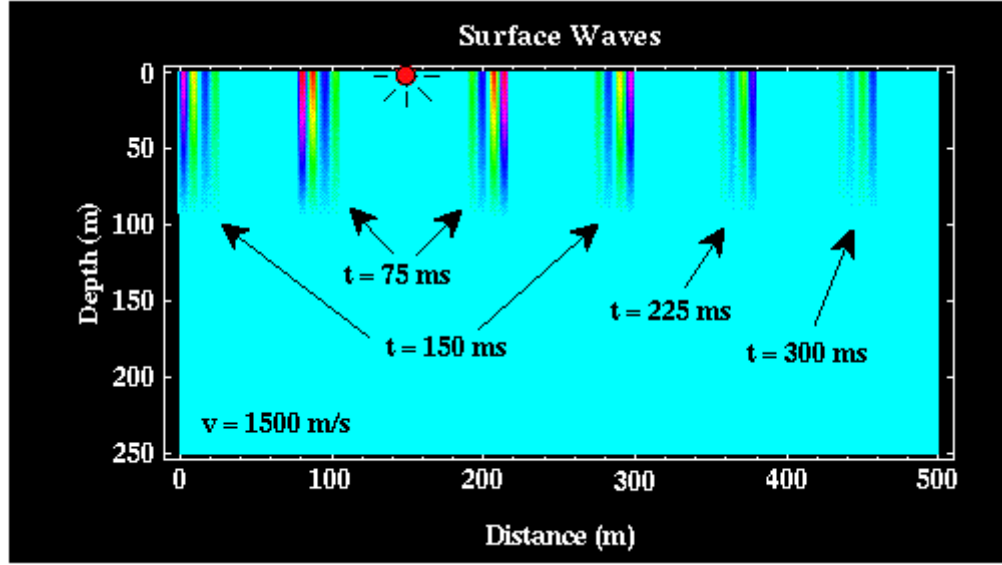


و تسمى هذه الموجات موجات الضغط Compressional waves حيث تنتشر الموجة في الجسم من خلال تبادل التضاغط و التخلخل و الذى خلالها تقترب جزيئات الجسم الصلب و تبتعد عن بعضها خلال نصف دورات متتالية.

الموجات الثانوية : secondary waves وتعرف باسم S Waves وهي أبطأ من الموجات الأولية حيث تتحرك فيها الجزيئات عمودياً على خط انتشار الموجة ولا تنتشر إلا في الأوساط الصلبة فقط.

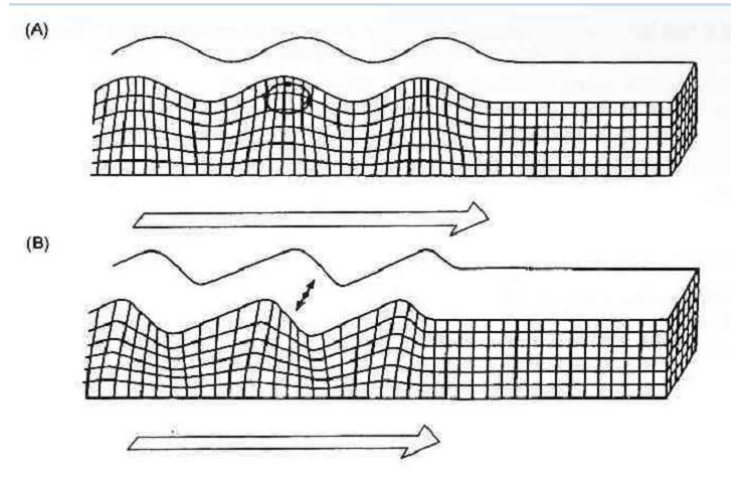
و تسمى هذه الموجات بموجات القص Shear wave حيث تنتشر موجات القص في الجسم الصلب نتيجة إنتشار الجزيئات فى إتجاه عمودى على إتجاه إنتشار الموجة السيزمية.

2- الموجات السطحية: وهي الموجات التي تسري على سطح الأرض فقط .. ولقد لوحظ أن سعة الموجة amplitudes للموجات السطح يكون كبير جداً على السطح ويصغر كلما اتجهنا إلى العمق لذلك فإن هذه الموجات تضمحل أسياً مع العمق .. أيضاً تضمحل هذه الموجات كلما ابتعدنا عن المصدر .. وتعتبر هذه الموجات أقل سرعة من الموجات الثانوية ونستطيع التقليل من هذه الموجات بدفن المصادر في الأرض .. وتوضح الصورة التالية مقطع عرضي لانتشار الموجات السطحية.



وكما هو الحال مع الموجات الجسمية فإننا نستطيع تصنيف الموجات السطحية إلى نوعين هما :

- A موجات رالي Rayleigh waves و تتحرك موجات رالي على السطح الحر للمادة الصلبة فقط. و تكون حركة الجزيئات دائماً في مستوى رأسى و هى حركة أهليجية و عكسية بالنسبة لإنتشار الموجة.
- B موجات لوف Love waves هى موجات سطحية يمكن ملاحظتها فقط عندما تغطى طبقة ذات سرعة منخفضة طبقة سفلية ذات سرعة عالية. و تكون حركة الجزيئات حركة أفقية عرضية. المهم في الأمر أن هذه الموجات تعتبر مصدر تشويش وإزعاج على الاستكشاف السيزمي لذلك فهي غير مرغوب فيها وكما ذكرنا سابقاً فإننا نستطيع التقليل منها بدفن المصادر في الأرض .



ملحوظة هامة:

1- لماذا لم تنتشر موجات القص في السوائل؟

$$V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

الإجابة: أولاً تذكر أن سرعة موجة القص تساوى

حيث أن

V_s : سرعة الموجات الثانوية
density of the medium ρ : كثافة الوسط
 μ : عامل القص Shear Modulus

و حيث أن قيمة μ للسوائل تساوى الصفر فإن قيمة V_s تساوى الصفر

2- لماذا تنتشر الموجات الطولية أو الأولية أو موجة P-wave دائماً أسرع من الموجة الثانوية أو موجة S-wave ؟

الإجابة : تذكر أيضاً أن

$$V_p = \left(\frac{k + 4/3 \mu}{\rho} \right)^{1/2}$$
$$V_s = \left(\frac{\mu}{\rho} \right)^{1/2}$$

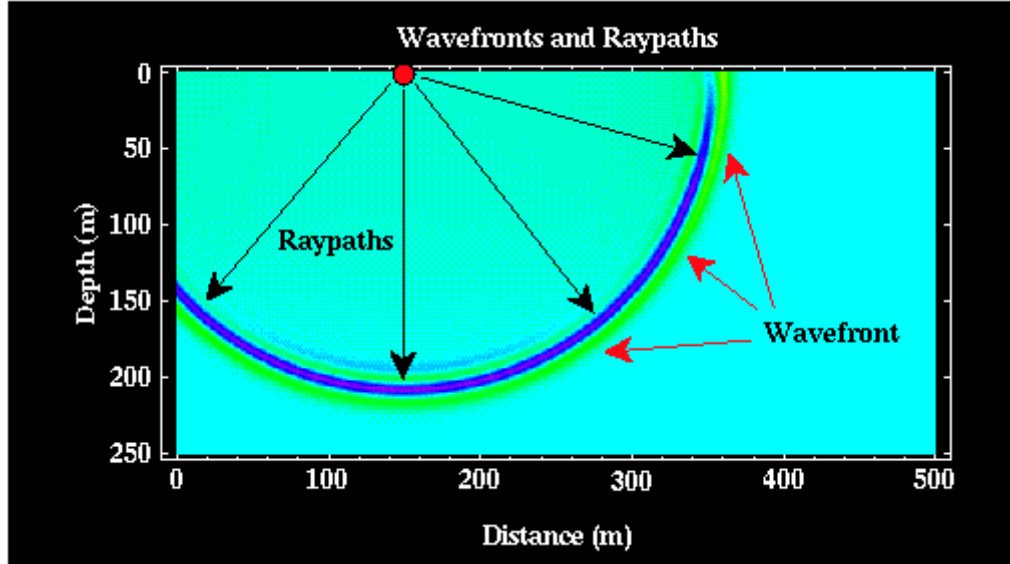
إذا بقسمة المعادلتين يتبين التالي:

$$\frac{V_p}{V_s} = \frac{\frac{k + \frac{4}{3}\mu}{\rho}}{\frac{\mu}{\rho}} = \frac{k}{\mu} + \frac{4}{3}$$

و بما أن قيمة μ and k دائماً موجبة إذا النسبة بين سرعة P -wave و S -wave دائماً أكبر من الواحد إذا تنتشر P -wave دائماً بسرعة أكبر من S -wave

مسار الموجة و صدر الموجة Wavefronts and Raypaths

هذان المصطلحان يعبران عن عنصرين مهمين في عالم السيزمية حيث أن أي تغير في سلوكهما يدل على حدوث أمر ما أو تغير في الوسط الذي تنتقل فيه الموجات وتستطيعون مشاهدتهما من خلال الصورة التالية:



أولاً : Raypath

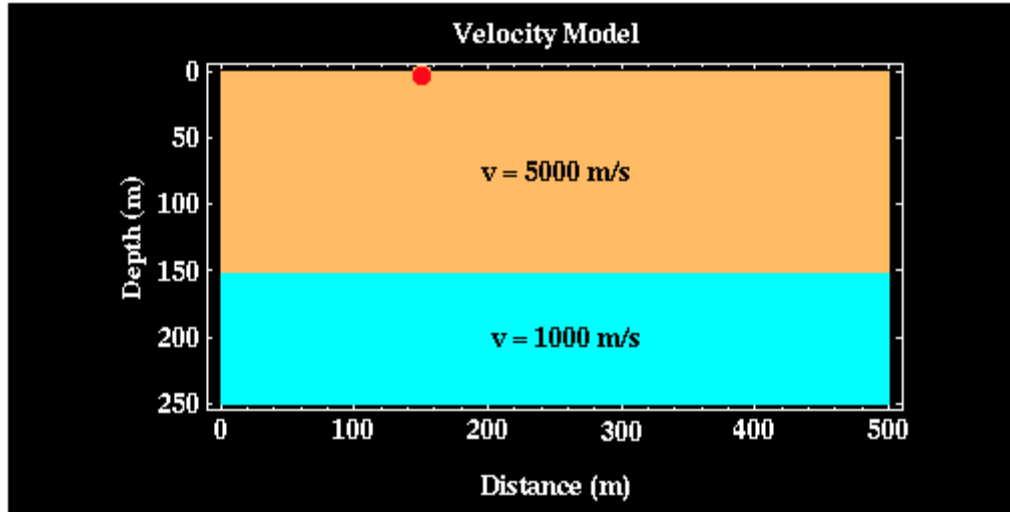
وهي عبارة عن عدد لا نهائي من الخطوط الوهمية التي تمثل انتشار الموجات خلال الوسط وفي الصورة التي بالأعلى استخدمنا عدد بسيط من هذه الخطوط التي يمكن استخدامها جميعها

ثانياً: Wavefront

وهو الخط الذي يصل بين نقاط الموجات التي لها نفس السلوك وعند زمن محدد ... وفي الصورة التي بالأعلى نلاحظ أن ال Wavefront اتخذ الشكل الكروي أو الدائري ... ونلاحظ أيضاً أن خطوط ال Raypaths تكون عمودية على خط ال Wavefront .

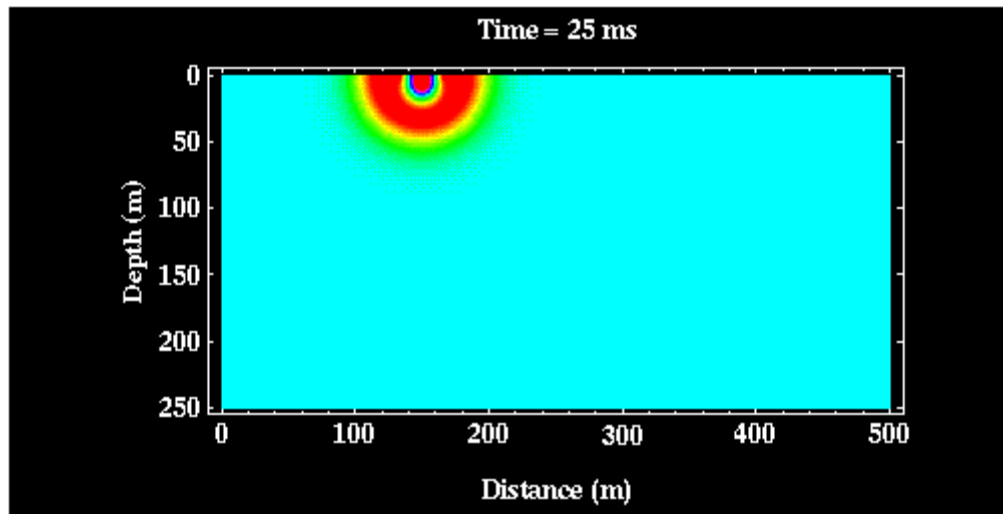
في هذه المثال نلاحظ مدى بساطة ال Raypaths حيث أنه ينتشر في وسط متجانس لكن ماذا سيحدث لهذا ال Raypaths لو بدأنا بتطبيقه على النماذج الأرضية المعقدة حيث تختلف الأوساط وسرعاتها ..؟ عرفنا من خلال السابق كيف تتصرف ال Raypaths إذا كانت الموجات تسري في وسط متجانس موحد السرعة ... لكن ماذا

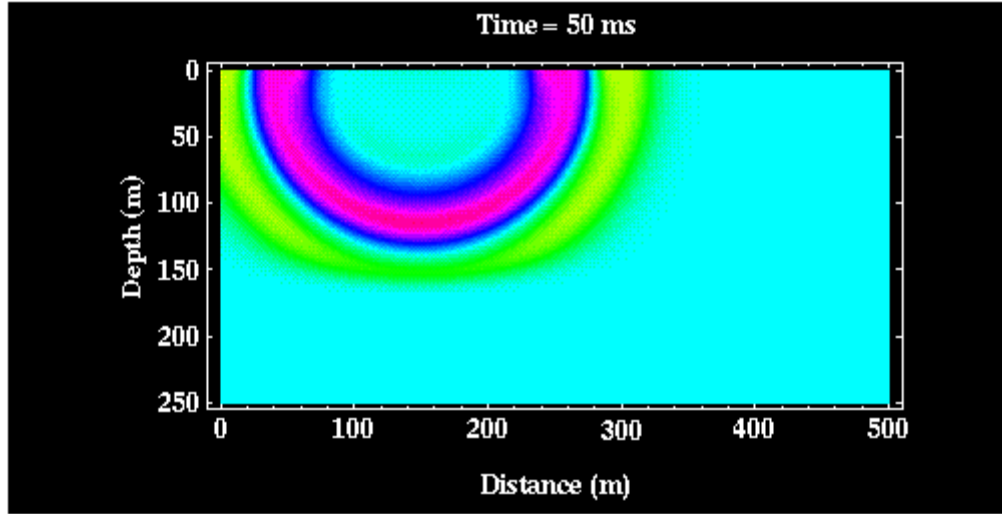
سيحدث لخطوط الـ Raypaths إذا أصبحت الموجات تسري ضمن الطبقات الأرضية باختلاف سرعته و هذا ما سنلاحظه فى النموذج التالي :



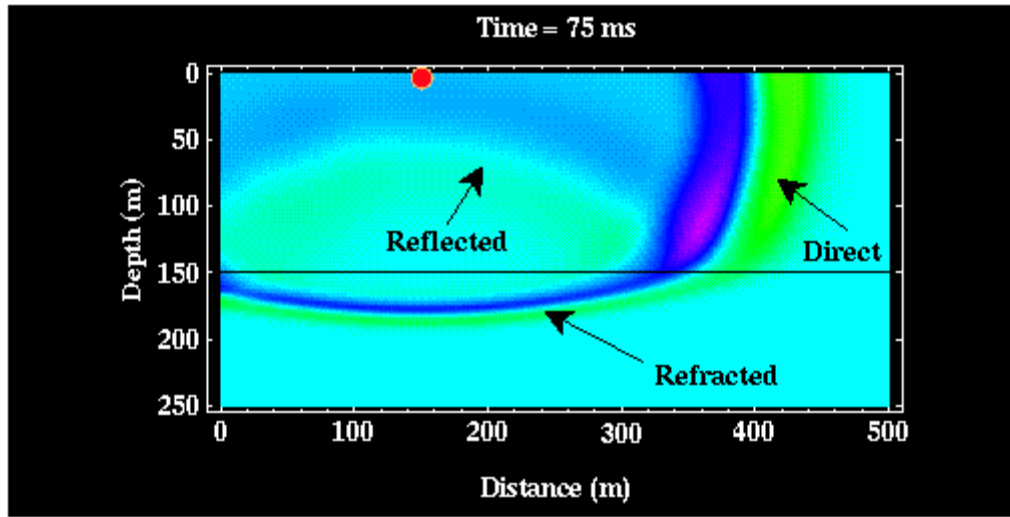
في هذا النموذج يتوضح لنا طبقتين صخريتين سرعة الطبقة الأولى 5000 متر \ ثانية وسمكها 150 متر وسرعة الطبقة الثانية 1000 متر \ ثانية وسمكها 100 متر . فكيف ستتصرف خطوط الـ Raypaths عند سريان الموجات خلال هذه الطبقتين.

عند انطلاق الموجات من المصدر (النقطة الحمراء) وانتشارها خلال الطبقة الأولى ستسلك خطوط الـ Raypaths نفس السلوك الذي سلكته في المثال السابق حيث أنها لا زالت تسري في وسط متجانس ,,, دعونا نرى كيف ستتصرف الموجات بعد مرور 25 ملي ثانية من انطلاقها من المصدر وبعد مرور 50 ملي ثانية وبعد مرور 75 ملي ثانية .





الآن بدأ الموجات في الوصول إلى الحد الفاصل بين الطبقتين على عمق 150 متر و سنلاحظ ما سيحدث:



وبعد مرور 75 ملي ثانية بدأت الموجات بالتفاعل مع السطح الفاصل بين الطبقتين لكن ما نتيجة هذا التفاعل :

- 1- جزء من الموجات استطاع اختراق السطح الفاصل منكسراً وهذا هو الجزء المستخدم في الدراسات الانعكاسية،
- 2- جزء آخر انعكس مرتداً عن السطح الفاصل وهذا هو الجزء المستخدم في الدراسات الانعكاسية
- 3- والجزء الثالث استمر في سريانه خلال الطبقة الأولى دون أن يتفاعل مع السطح الفاصل بين الطبقتين ويعرف باسم الموجات المباشرة direct wave.

ومما سبق نلاحظ التالي:

- 1- أن نصف قطر الـ Wavefront قد تغير عند وصول الموجات إلى الحد الفاصل بين الطبقتين
- 2- أن الطول الموجي لأولى الموجات المنكسر أقصر من الطول الموجي للموجات المباشرة.

لكن كيف عرفنا أن الطول الموجي قد تغير مع العمق وأصبح الطول الموجي للموجات المنكسرة أقصر من الطول الموجي للموجات المباشرة . يجب على هذا التساؤل العلاقة التالية بين الطول الموجي والزمن الدوري وسرعة الموجات :

$$C = \lambda / T$$

حيث أن C = السرعة λ = الطول الموجي T = الزمن الدوري

فإذا قمنا بتثبيت الزمن الدوري فإنه ومن المؤكد ومع انخفاض لسرعة فإن الطول الموجي للموجة سوف يقصر.

الأمر الآخر هو تغير نصف قطر الـ Wavefront فهذا التغير يدل على وجود تغير في اتجاه خطوط الـ Raypaths ويصف لنا قانون سنل Snell's Law تغير اتجاه خطوط الـ Raypaths و يوضح العلاقة بين سرعات الموجات وزوايا سقوطها وانكسارها.

في العادة تميل خطوط الـ Raypaths إلى الانتشار في خطوط مستقيمة مادامت تسري في وسط متجانس. لكن لو بدأت هذه الخطوط في التفاعل مع الحدود الفاصلة بين الطبقات فإنها ستبدأ بتغيير اتجاه مساراتها حسب قانون سنل.

في الحالة التالية تسير خطوط الـ Raypaths في وسط عالي السرعة V_1 منتقلة إلى وسط منخفض السرعة V_2 ، الزاوية بين العمودي على الحد الفاصل للطبقة وشعاع الـ Raypaths الساقط هي زاوية السقوط i_1 والزاوية بين العمودي على الحد الفاصل بين الطبقتين وشعاع الـ Raypaths المنكسر هي زاوية الانكسار

و ترتبط هذه المعاملات بعلاقة فيزيائية هامة و التي تسمى قانون سنل و هذا ما سوف نتناوله في المحاضرة القادمة .

Seismic waves

- Wave propagation
 - Hooke's law
 - Newton's law
 - \Rightarrow wave equation
- Wavefronts and Rays
- Interfaces
- Reflection and Transmission coefficients

Seismic Waves

body waves

P-waves (longitudinal, compressional)

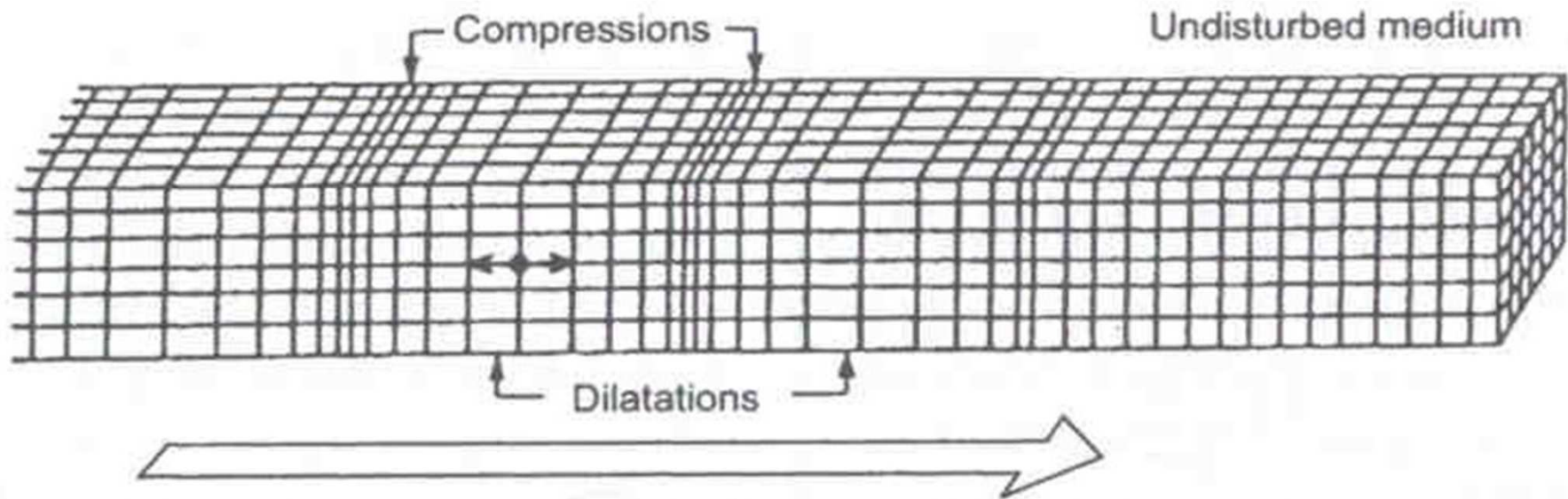
S-waves (shear, transverse)

S_V -wave

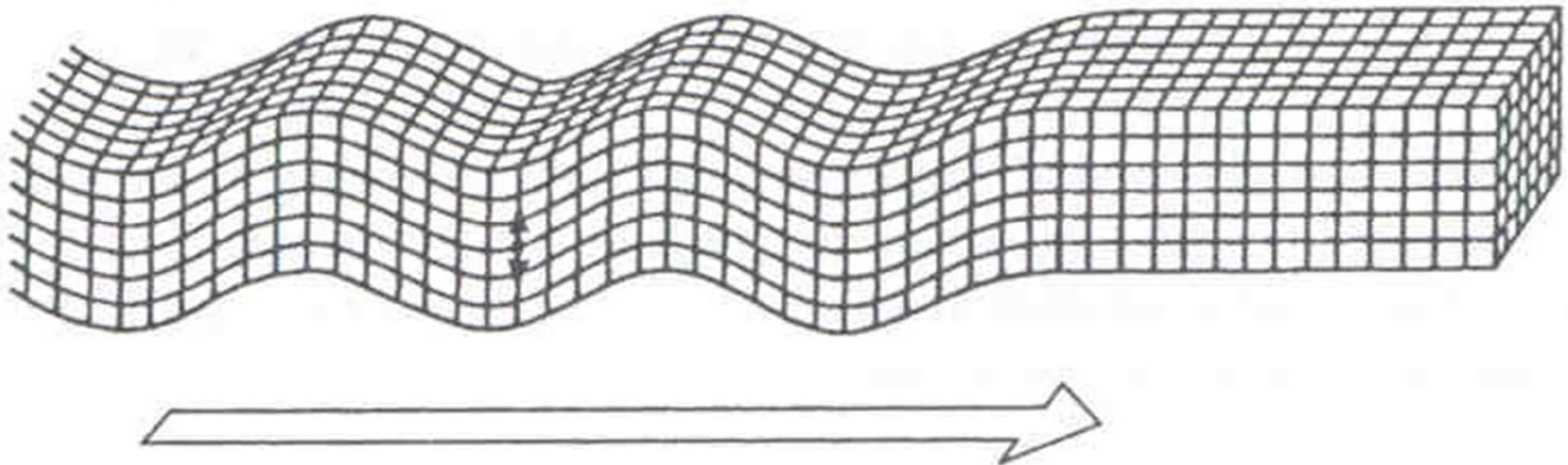
S_H -wave

Body waves:

P - wave

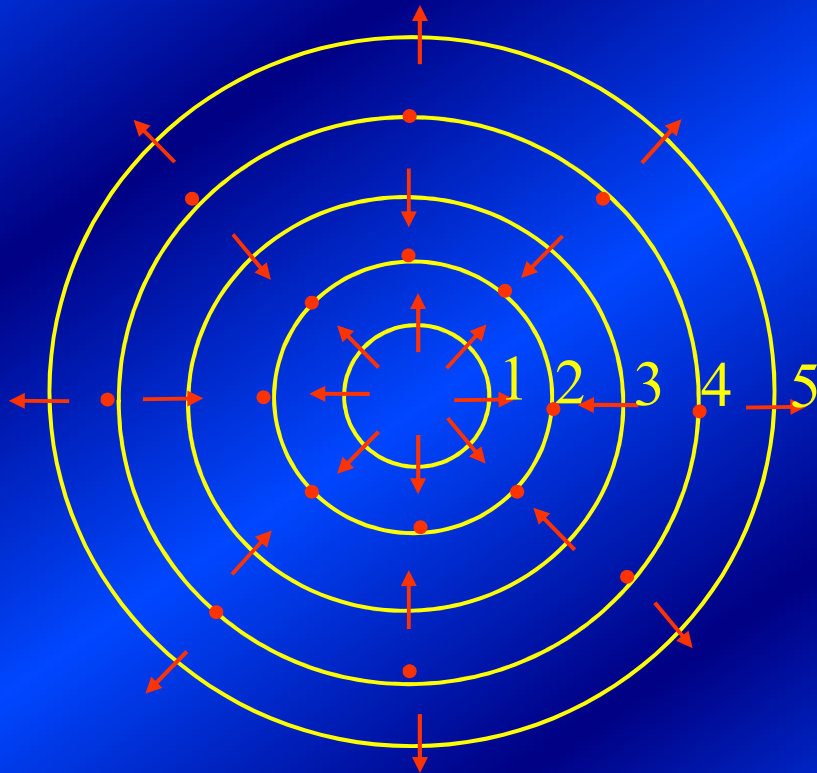


S - wave

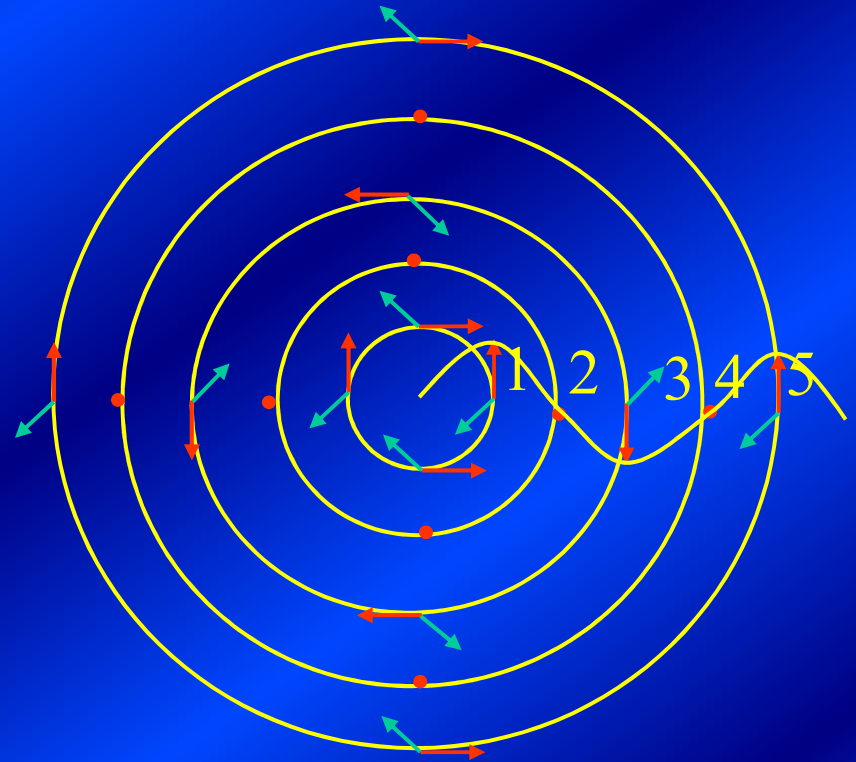


Different kind of waves

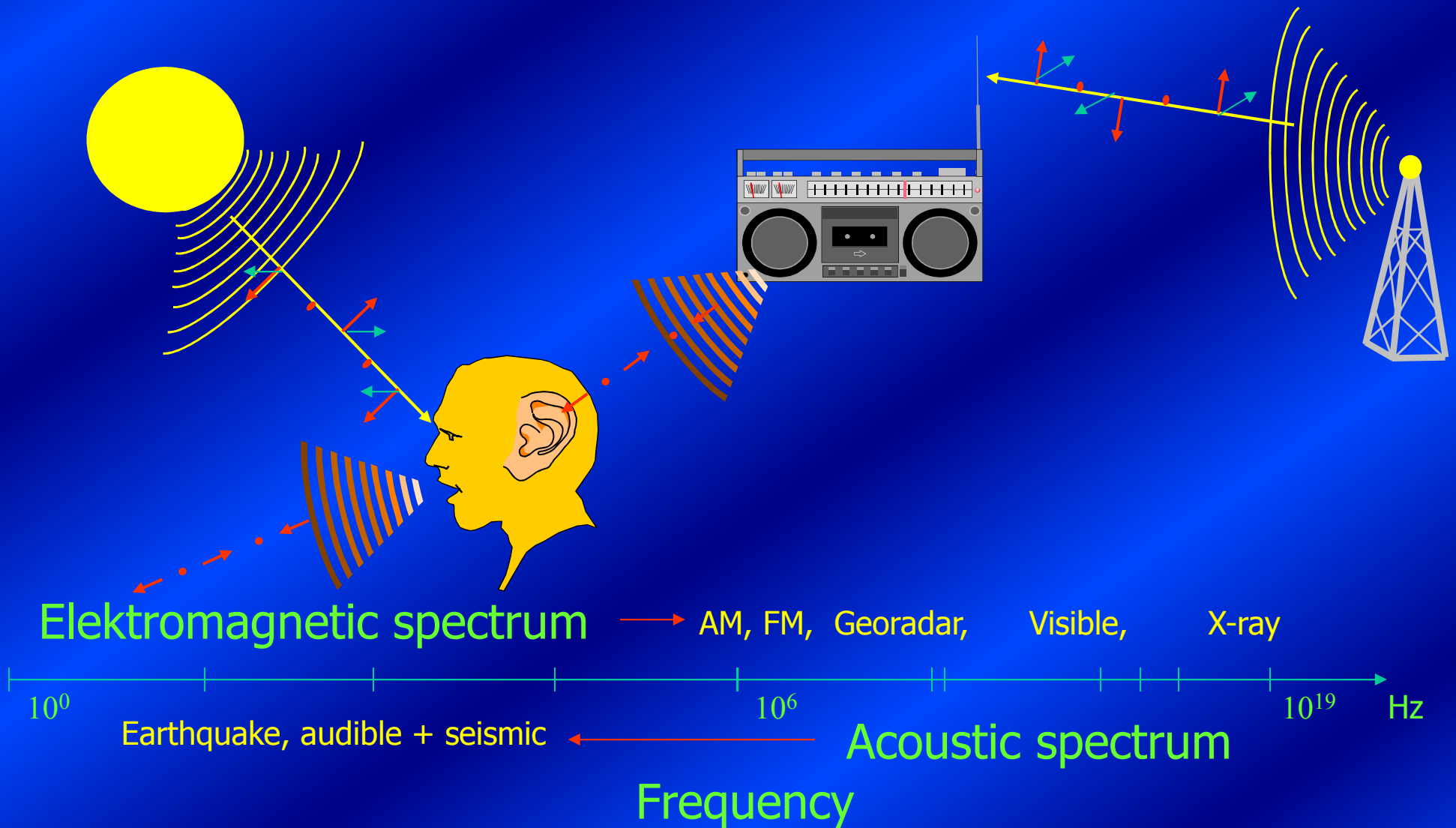
- Longitudinal waves (P-waves)



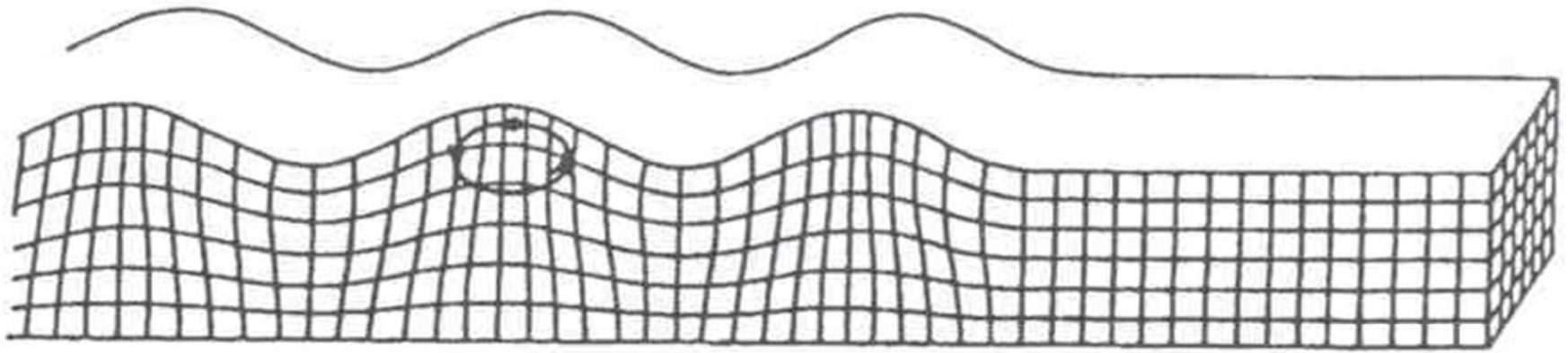
- Transversal waves (S-waves)



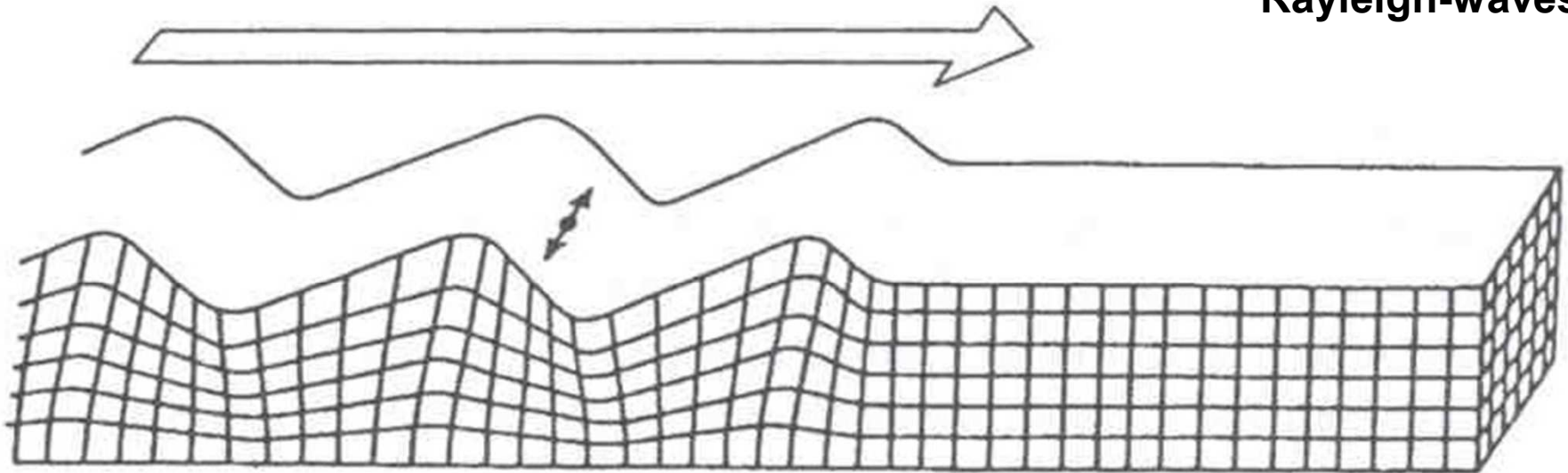
Examples of different waves



Surface waves

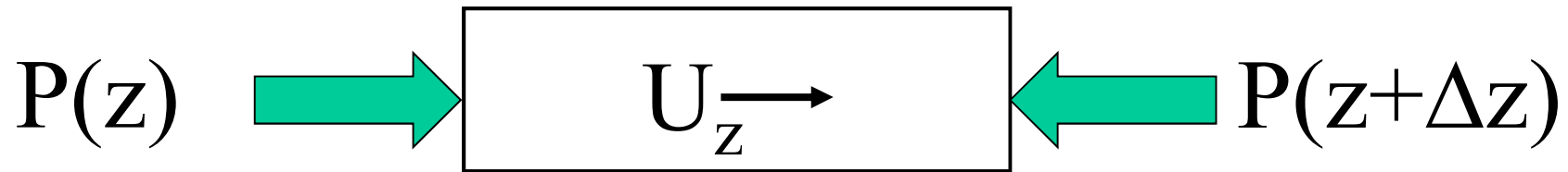


Rayleigh-waves



Love-waves

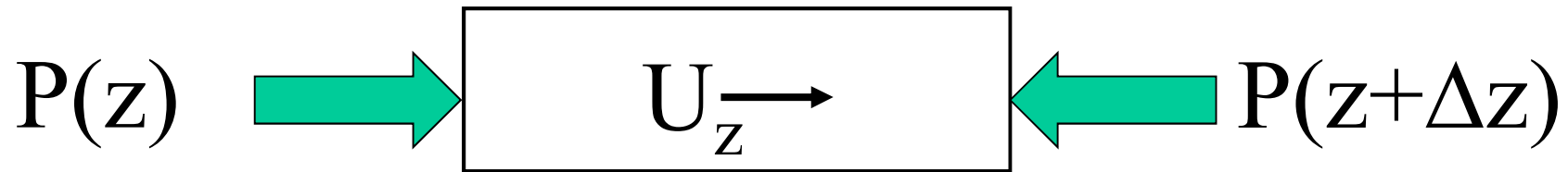
Newton's law



P is the acoustic pressure

U_z is the displacement

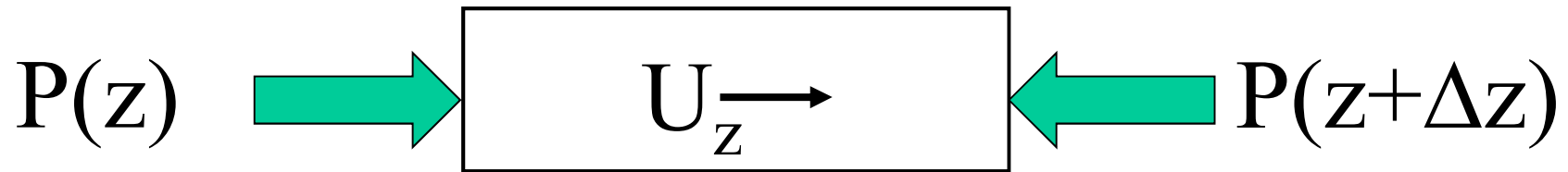
Newton's law



$$P(z+\Delta z) - P(z) = -\rho \Delta z \frac{d^2}{dt^2} U_z$$

ρ is the mass density

Newton's law



$$\frac{\partial}{\partial z} P = -\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} U_z$$

Hooke's law



$$U_z(z+\Delta z) - U_z(z) = -\kappa \Delta z P$$

κ is the compressibility

Hooke's law



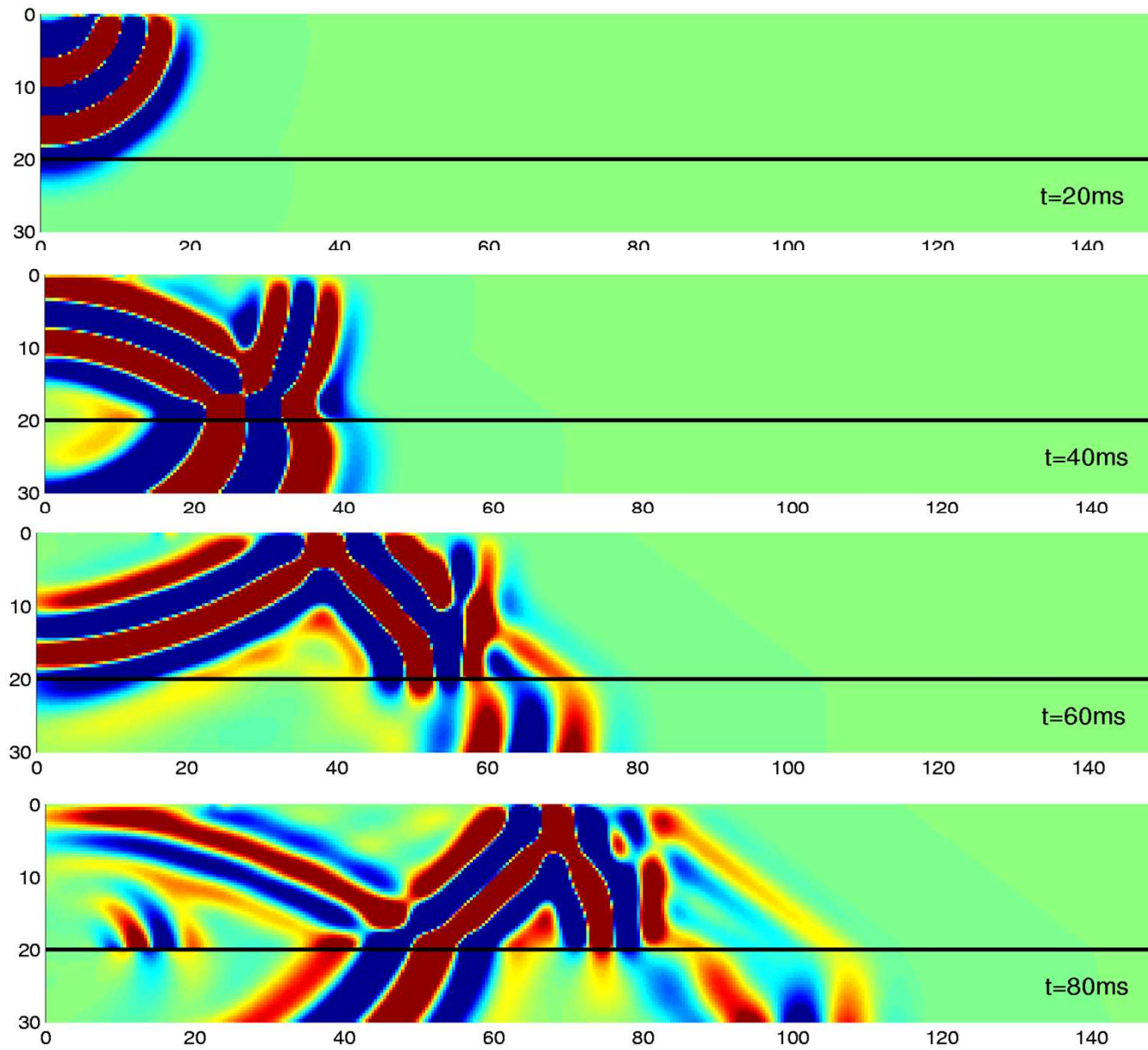
$$\frac{\partial}{\partial z} U_z = -\kappa P$$

Acoustic Wave equation

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} P - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} P = -w(t) \delta(z)$$

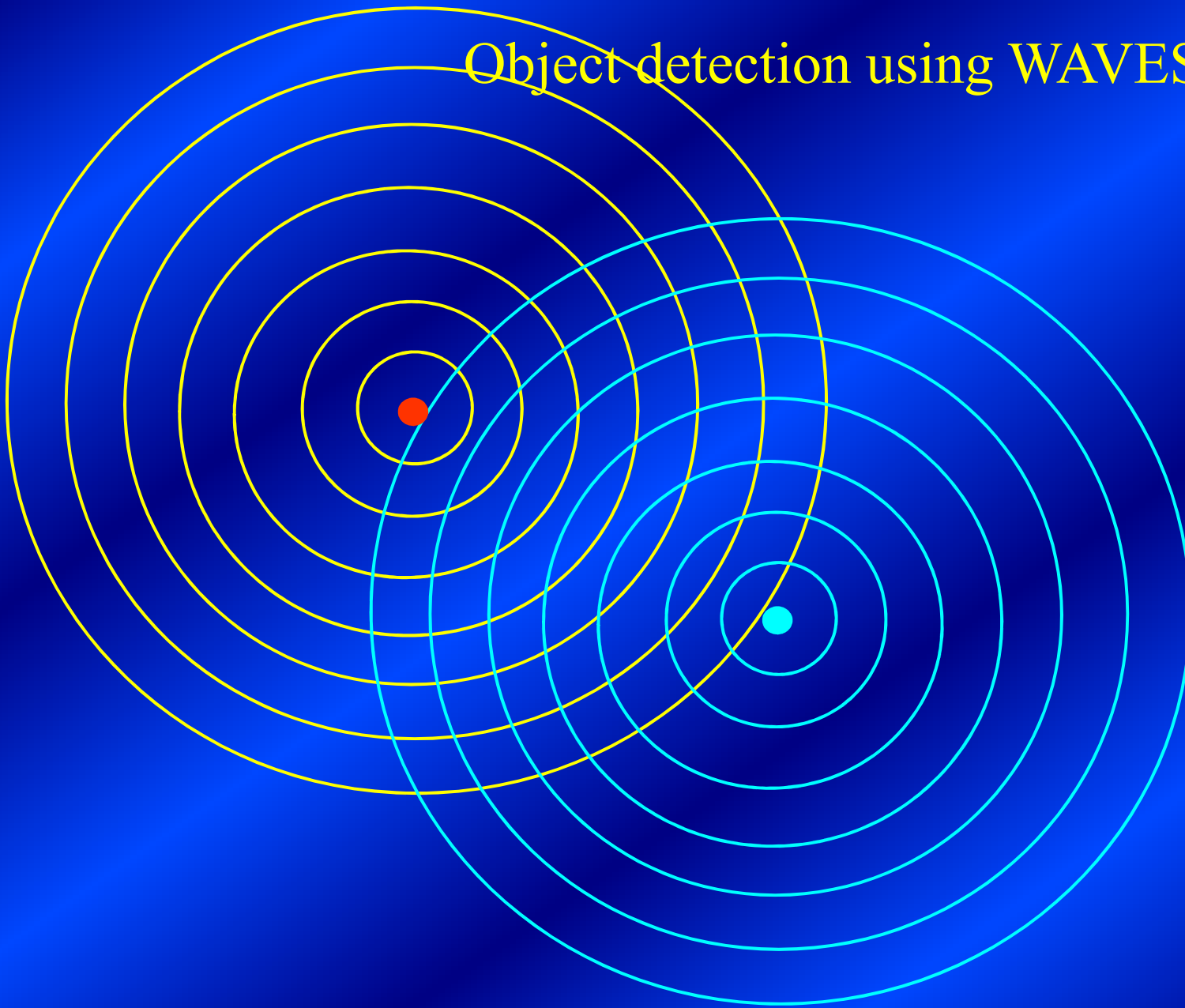
$$w(t) = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} q(t) \quad (\text{sourcesignal})$$

$$c = (\rho \kappa)^{-1/2} \quad (\text{wavespeed})$$

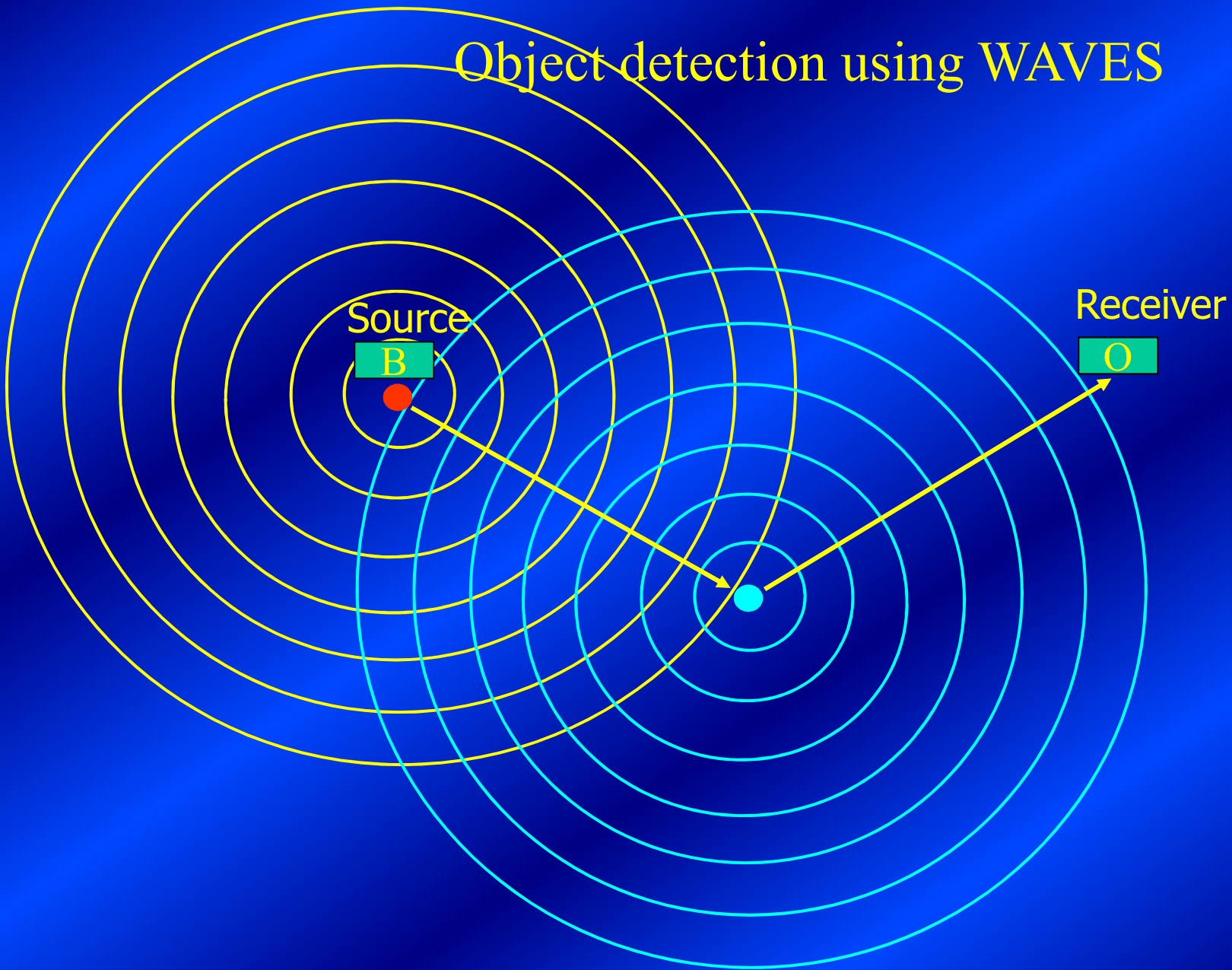


(Roth et al., 1998)

Object detection using WAVES:



Object detection using WAVES

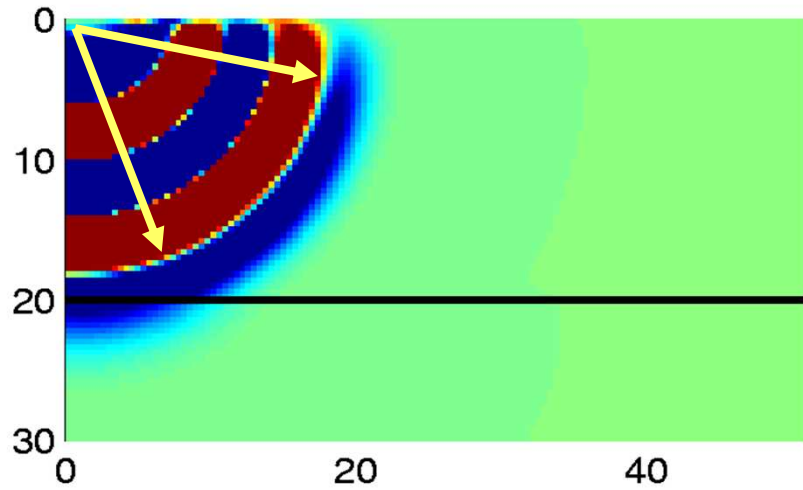


Wavefronts versus Rays

- Wavefronts indicate the boundary of the material which already moves and the material which is still undisturbed.
- Rays are plotted perpendicular with respect to the wavefronts and describe the dominant propagation of the seismic energy between two locations

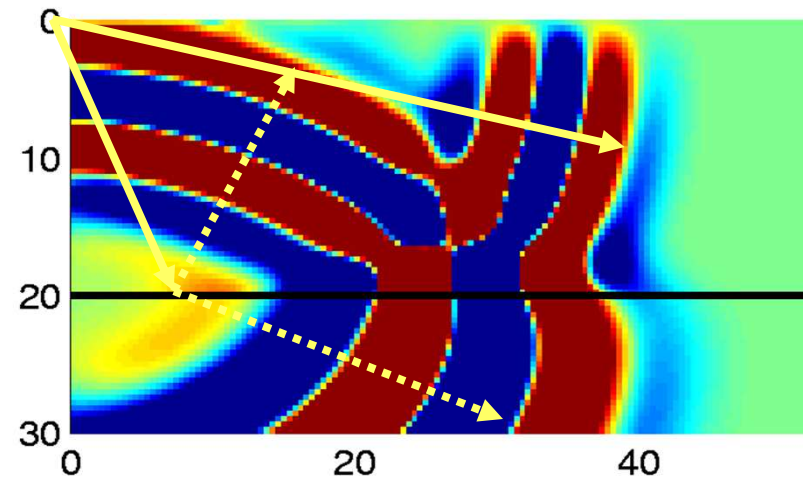
Geometrical Wave propagation

Source



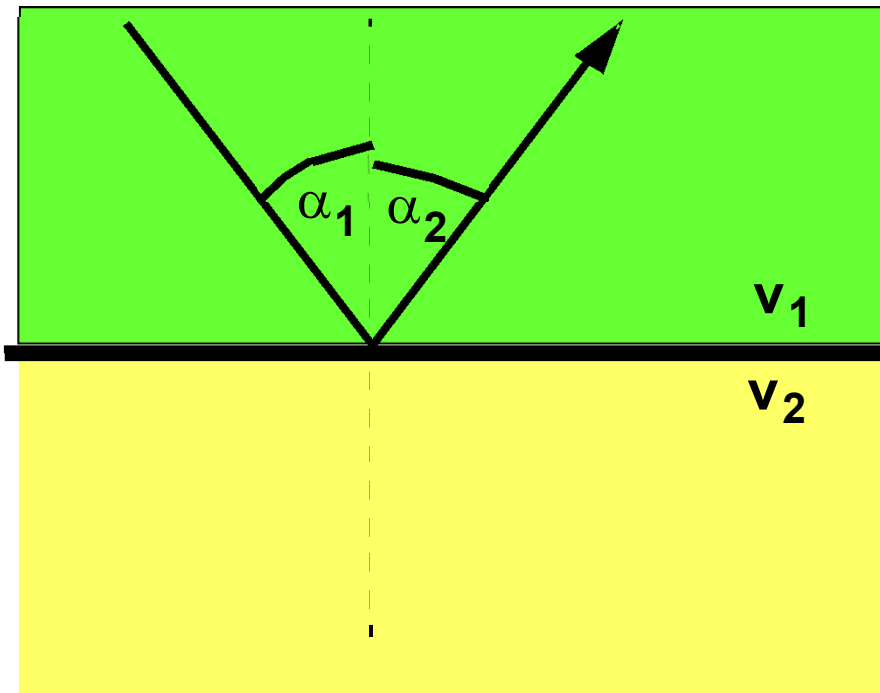
Source

Receiver



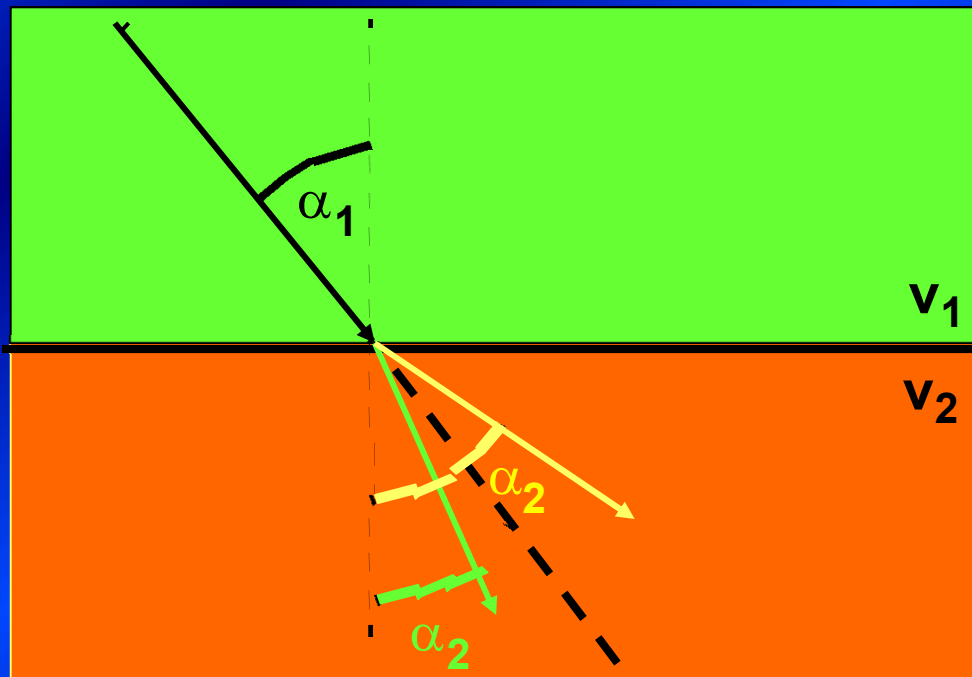
➡ Rays are perpendicular to the wavefronts,

Interface: reflection



Angle of incidence =
angle of reflection
 $\alpha_1 = \alpha_2$

Interface: Refraction

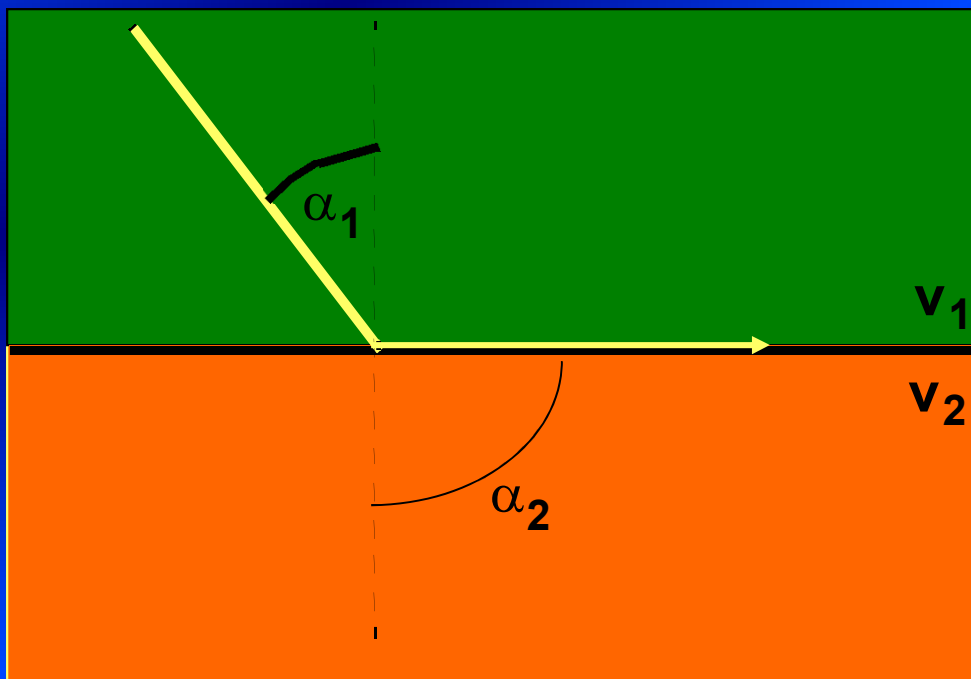


$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

$$v_2 > v_1$$

$$v_2 < v_1$$

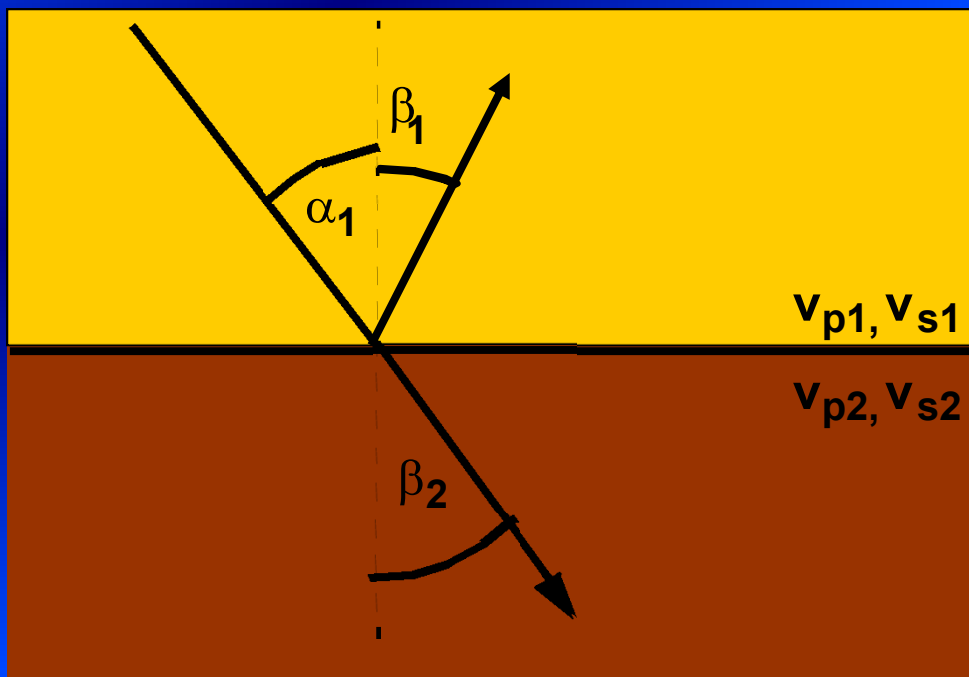
Special case: critical angle



$$\alpha_2 = 90^\circ$$

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin 90^\circ} = \sin \alpha_1 = \frac{v_1}{v_2}$$

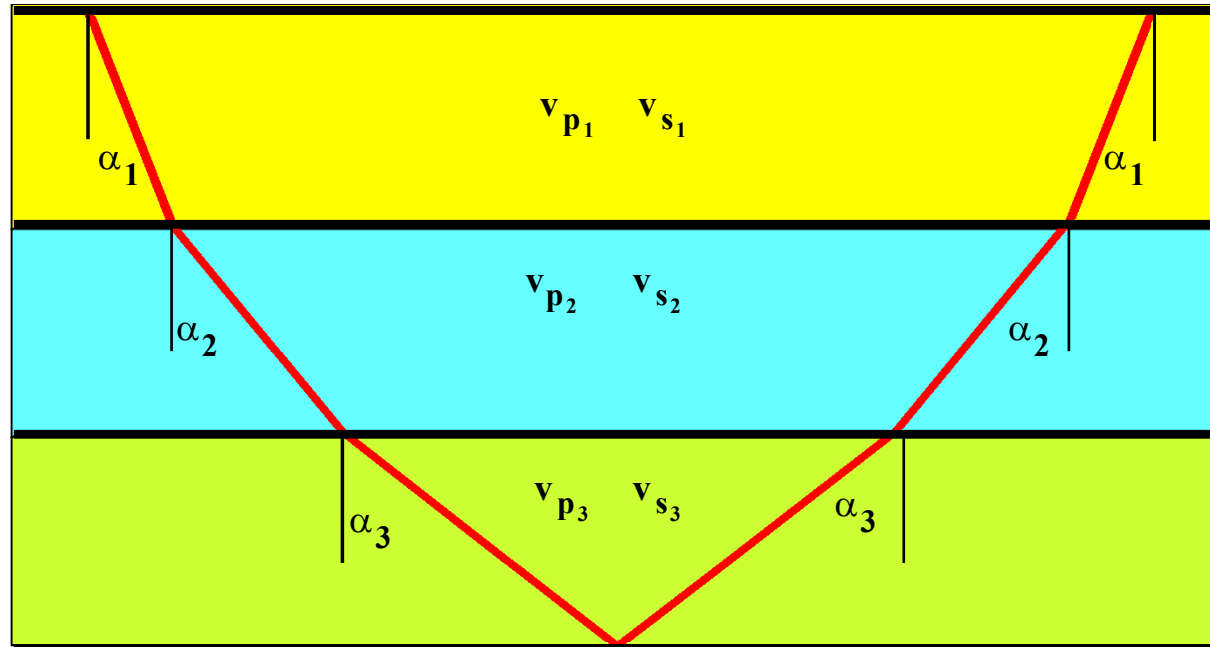
Interface: Conversion from P wave to S wave



$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_1} = \frac{v_{p1}}{v_{s1}}$$

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_2} = \frac{v_{p1}}{v_{s2}}$$

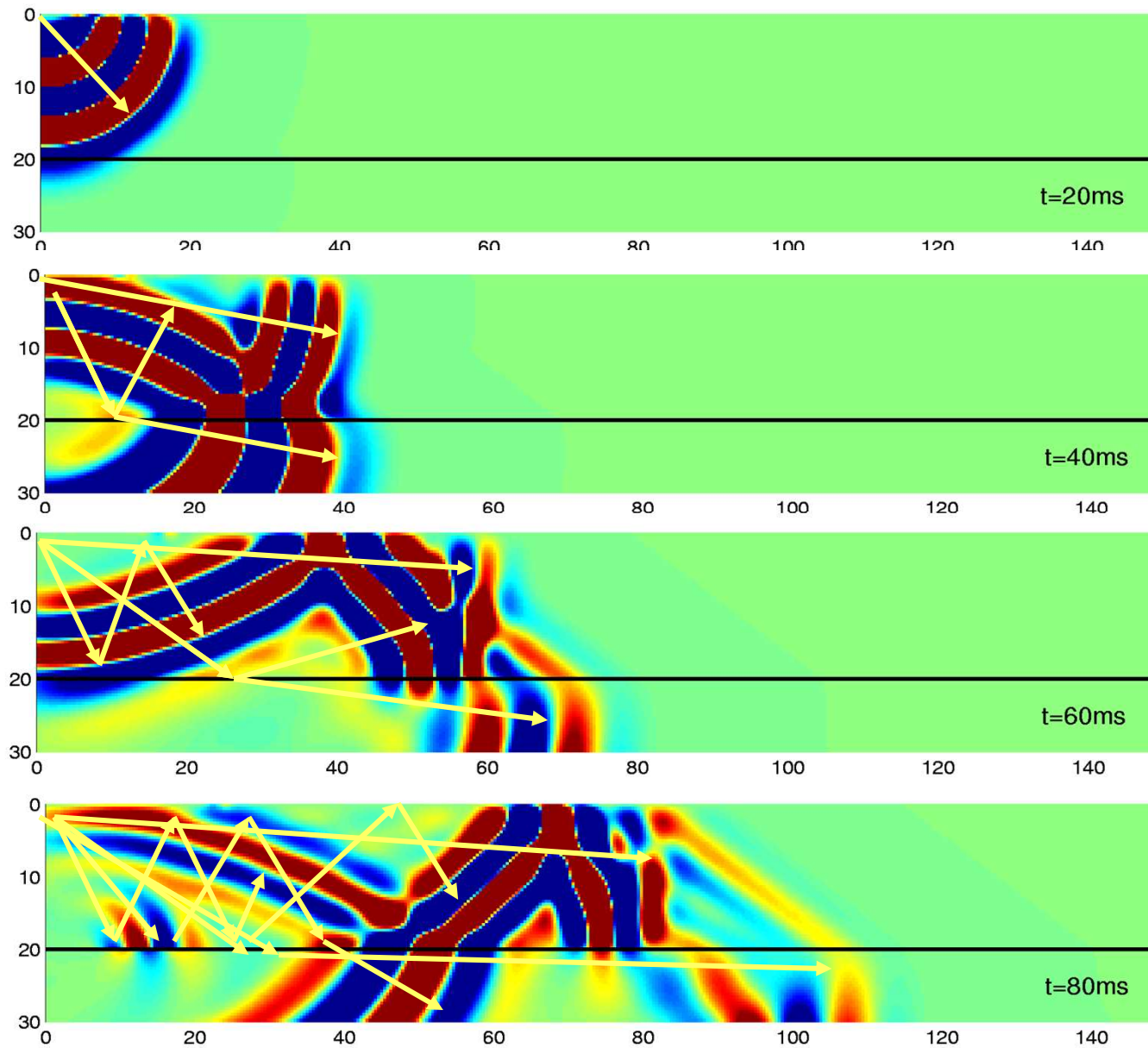
Snell's law



$$\frac{\sin \alpha_1}{v_{p1}} = \frac{\sin \beta_1}{v_{s1}} = \frac{\sin \alpha_2}{v_{p2}} = \frac{\sin \beta_2}{v_{s2}} = \frac{\sin \beta_n}{v_{s_n}} = p = \text{constant}$$

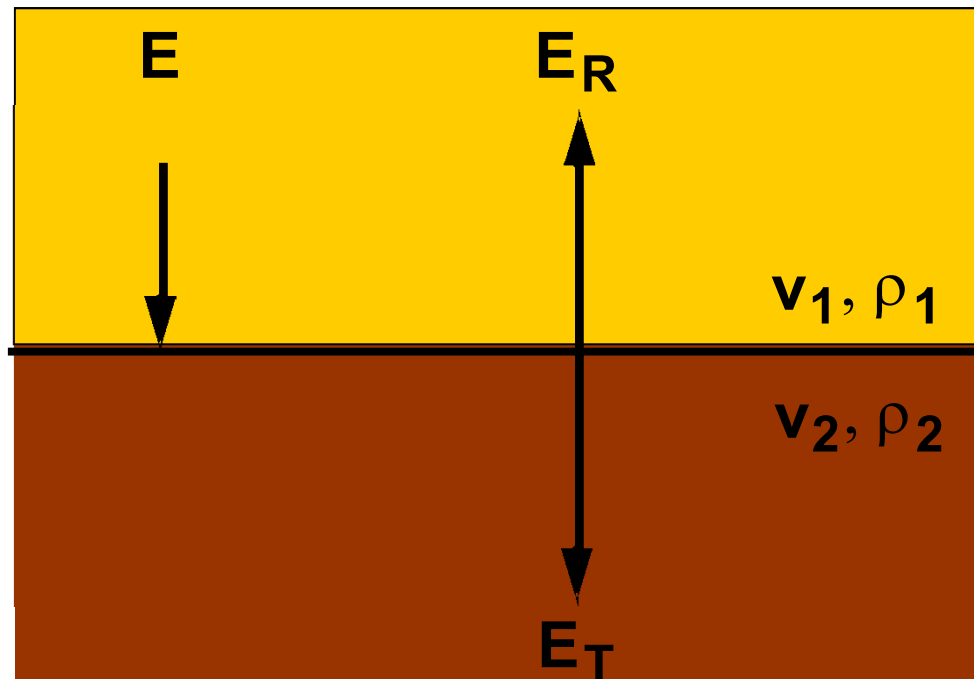
p = Slowness

Propagation of seismic waves



(Roth et al., 1998)

Transmission- and Reflection coefficients



$$E = E_R + E_T$$

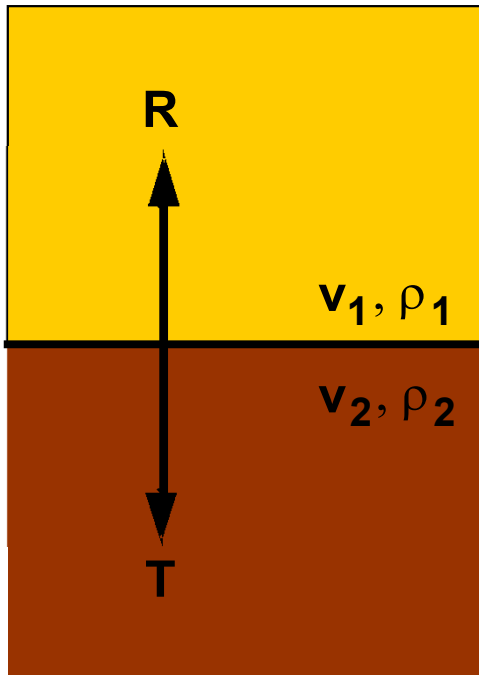
$$R + T = 1$$

E = Energy

R = Reflection coefficient

T = Transmission coefficient

Zoeppritz's equations at normal incidence



Reflection coefficient

$$R = \frac{v_2 \rho_2 - v_1 \rho_1}{v_2 \rho_2 + v_1 \rho_1} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$$

Transmission coefficient

$$T = \frac{2v_1 \rho_1}{v_2 \rho_2 + v_1 \rho_1} = \frac{2Z_1}{Z_2 + Z_1}$$

with $Z = v \rho$ = acoustic Impedance

Reflected, Refracted and Diffracted waves

- Reflected wave from a horizontal layer
- Reflected wave from a dipping layer
- Refracted wave from a horizontal layer
- Refracted wave from a dipping layer
- Diffracted waves

Applications for shallow high resolution Reflection seismic

- Hydrogeological studies of aquifers
- Engineering geology
- Shallow faults
- Mapping Quaternary deposits
- Ground investigation for pipe and sewerage tunnel detection

Applications for Refraction seismic

- Depth of groundwater level
- Depth and location of hardrock
- Elastic medium parameters
- Glaciology

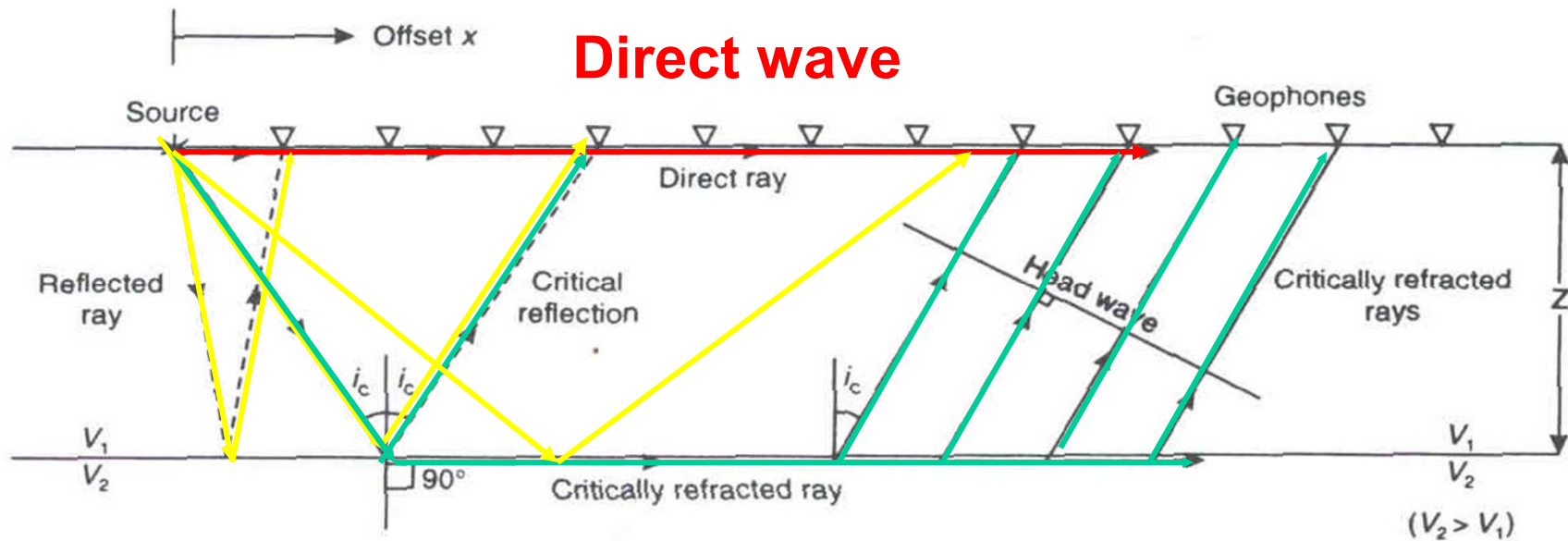
Refraction seismic

- Refracted Waves
- Mainly horizontal Wave propagation
- Only refracted waves are used. (Lower layer must have higher velocity than upper layer)
- *Distribution of velocity as well as the depth and orientation of interfaces between layers*

Reflection seismic

- Reflected Waves (“Echo lot principal”)
- Mainly vertical wave propagation
- Complete seismic recording is used
- *Distribution of the velocity variation*

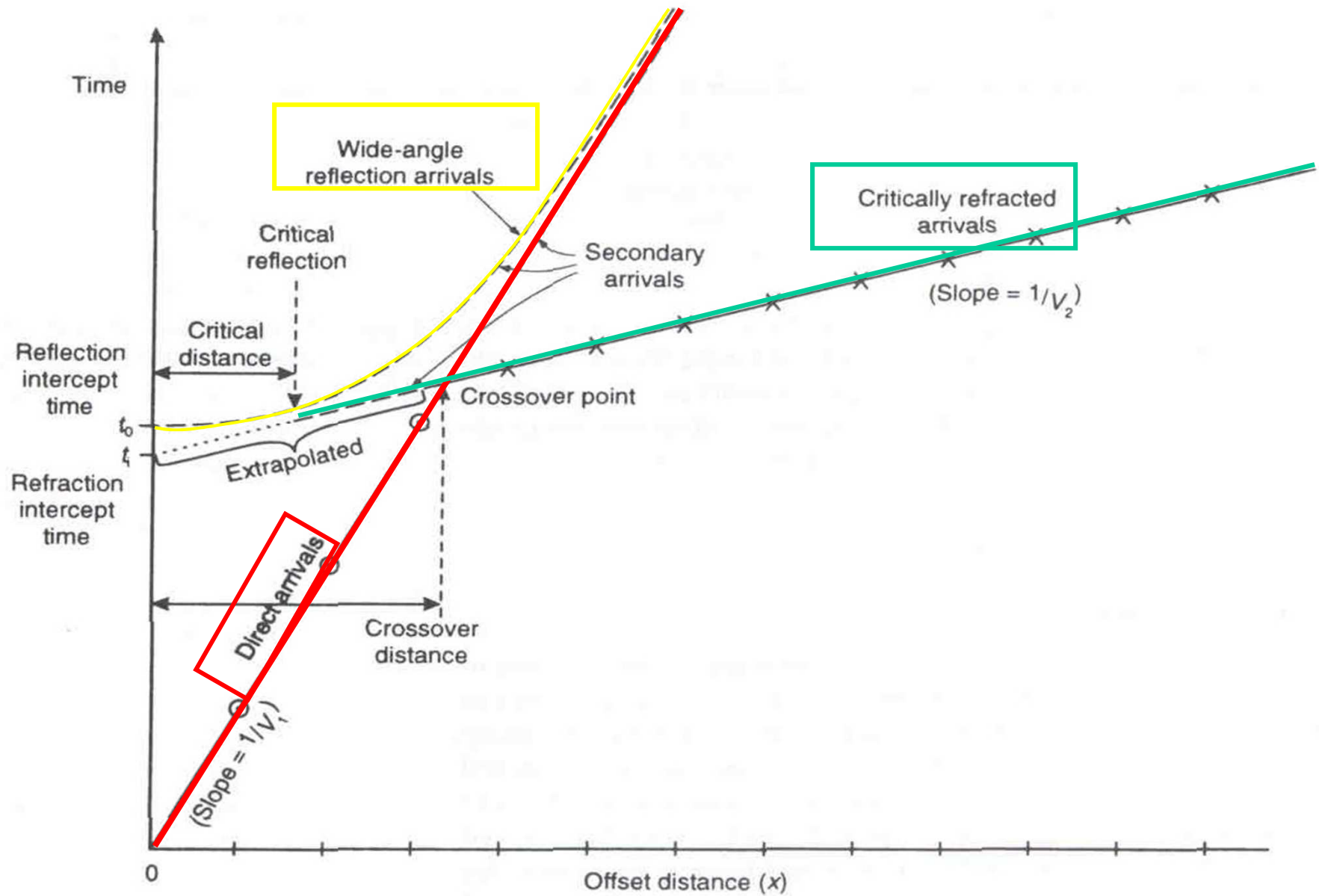
Geometrical situation



Reflected wave

Refracted wave

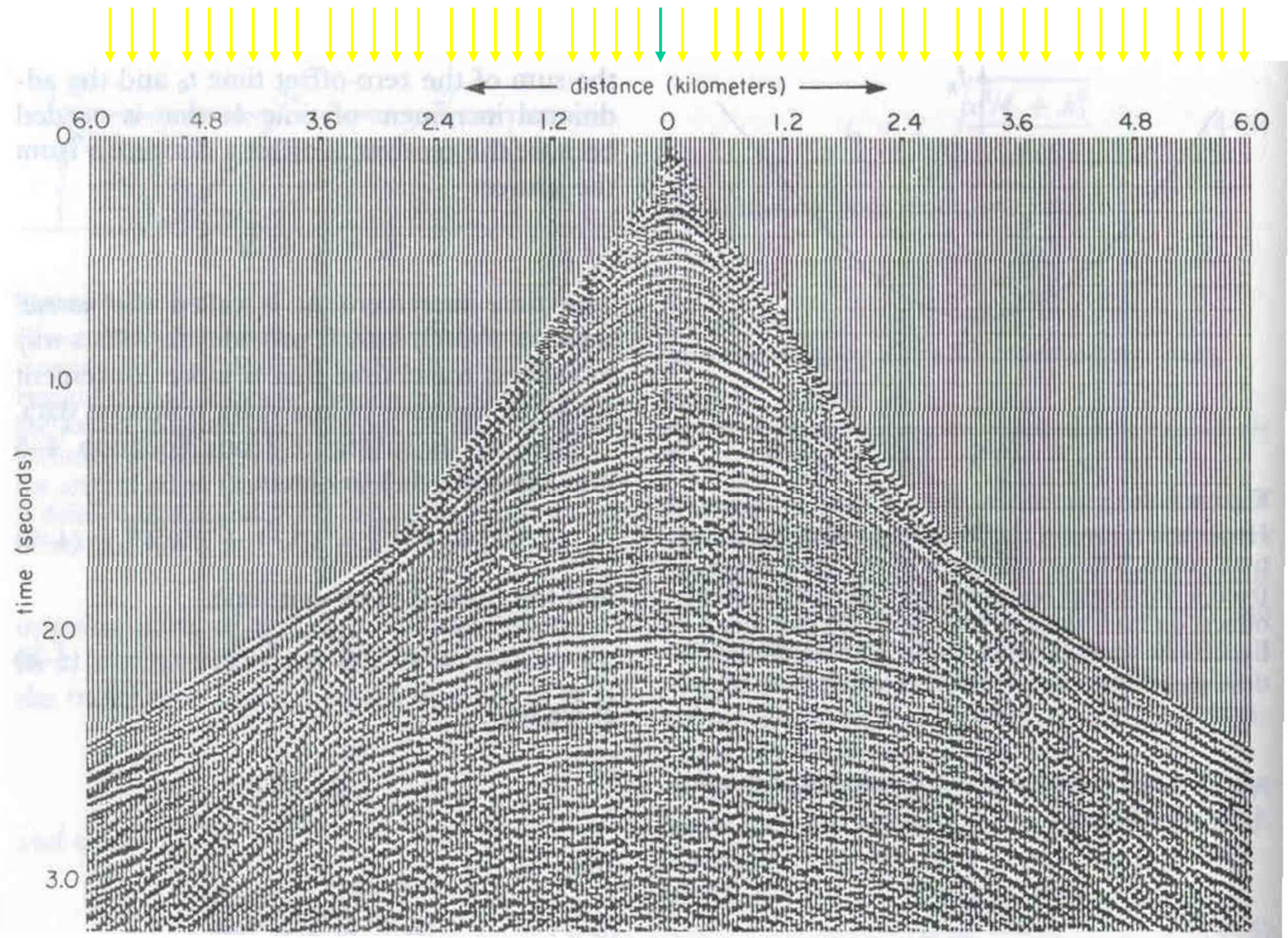
Traveltime curve



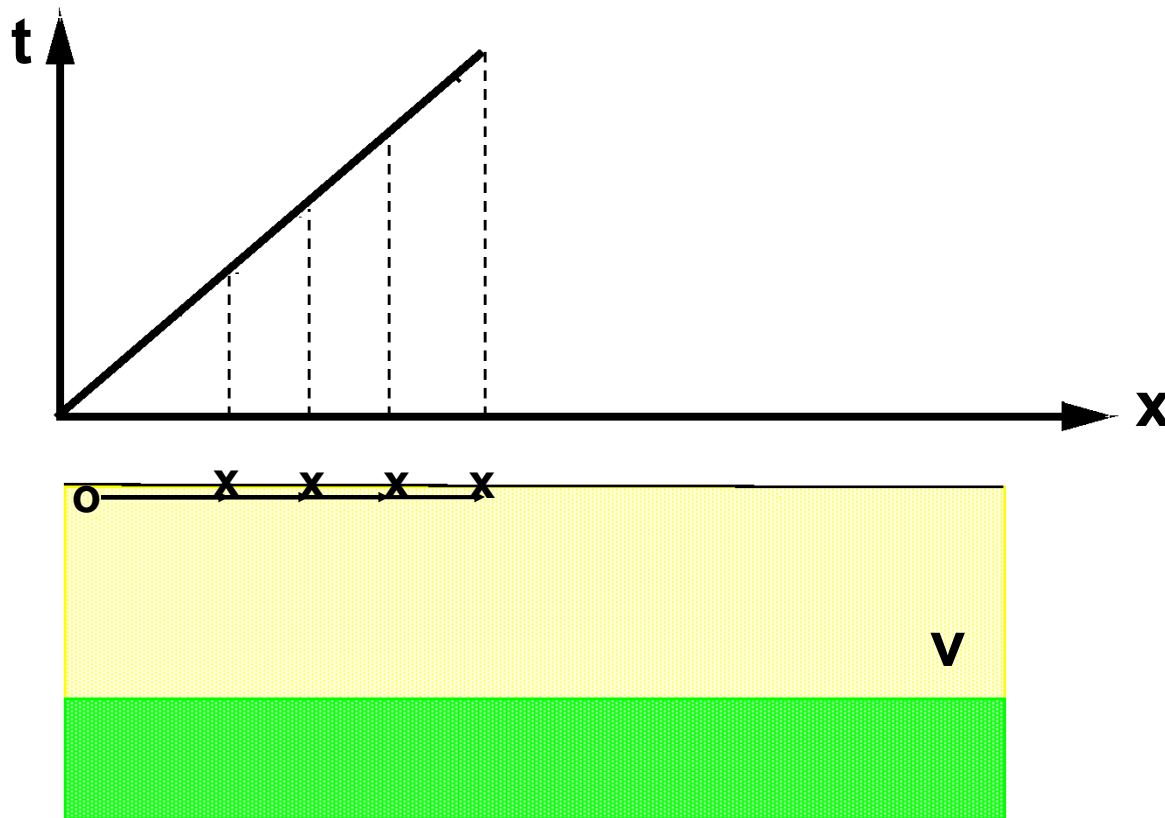
Receivers

Source

Receivers



Direct wave

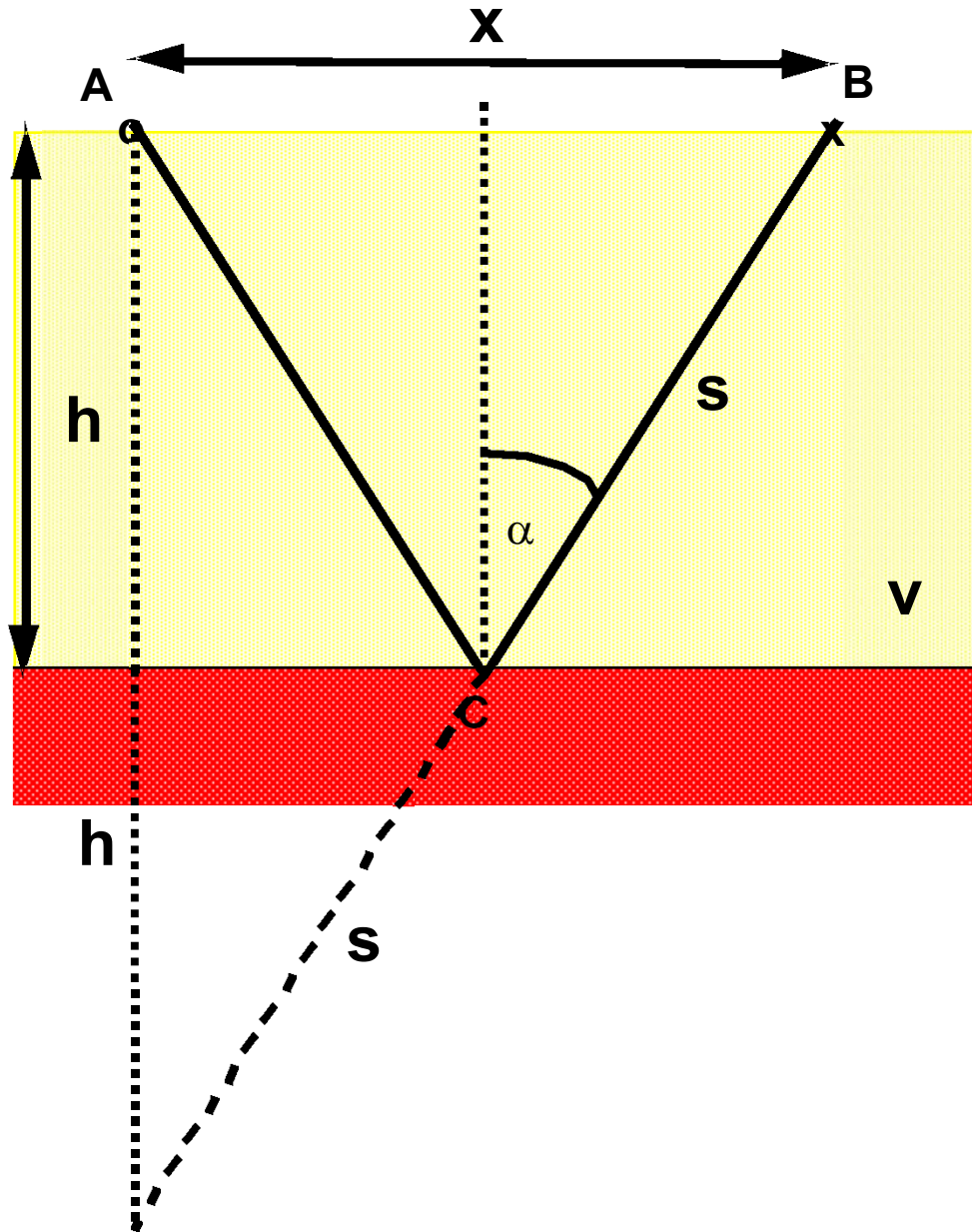


$$t = \frac{1}{v}x$$

$$v = \frac{x}{t}$$

Velocity of direct wave is derived from the distance and travel time

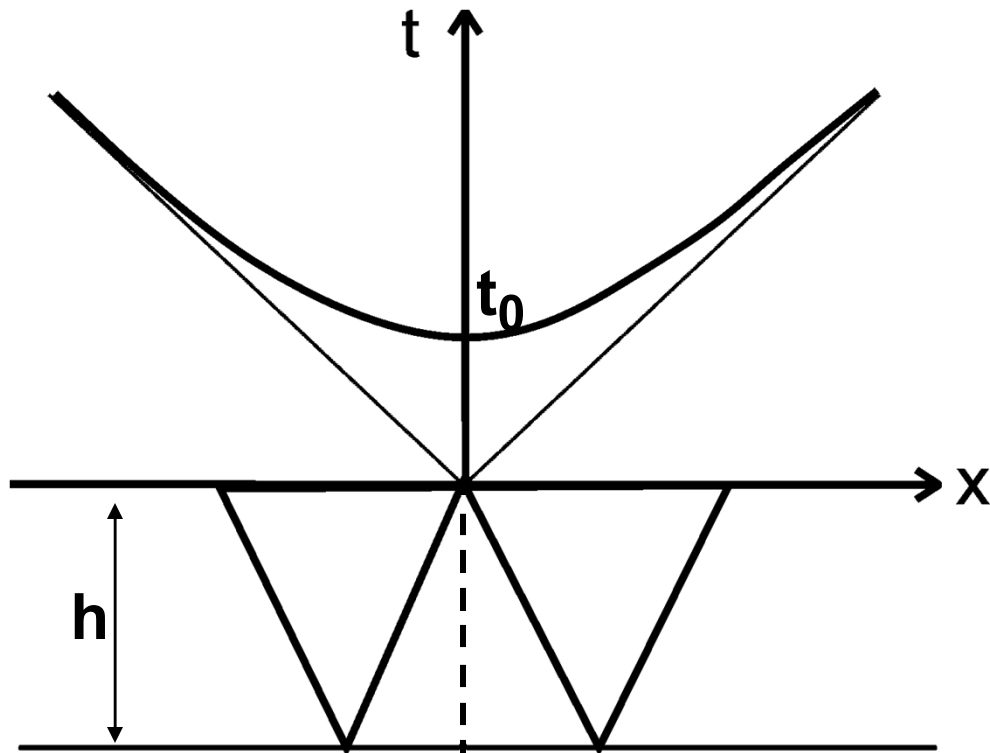
Reflection: Horizontal reflector



$$4S^2 = 4h^2 + x^2 = t^2 v^2$$

$$t^2 = (4h^2 + x^2) / v^2$$

Reflection: Horizontal reflector



$$t^2 v^2 = 4h^2 + x^2$$

$$t^2 = x^2/v^2 + t_0^2$$

for $x=0$:

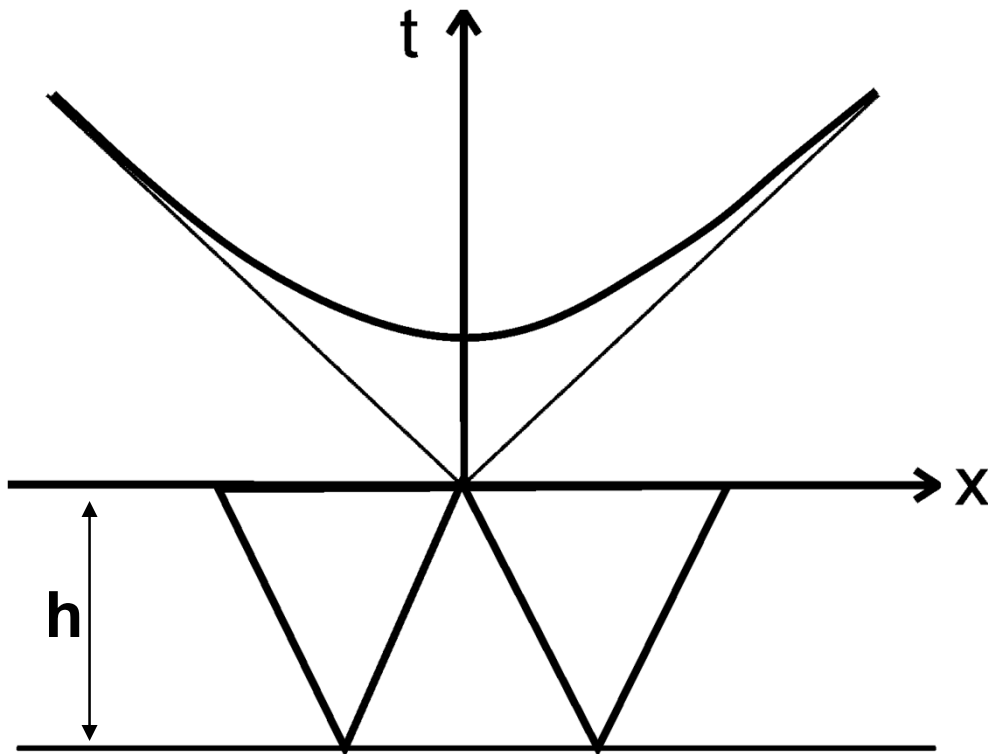
$$t^2 v^2 = 4h^2$$

$$t_{(x=0)} = t_0 = 2h/v$$

or

$$h = t_0 v / 2$$

Reflection: horizontal reflector



$$t^2 v^2 = 4h^2 + x^2$$

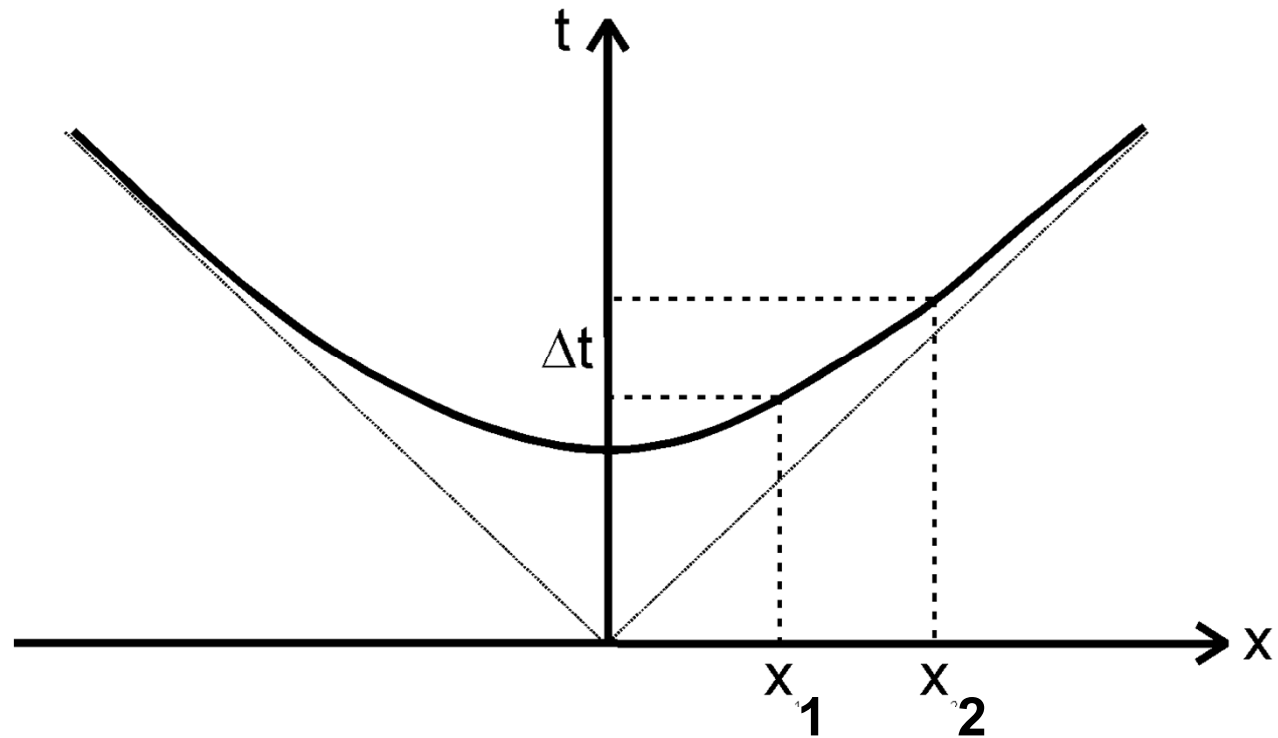
$$t^2 v^2 - x^2 = 4h^2$$

$$\frac{t^2 v^2}{4h^2} - \frac{x^2}{4h^2} = 1$$

Hyperbola

$$x \gg h \Rightarrow t = \frac{x}{v}$$

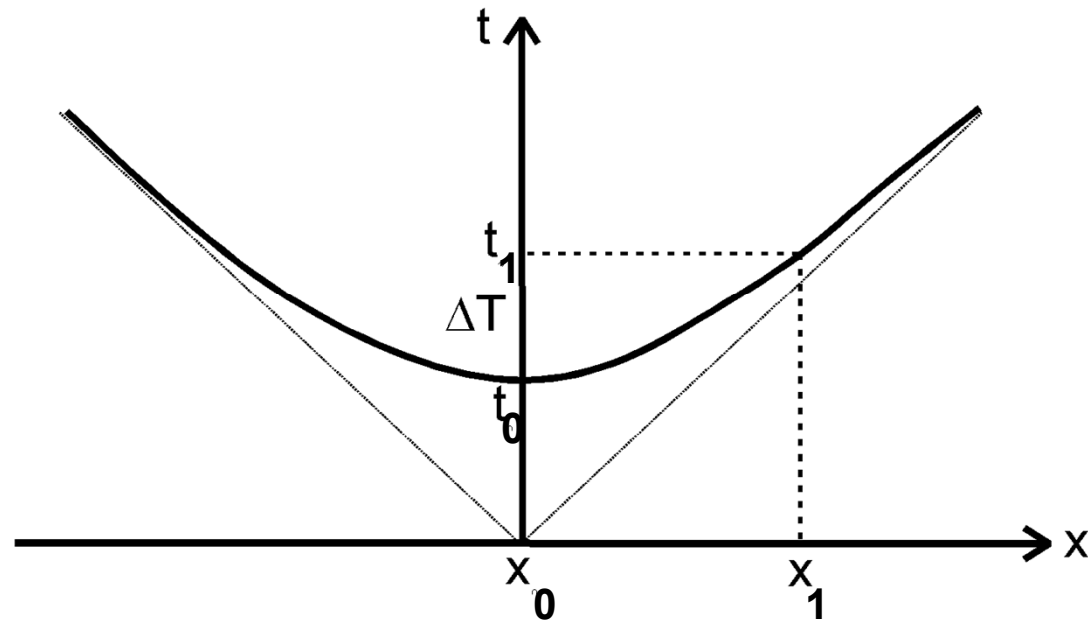
Moveout



Difference in travel time $t(x_1)$ und $t(x_2)$:

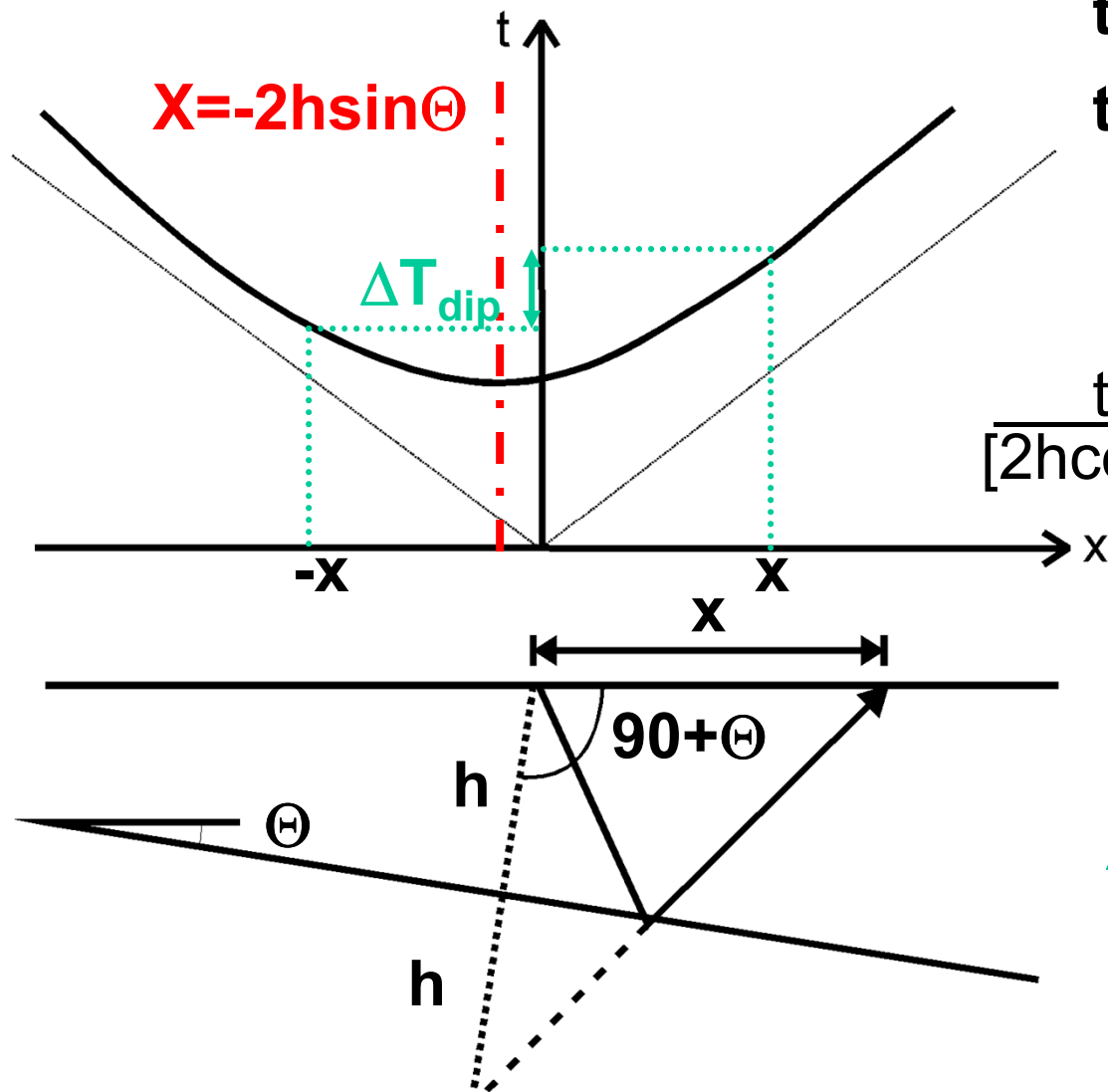
$$t_2 - t_1 \approx \frac{x_2^2 - x_1^2}{2v^2 t_0}$$

Normal Moveout



Difference in traveltimes t_0 and $t(x)$:

$$\Delta T = t_1 - t_0 \approx \frac{x_1^2}{2v^2 t_0}$$



$$t^2 v^2 = 4h^2 + x^2 - 4hx \cos(90 + \Theta)$$

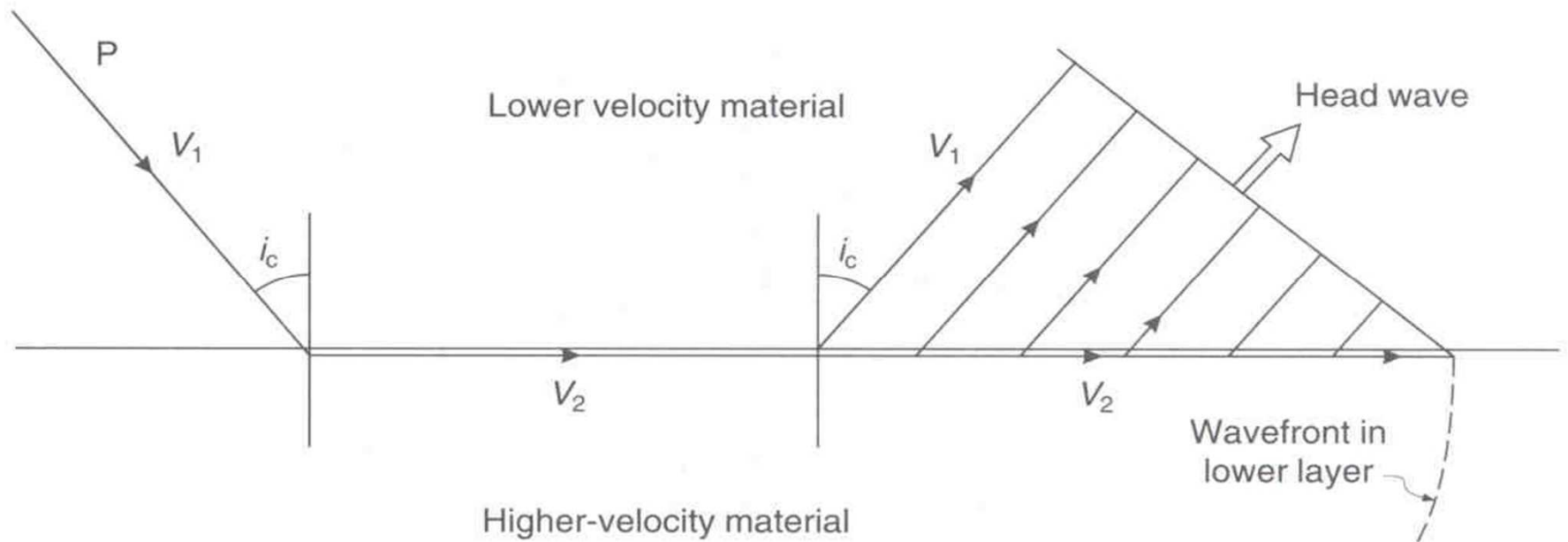
$$t^2 v^2 = 4h^2 + x^2 + 4hx \sin(\Theta)$$

Hyperbola:

$$\frac{t^2 v^2}{[2h \cos(\Theta)]^2} - \frac{[x + 2h \sin(\Theta)]^2}{[2h \cos(\Theta)]^2} = 1$$

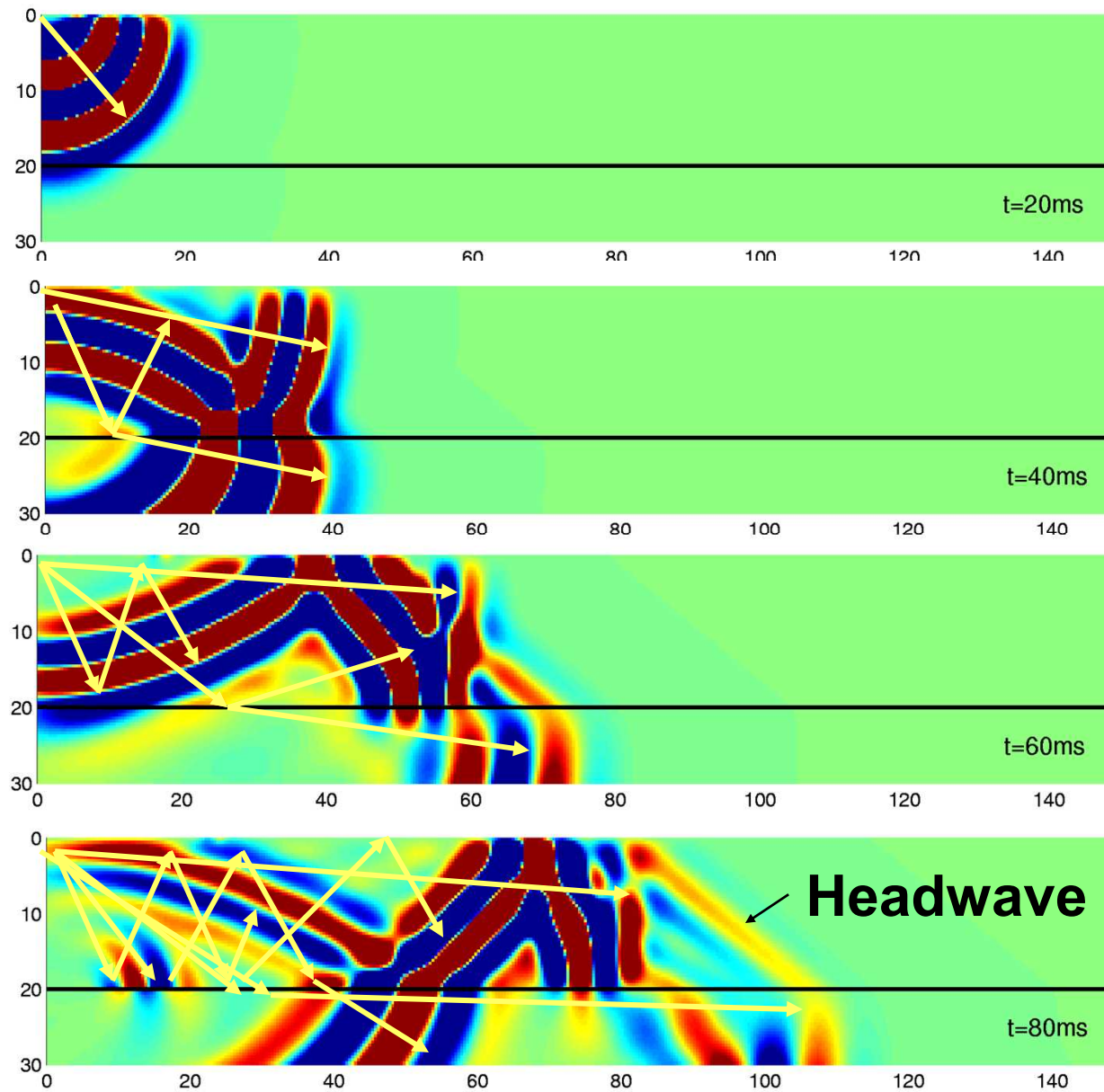
$$\Delta T_{\text{dip}} = t_x - t_{-x} = \frac{2x \sin \Theta}{v}$$

Refraction seismic

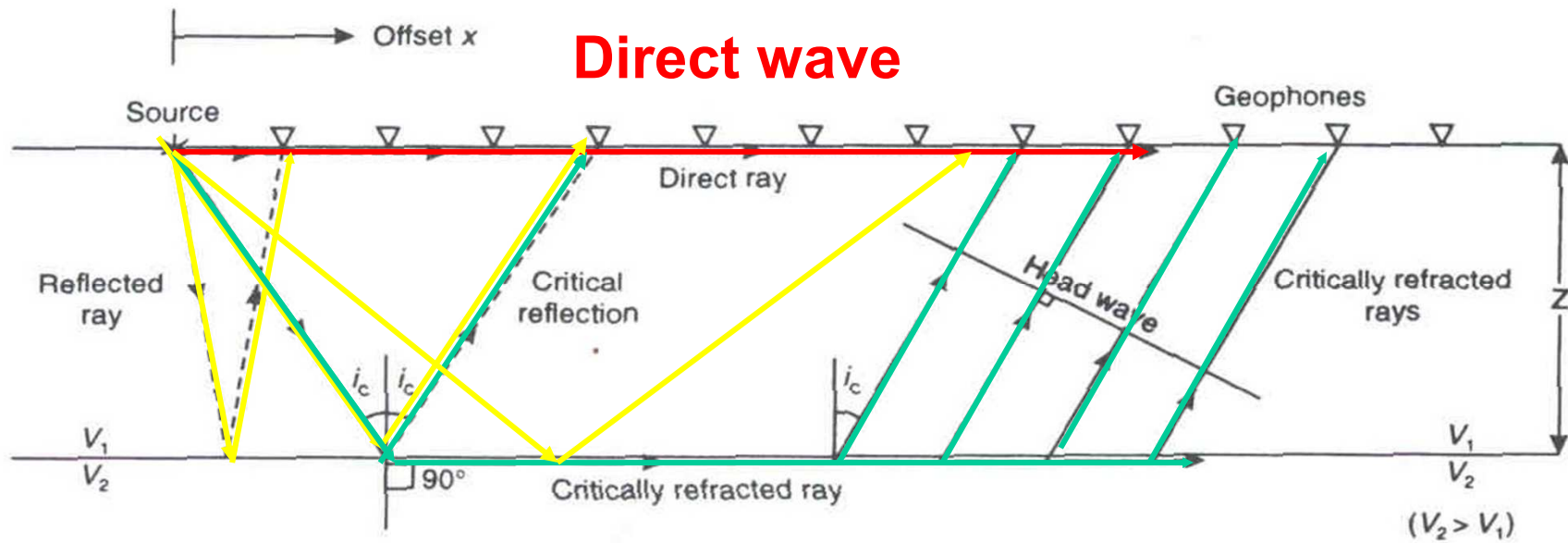


$$\frac{\sin i_c}{\sin 90} = \frac{v_1}{v_2} \Leftrightarrow \sin i_c = \frac{v_1}{v_2}$$

Propagation of seismic waves



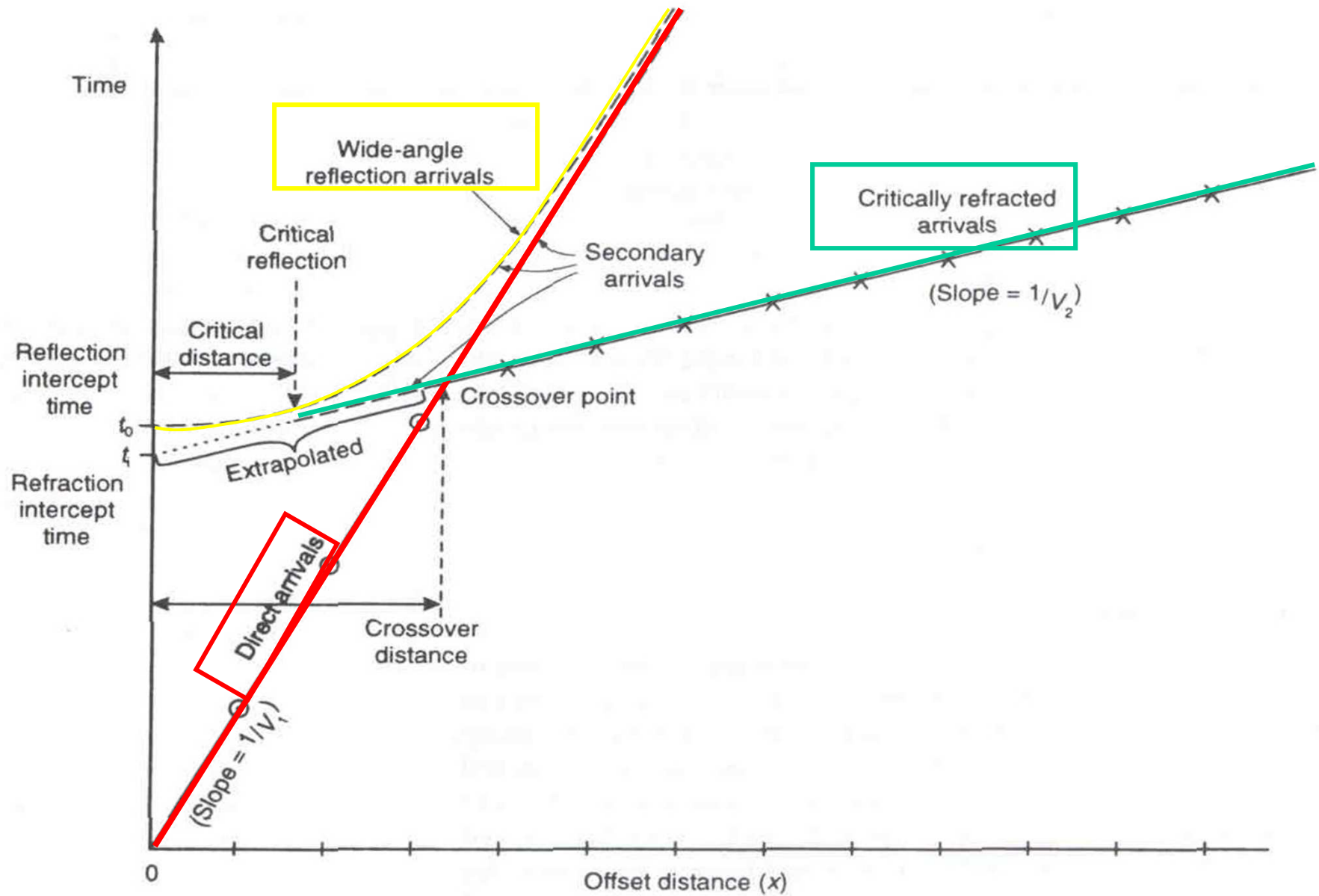
(Roth et al., 1998)

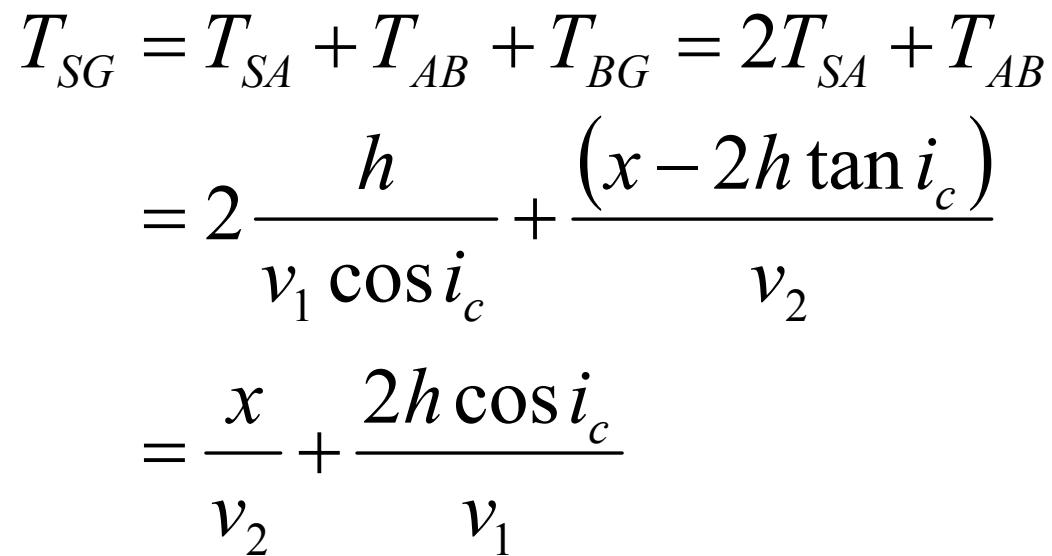


Direct wave

Refracted wave

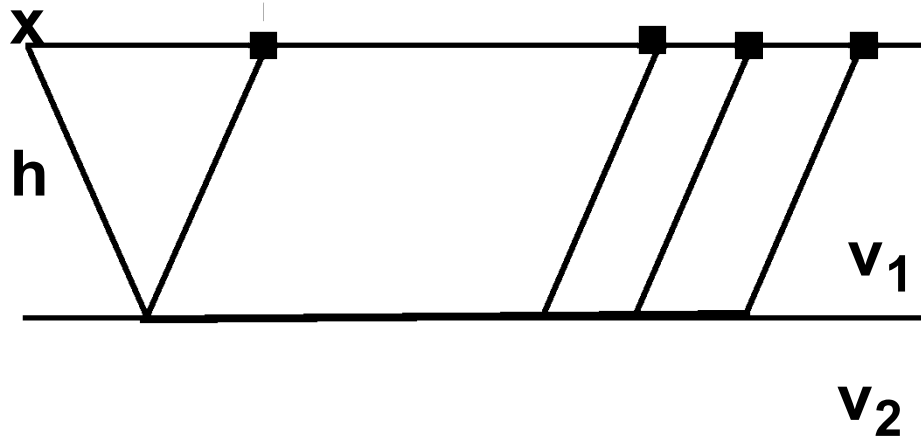
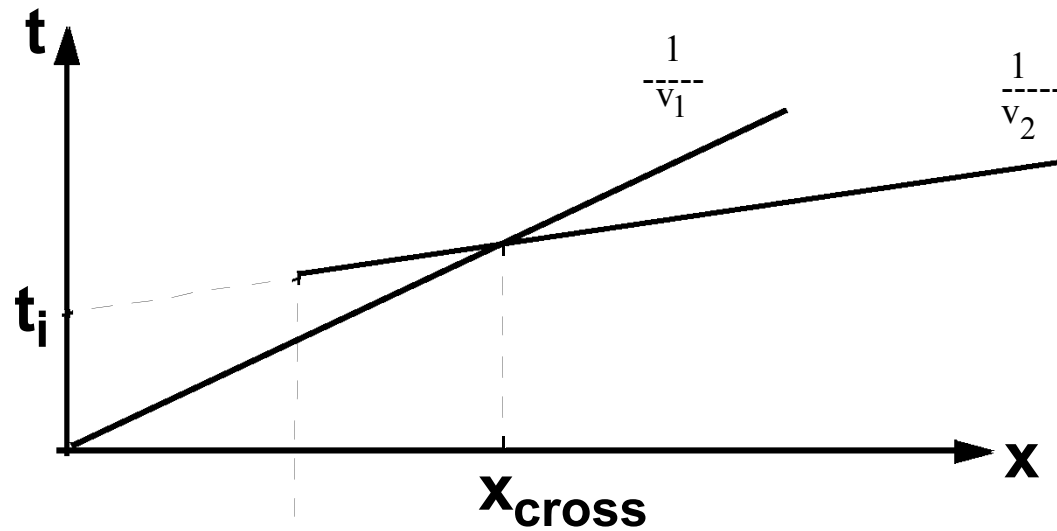
Traveltime curve





$$\begin{aligned} T_{SG} &= T_{SA} + T_{AB} + T_{BG} = 2T_{SA} + T_{AB} \\ &= 2 \frac{h}{v_1 \cos i_c} + \frac{(x - 2h \tan i_c)}{v_2} \\ &= \frac{x}{v_2} + \frac{2h \cos i_c}{v_1} \end{aligned}$$

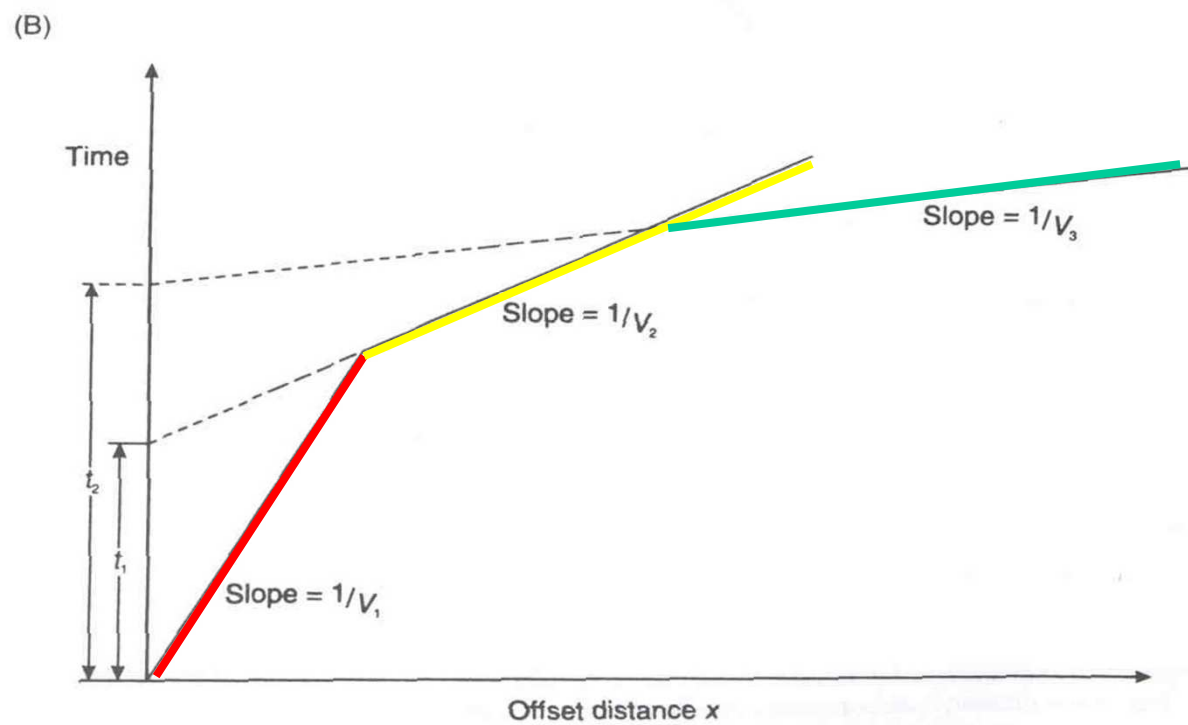
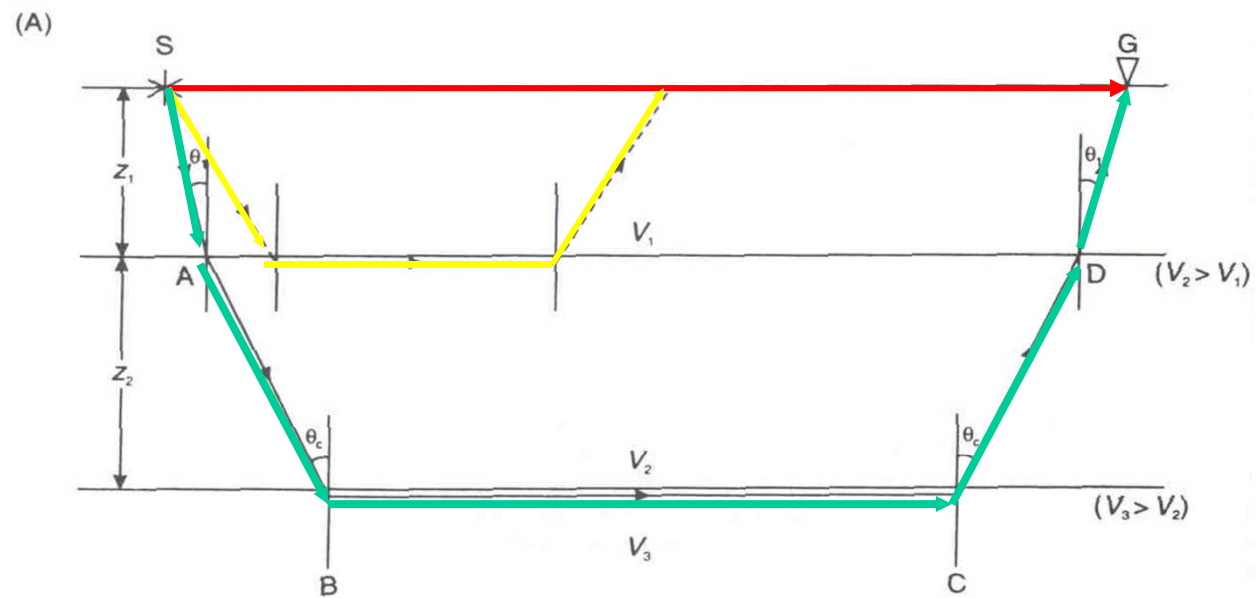
Refraction: horizontal reflector

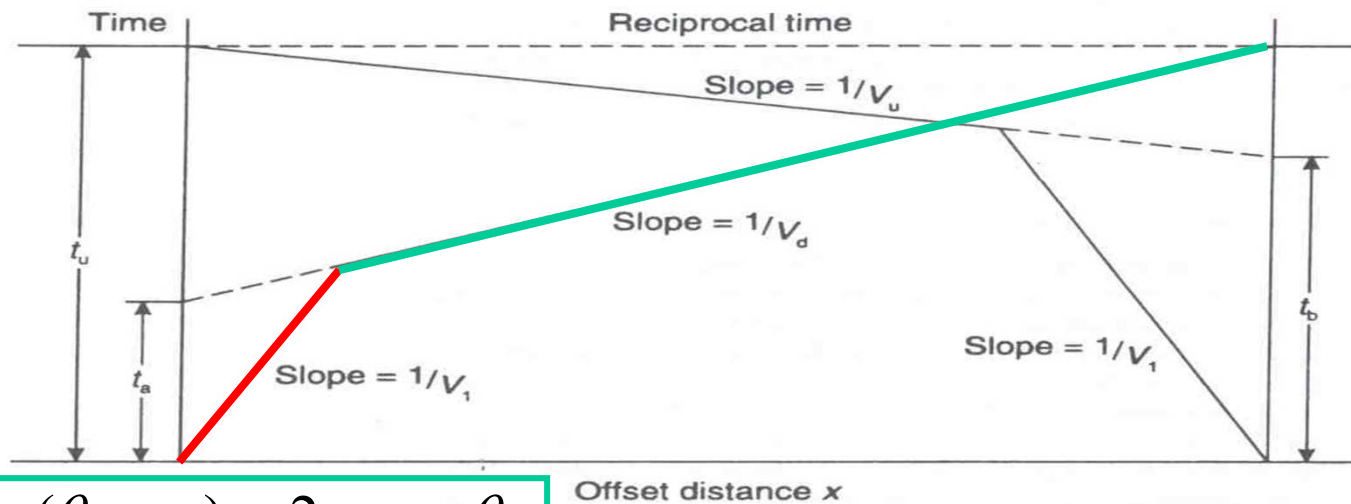
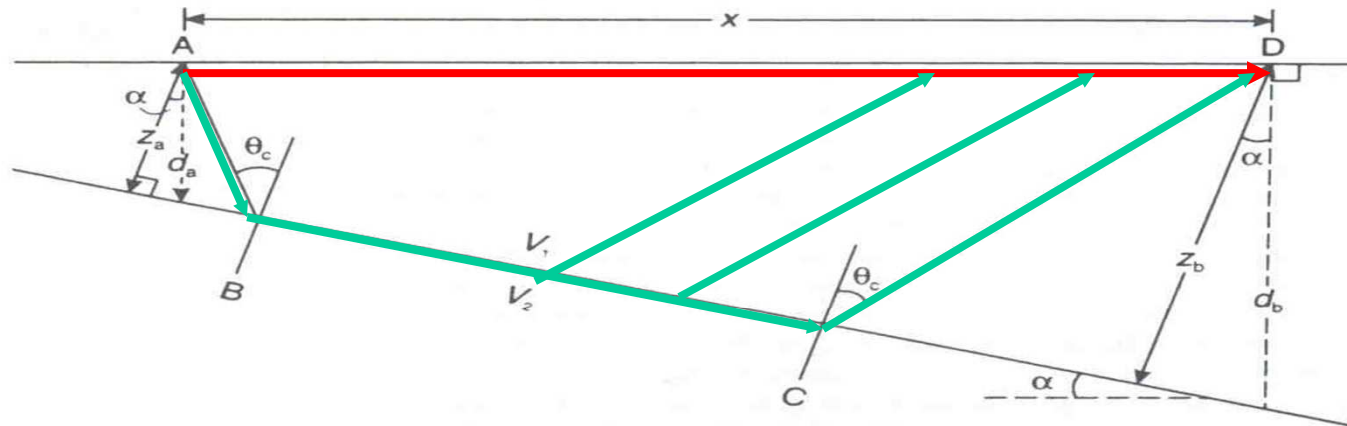


$$t = \frac{x}{v_2} + \frac{2h \sqrt{v_2^2 - v_1^2}}{v_1 v_2}$$

$$t = \frac{x}{v_2} + t_i$$

$$x_{\text{cross}} = 2h \sqrt{\frac{v_2 + v_1}{v_2 - v_1}}$$



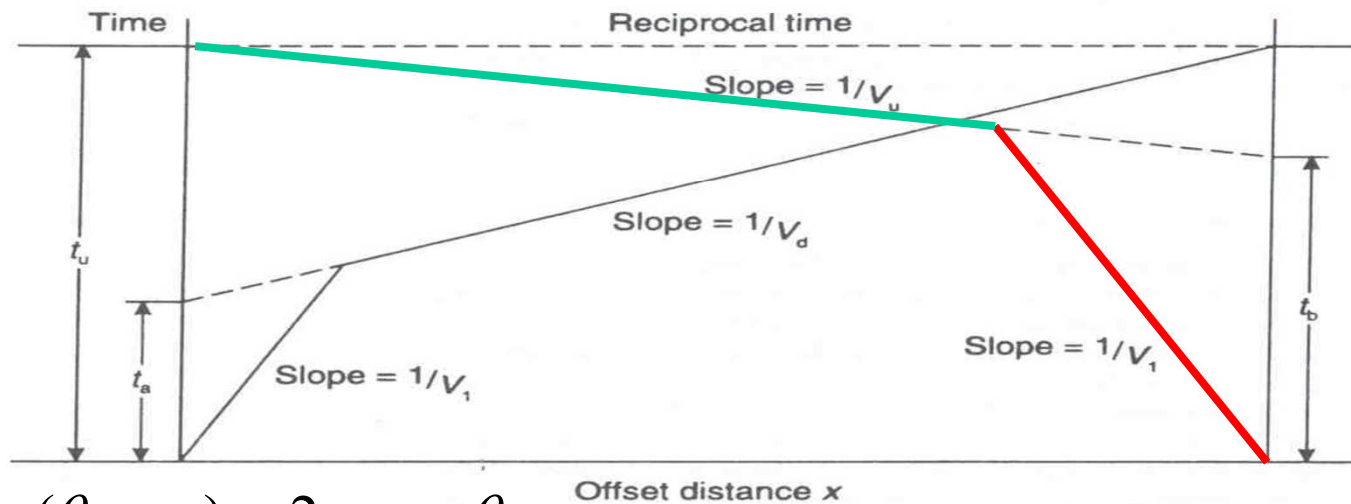
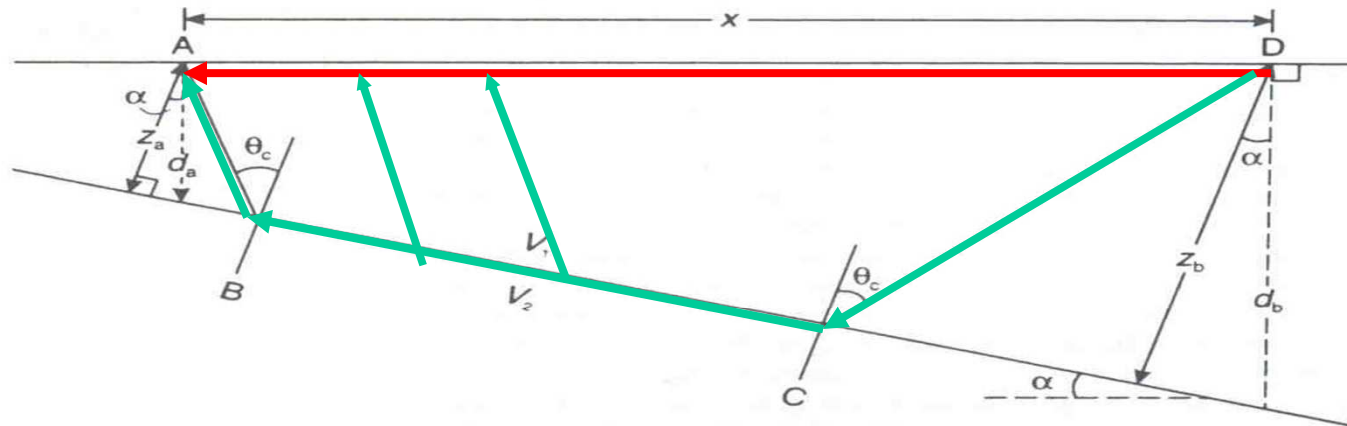


$$t_d = \frac{x \sin(\theta_c + \alpha)}{v_1} + \frac{2z_a \cos \theta_c}{v_1}$$

For small slopes ($\alpha < 10^\circ$):

$$t_u = \frac{x \sin(\theta_c - \alpha)}{v_1} + \frac{2z_b \cos \theta_c}{v_1}$$

$$v_2 \approx \frac{v_d + v_u}{2}$$



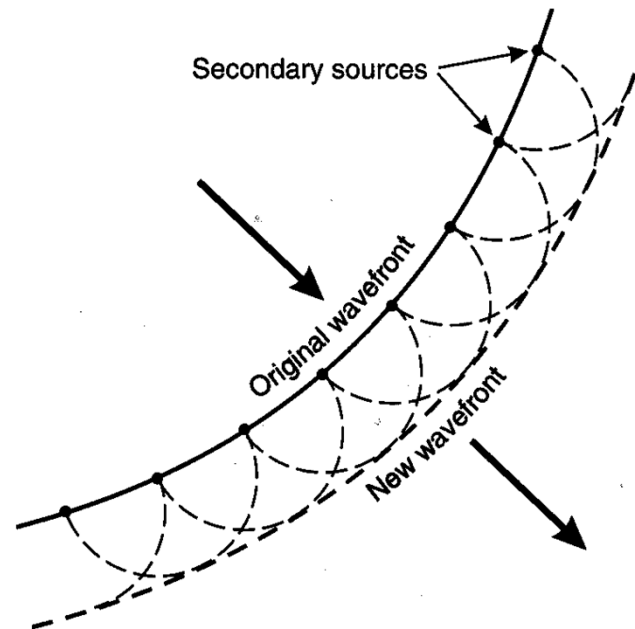
$$t_d = \frac{x \sin(\theta_c + \alpha)}{v_1} + \frac{2z_a \cos \theta_c}{v_1}$$

For small slopes ($\alpha < 10^\circ$):

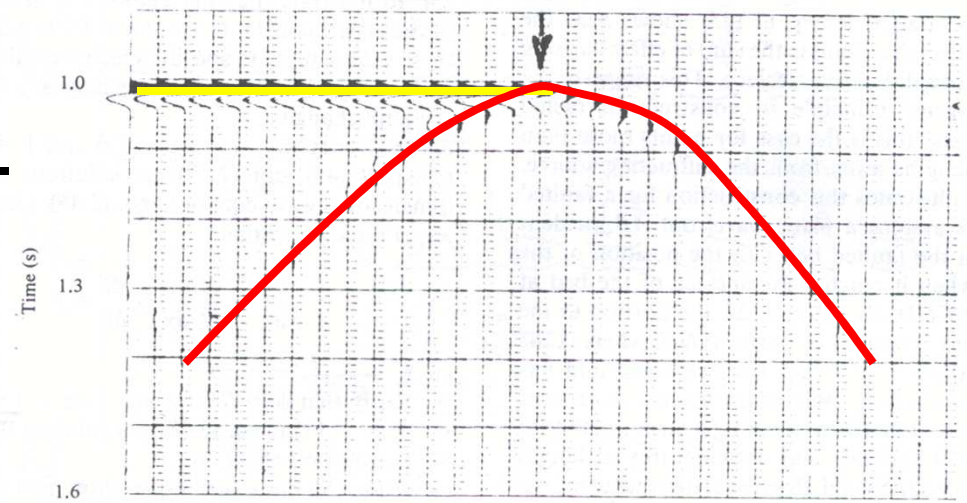
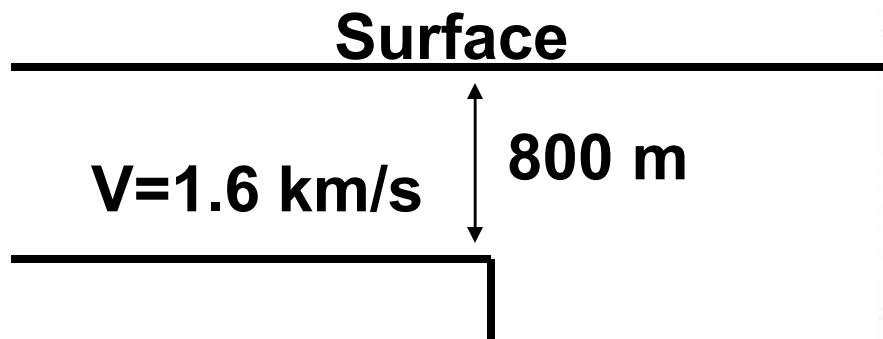
$$t_u = \frac{x \sin(\theta_c - \alpha)}{v_1} + \frac{2z_b \cos \theta_c}{v_1}$$

$$v_2 \approx \frac{v_d + v_u}{2}$$

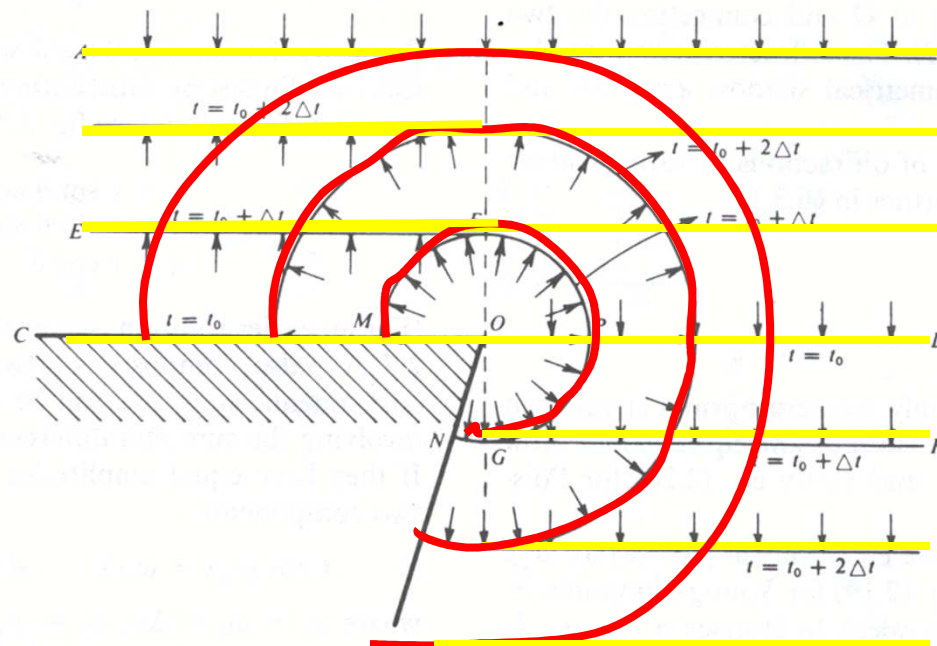
Huygens' Principle:



Every point on a wavefront can be considered as a secondary source of spherical waves

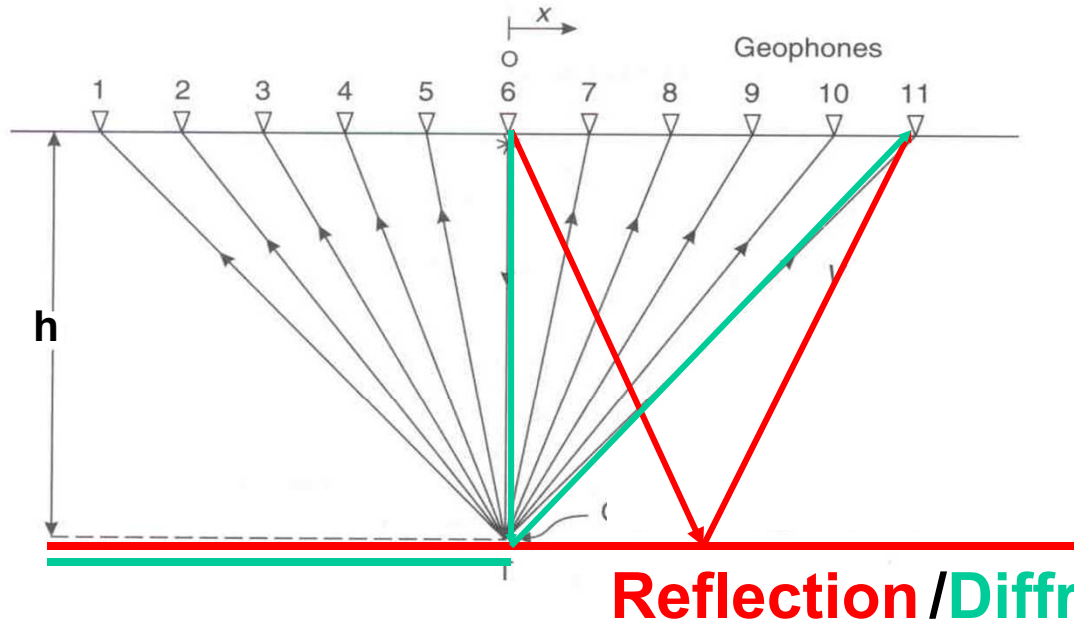


(b)



Reflection/Diffraction

(A)



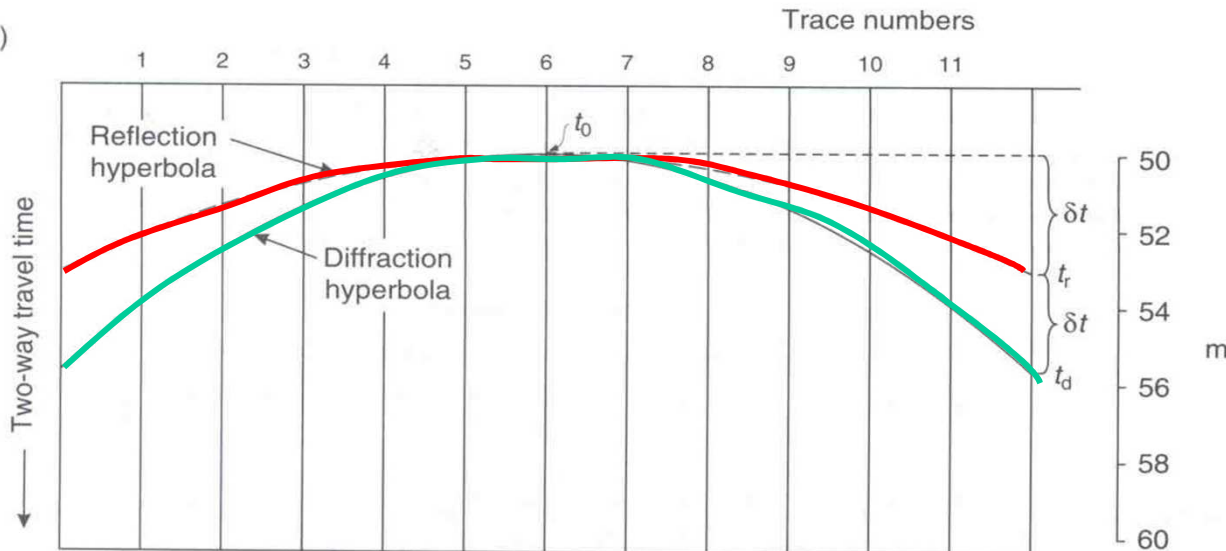
Reflection:

$$t_r \approx t_0 + \delta t$$

$$t_0 = 2h/v$$

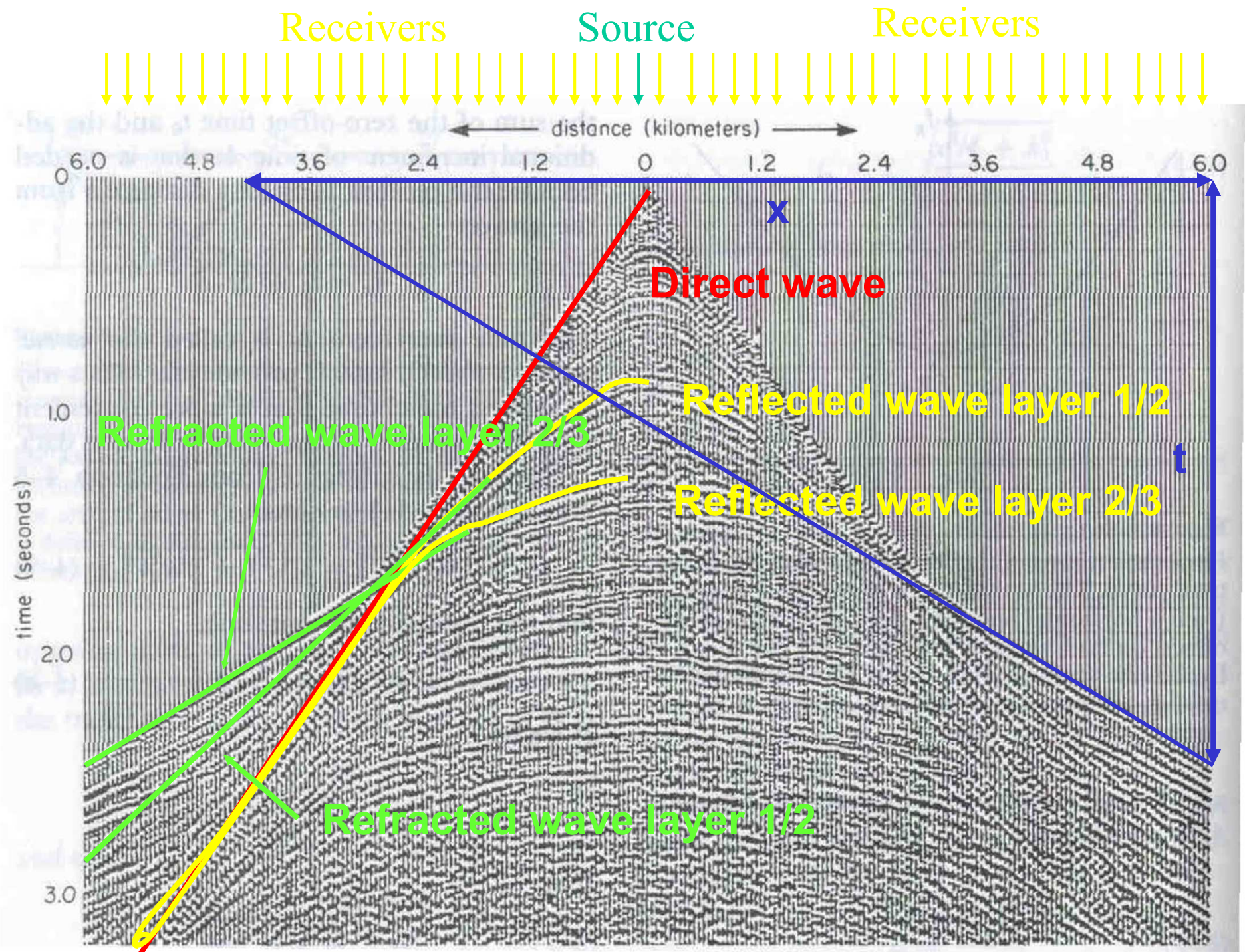
$$\delta t = x^2/(4vh)$$

(B)



Diffraction:

$$t_d \approx t_0 + 2\delta t$$



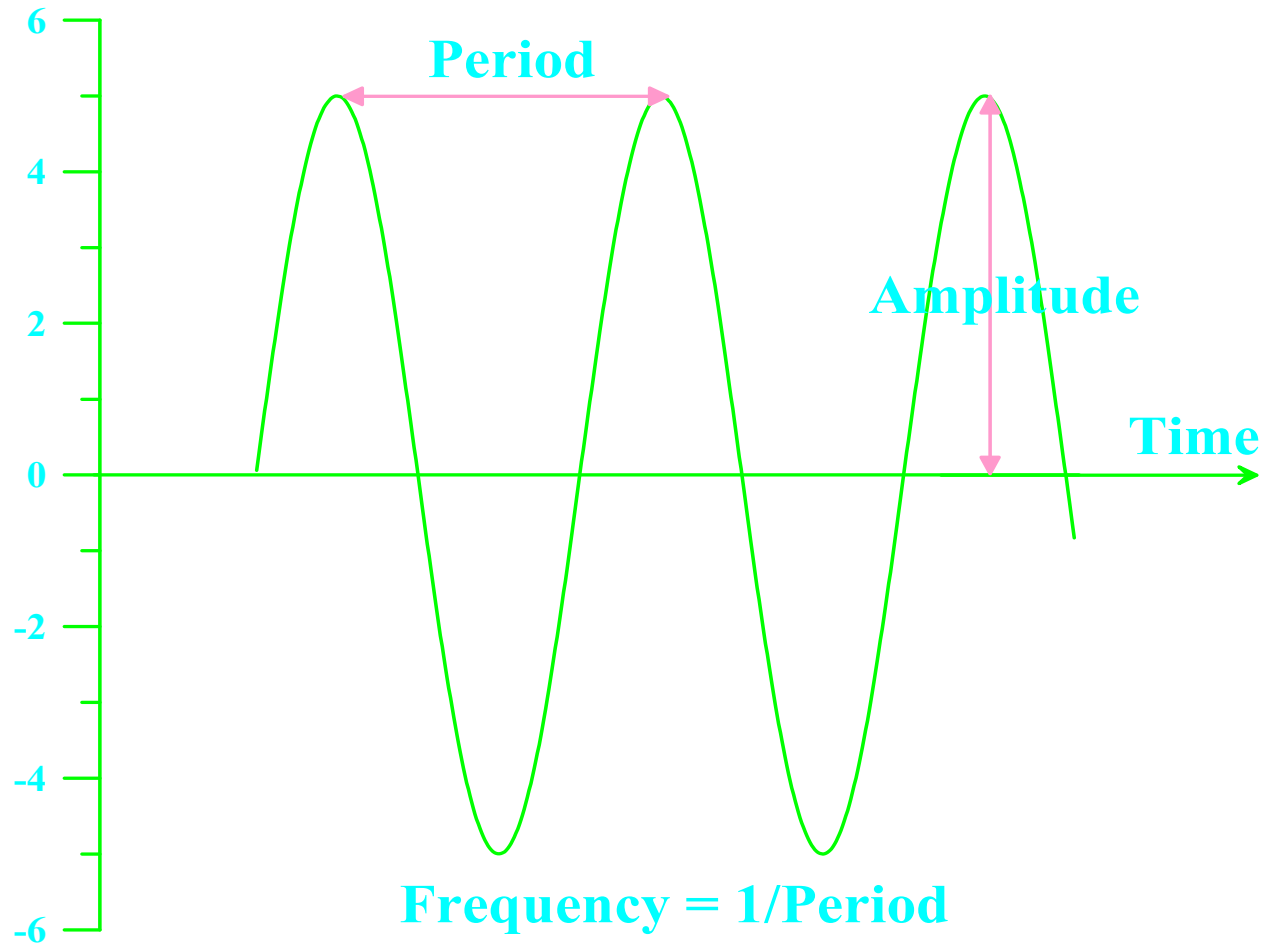
1D Fourier Transform

Theory and Practice

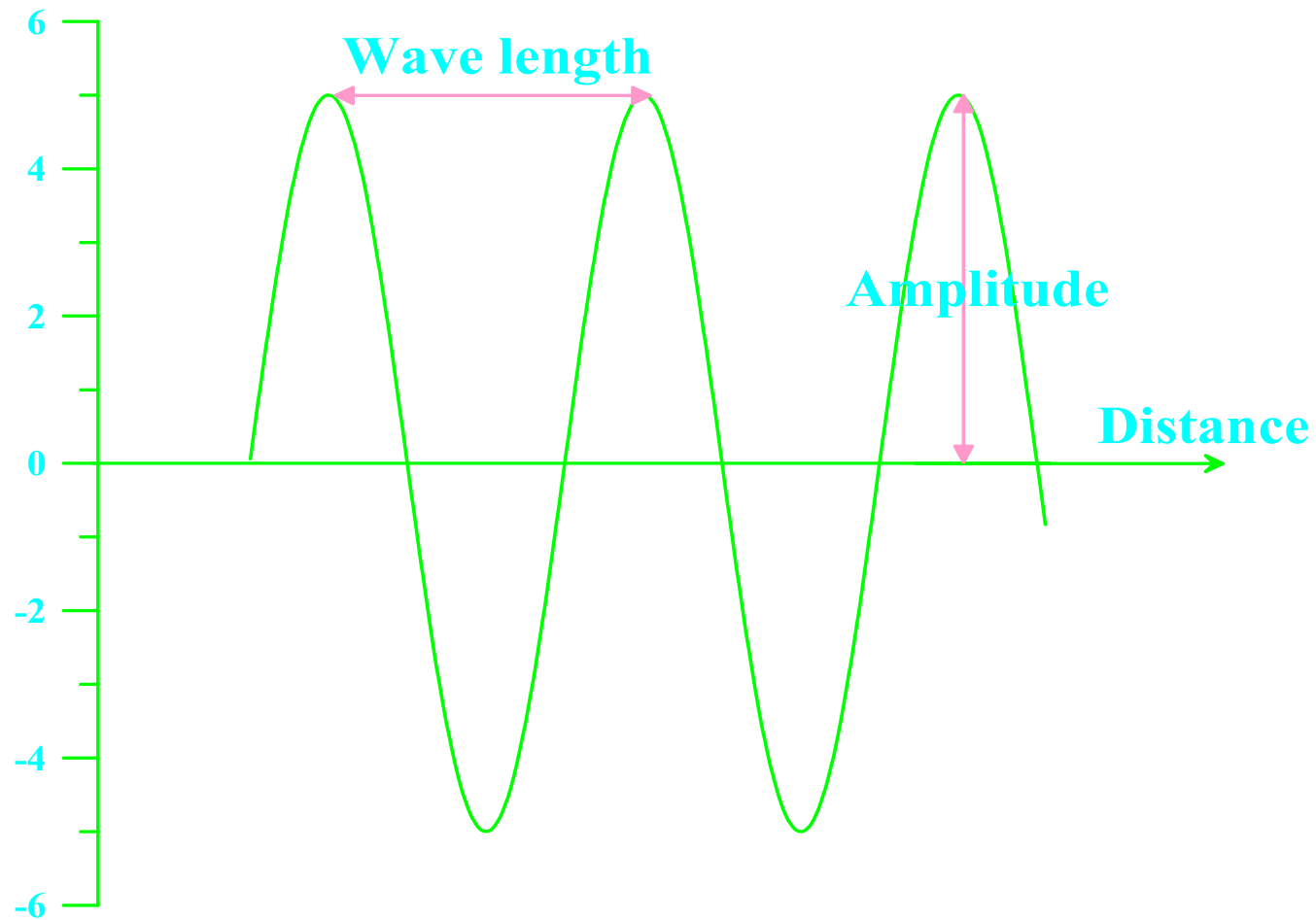
Simple Harmonic Motion

- A simple harmonic motion is fully described in time domain by its amplitude, frequency, and phase difference.
- A simple harmonic motion is fully described in space domain by its amplitude, wavelength, and phase shift.

A wave in time domain



A wave in space domain



The connection between time and space domains is

Velocity

$$Velocity = Frequency * Wave_Length$$

Simple Harmonic Motion

$$Y(t) = A \sin(2\pi\omega t)$$

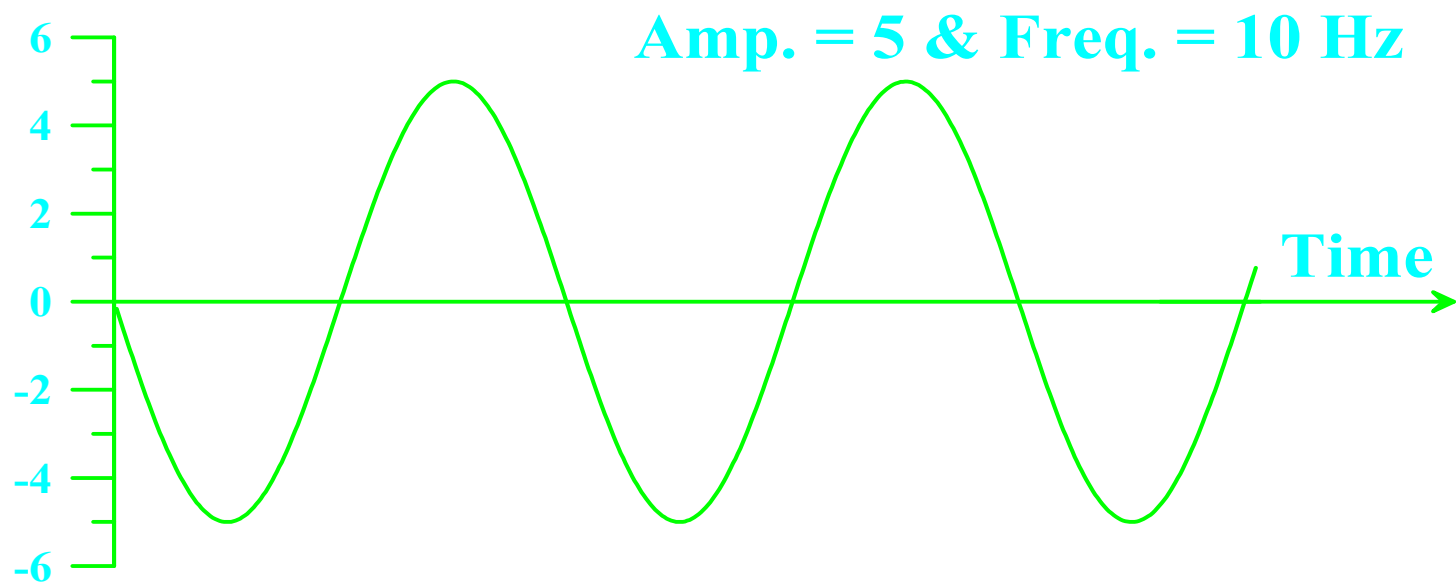
Where

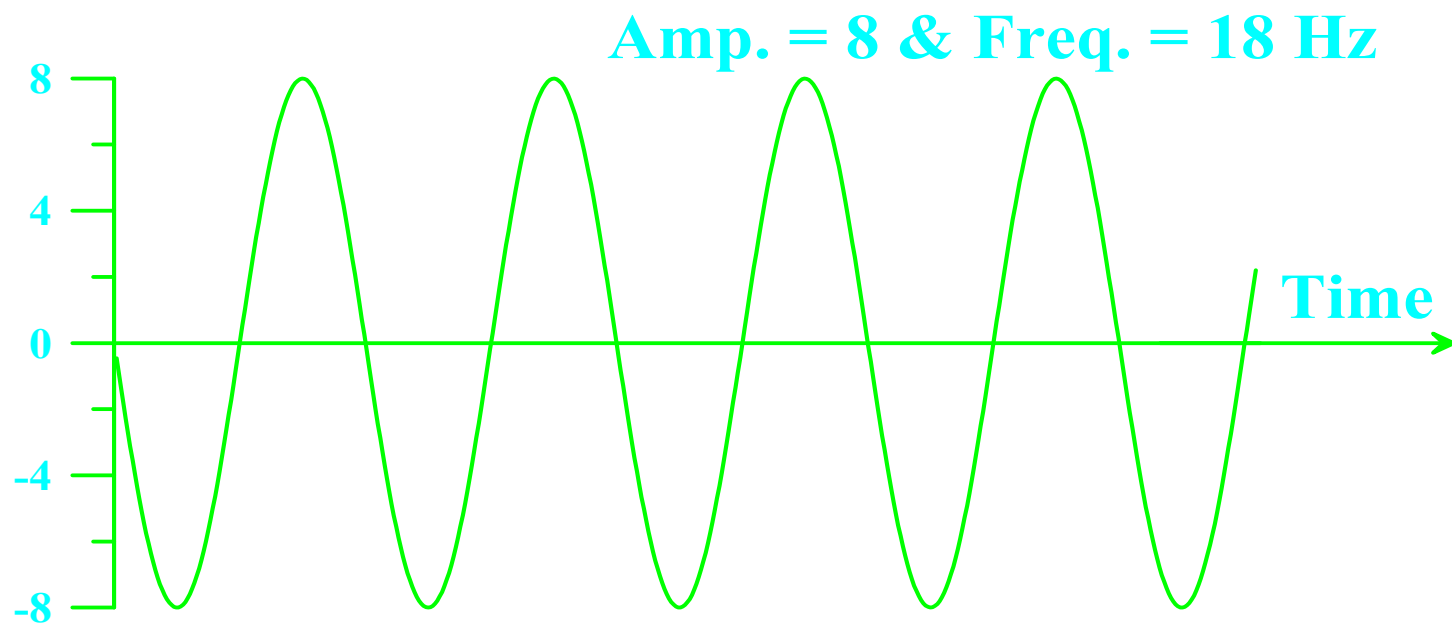
A is the amplitude

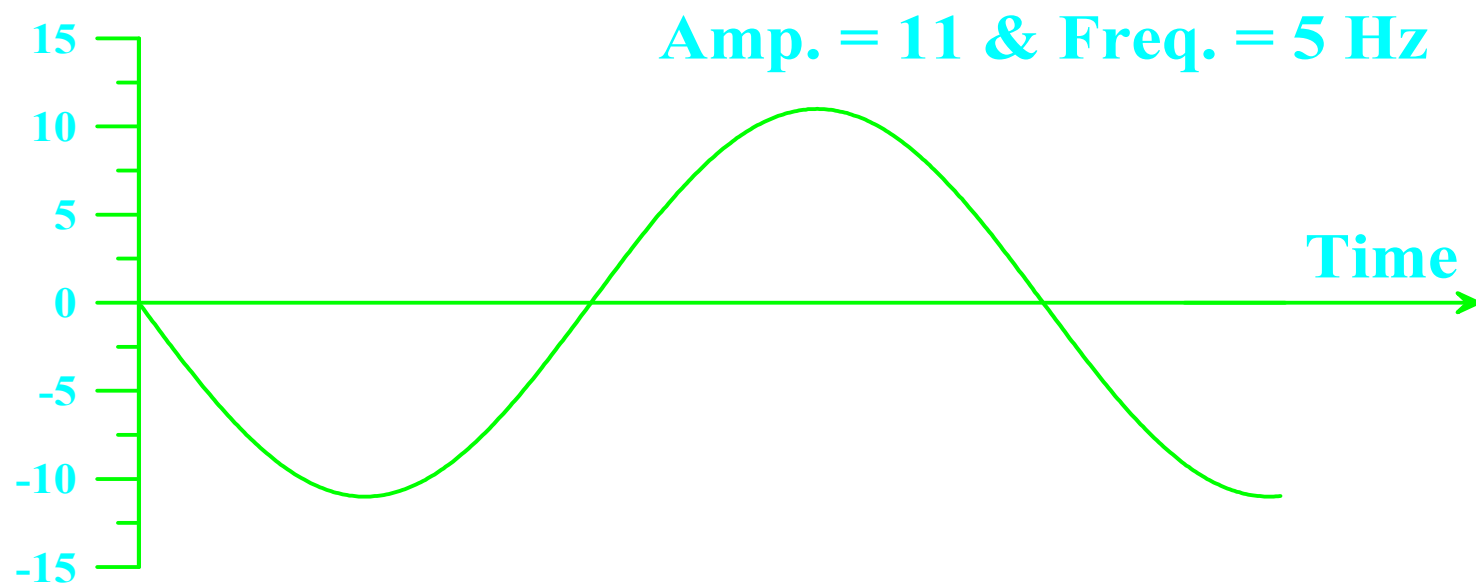
w is the angular frequency

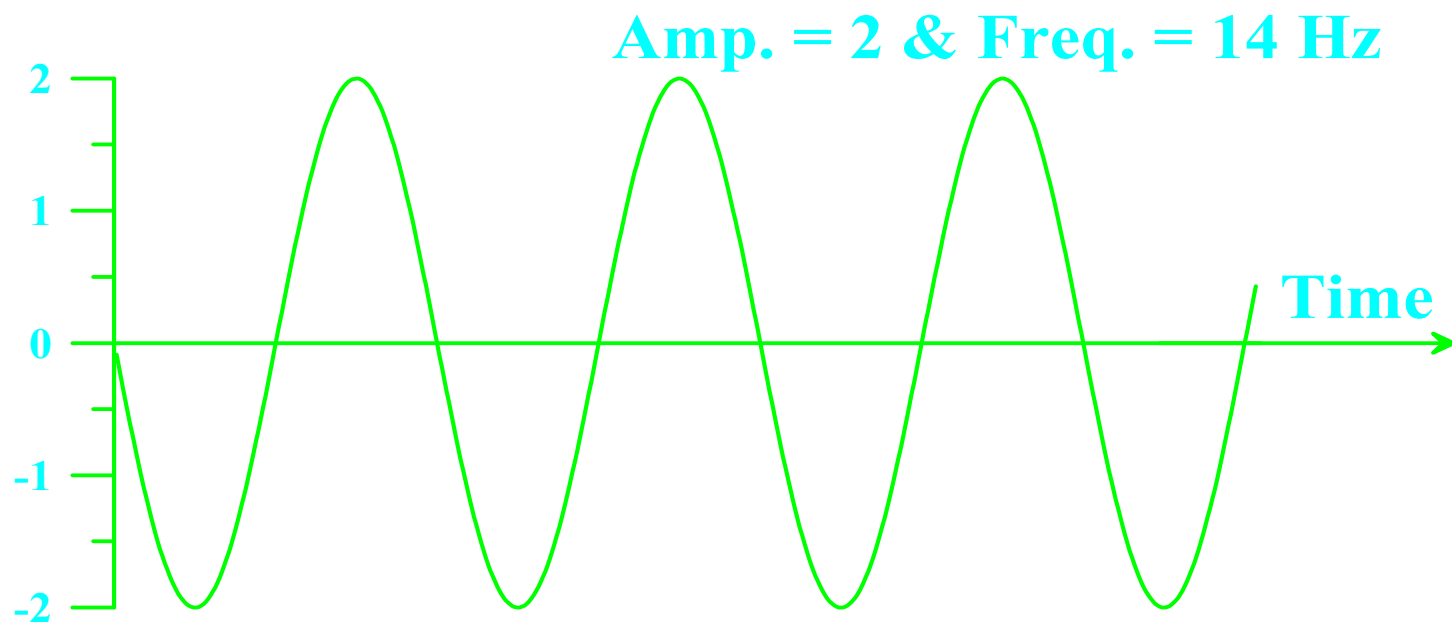
t is the time

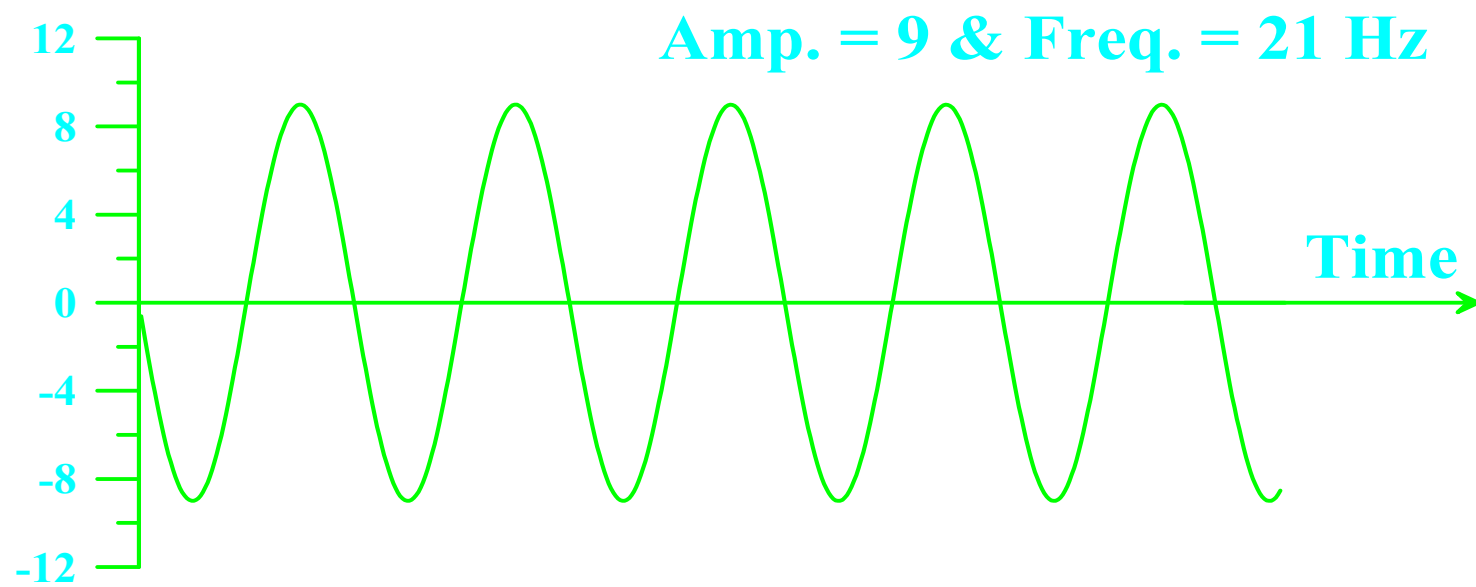
Consider the following simple harmonic motions



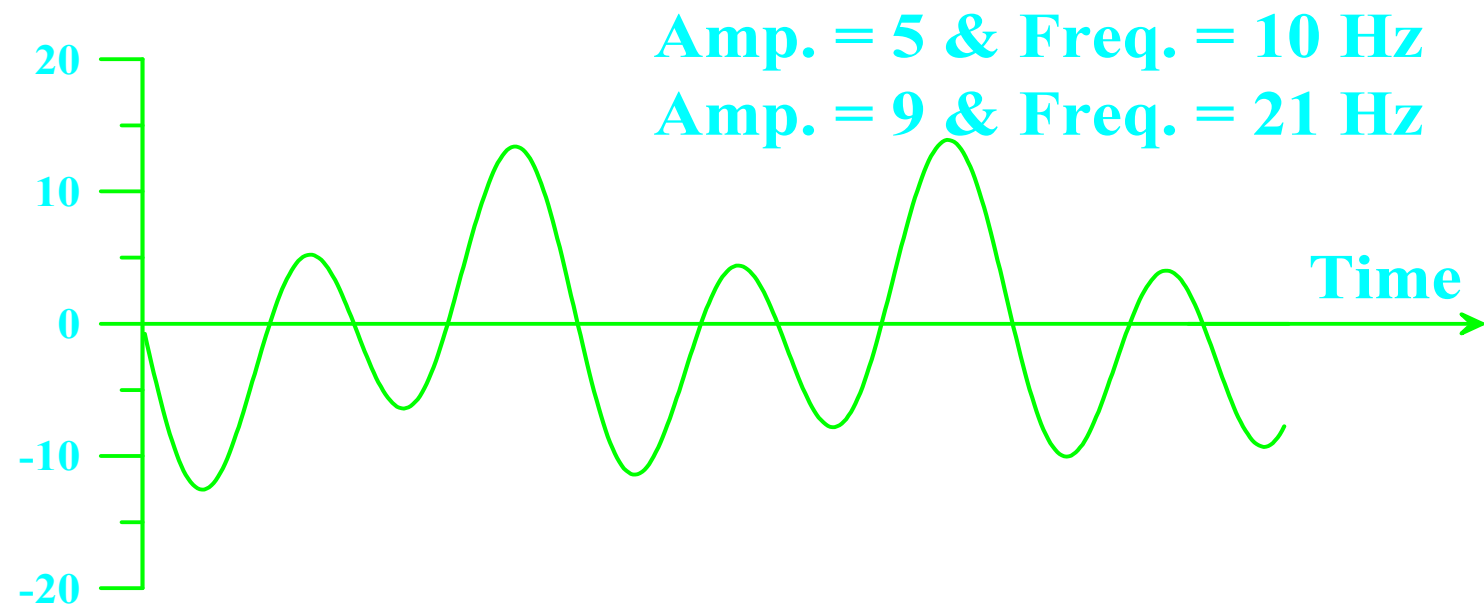


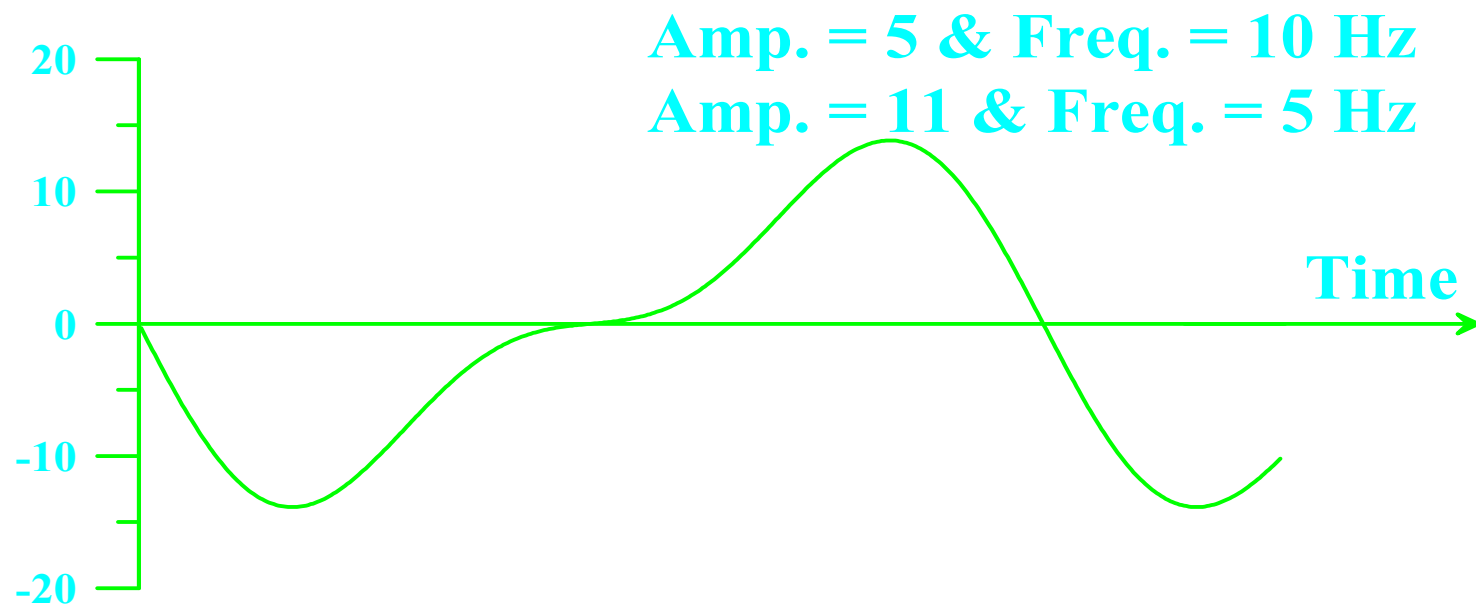


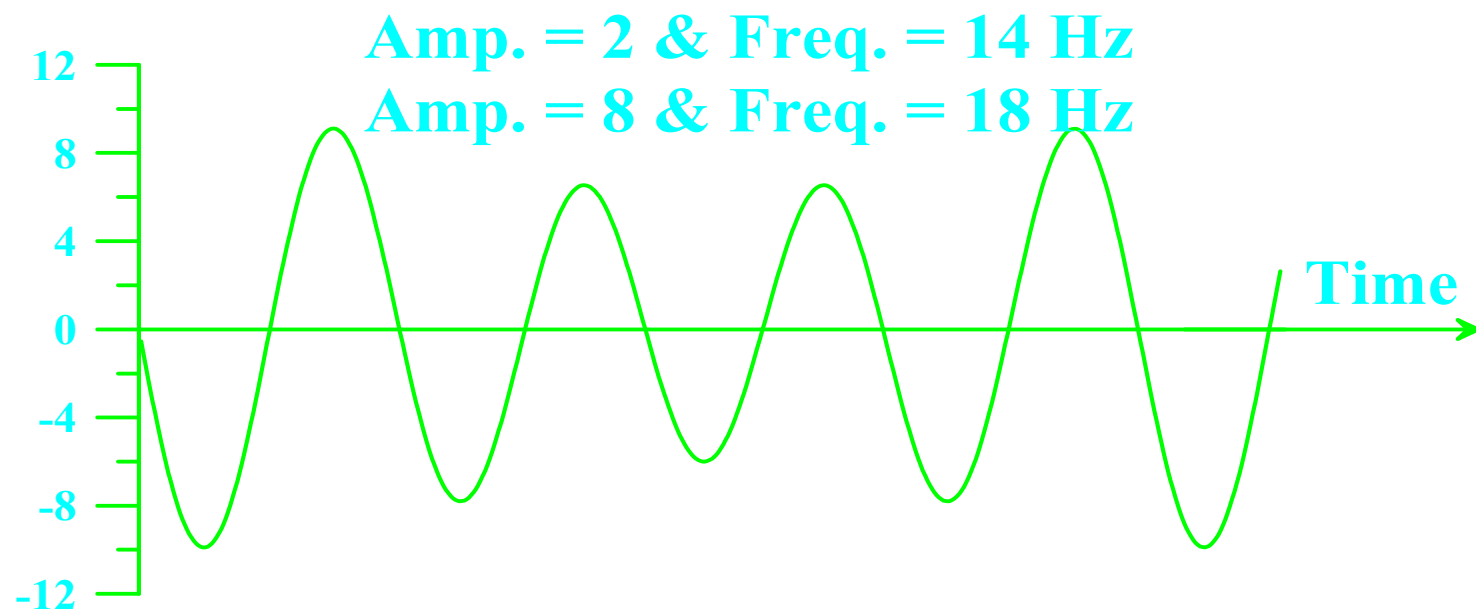


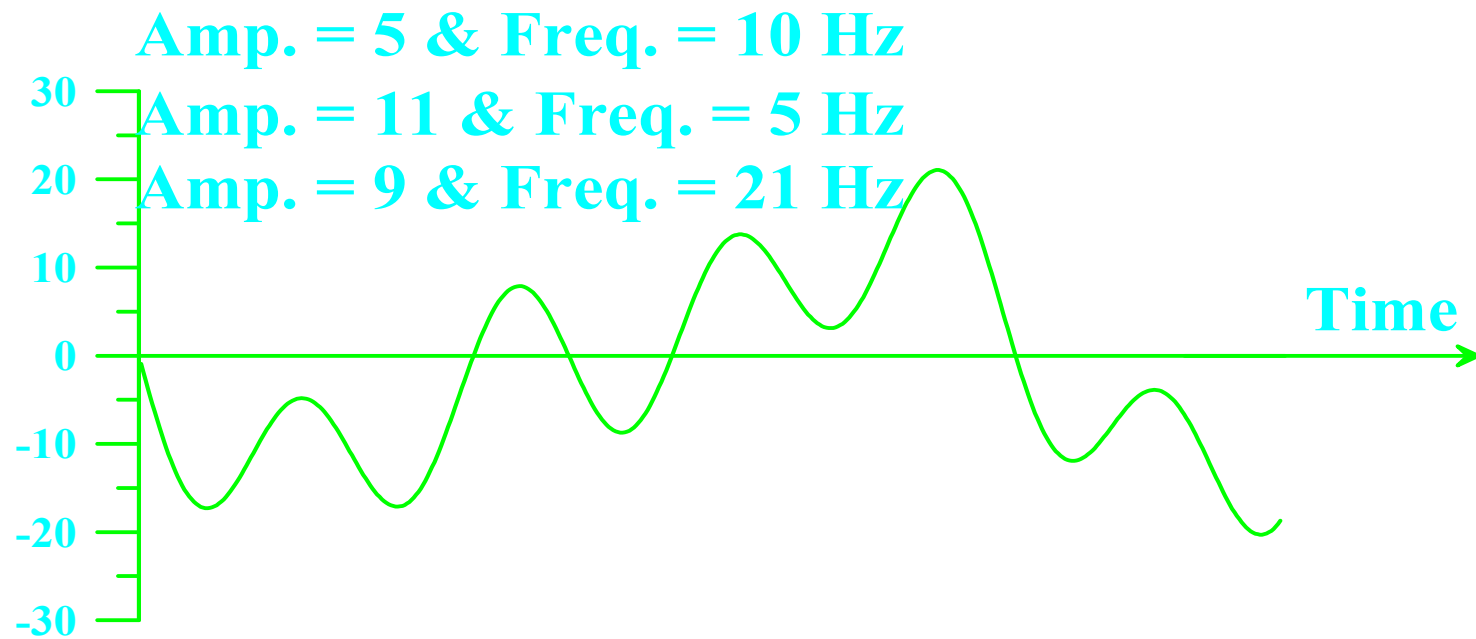


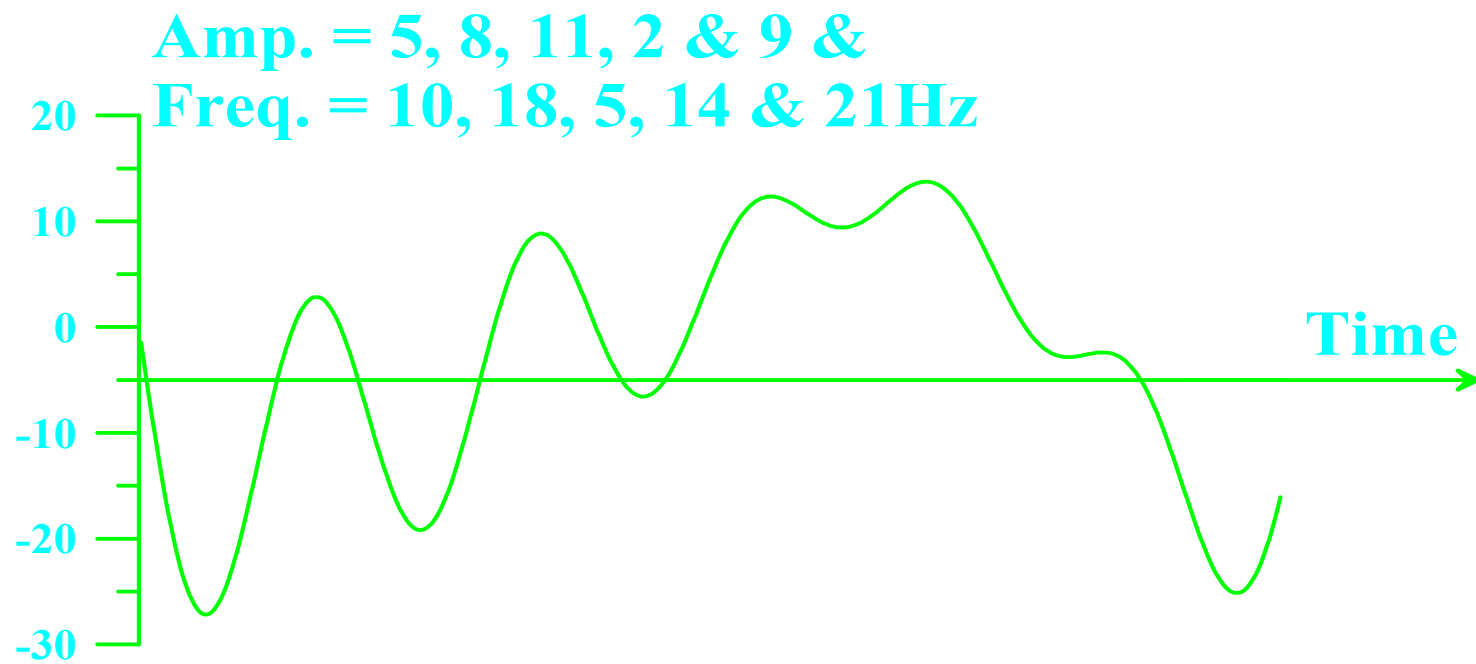
Adding some of these simple harmonic motions together will give us a more complex harmonic motions











If we have the sinusoidal wave in time domain,
could we know the frequencies making it?

Yes, using Fourier transform

What dose “transform” means?

Transform is taking a group of data as input to give another group of data as output. The output results can not be calculated unless all the input is available and used at once

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830),
a French mathematician and physicist said
that; “Any signal in the time domain is the
summation of a specific number of simple
sinusoidal waves”

Fourier Transform is given by :-

$$FT[h(t)] = H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-2i\pi ft} dt$$

Inverse Fourier Transform is given by :-

$$IFT[H(f)] = h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)e^{2i\pi ft} df$$

Discrete Fourier Transform

$$H(n_f) = \sum_{n_t=0}^{N_t-1} h(n_t) e^{-2i\pi n_t n_f / N_t}$$

Discrete Inverse Fourier Transform

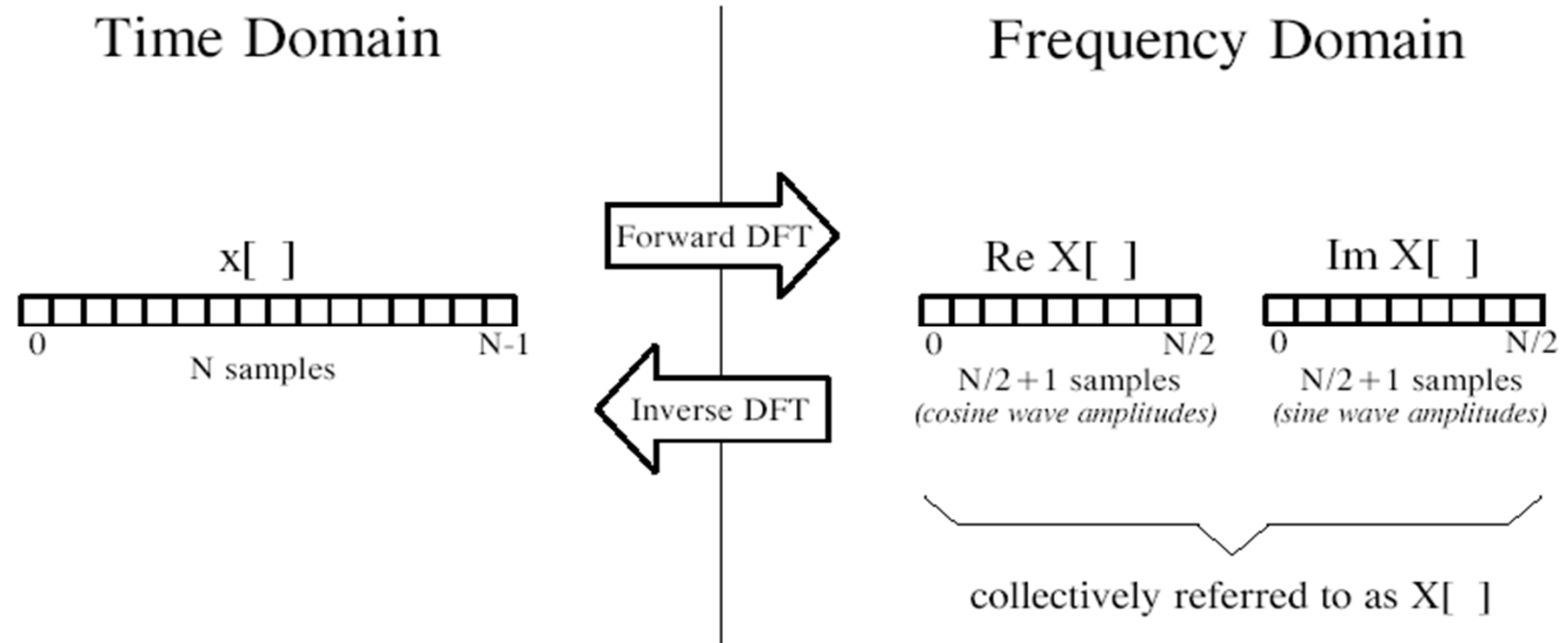
$$h(n_t) = \frac{1}{N} \sum_{n_f=0}^{N_t-1} H(n_f) e^{+2i\pi n_t n_f / N_t}$$

Note

$$\Delta f = \frac{1}{N_t \Delta t} \quad \Delta t = \frac{1}{N_f \Delta f}$$

$$e^{2i\pi ft} = \cos(2\pi ft) + i \sin(2\pi ft)$$

DFT

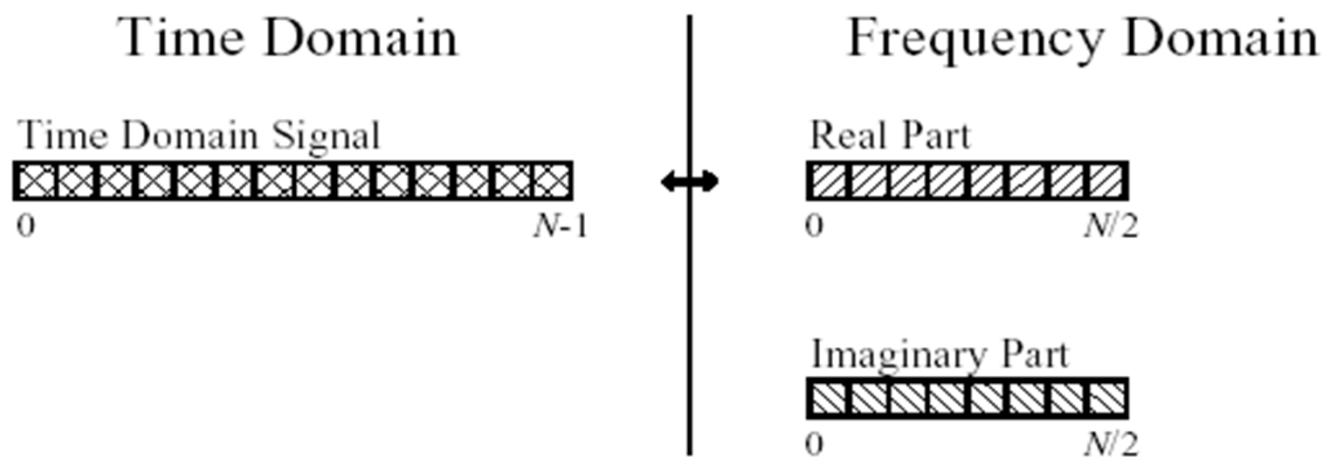


Fast Fourier Transform

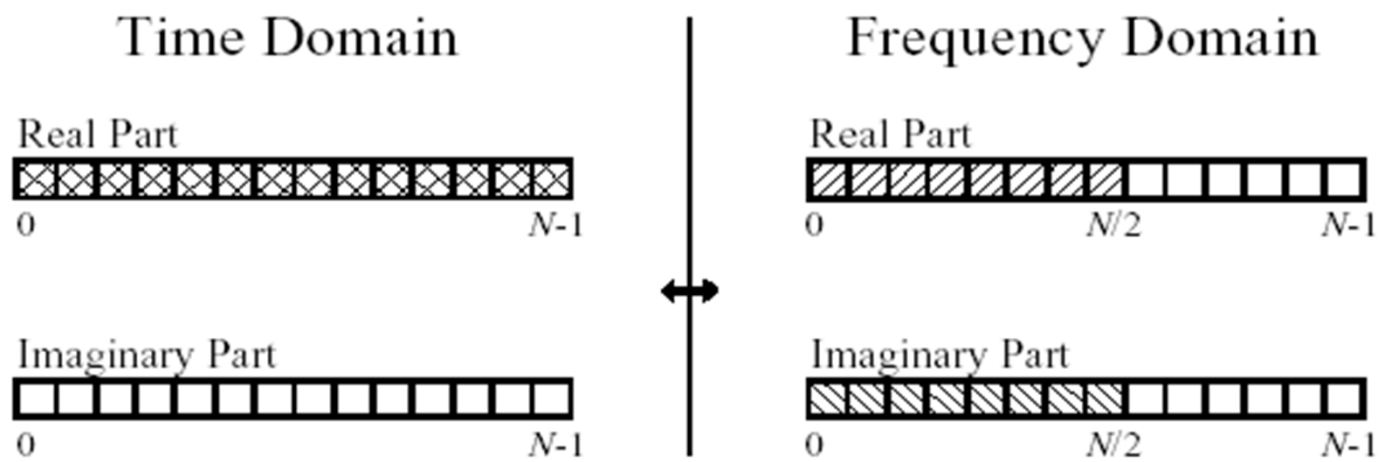
If number of data is $= 2^n$, where n is a positive integer number. Then we can use fast Fourier transform

FFT is incredibly more efficient, often reducing the computation time by *hundreds*

Real DFT

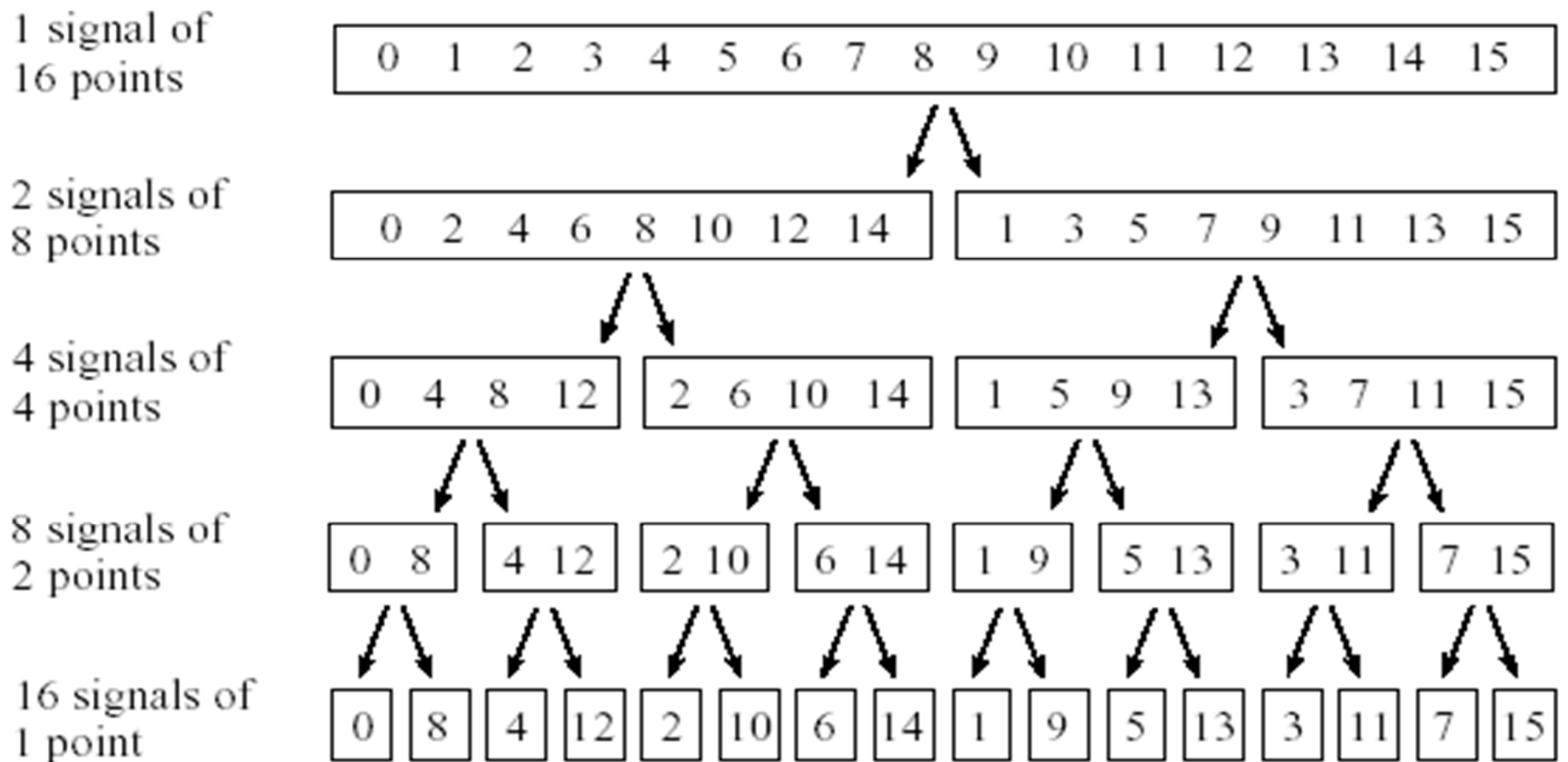


Complex DFT



Practical solution of FFT

1. Transform the 1 signal of N points into N signals of 1 point

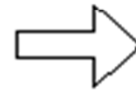


With the help of binary numbers, things are much easier

Sample numbers
in normal order

Decimal *Binary*

0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001
10	1010
11	1011
12	1100
13	1101
14	1110
15	1111



Sample numbers
after bit reversal

Decimal *Binary*

0	0000
8	1000
4	0100
12	1100
2	0010
10	1010
6	0100
14	1110
1	0001
9	1001
5	0101
13	1101
3	0011
11	1011
7	0111
15	1111

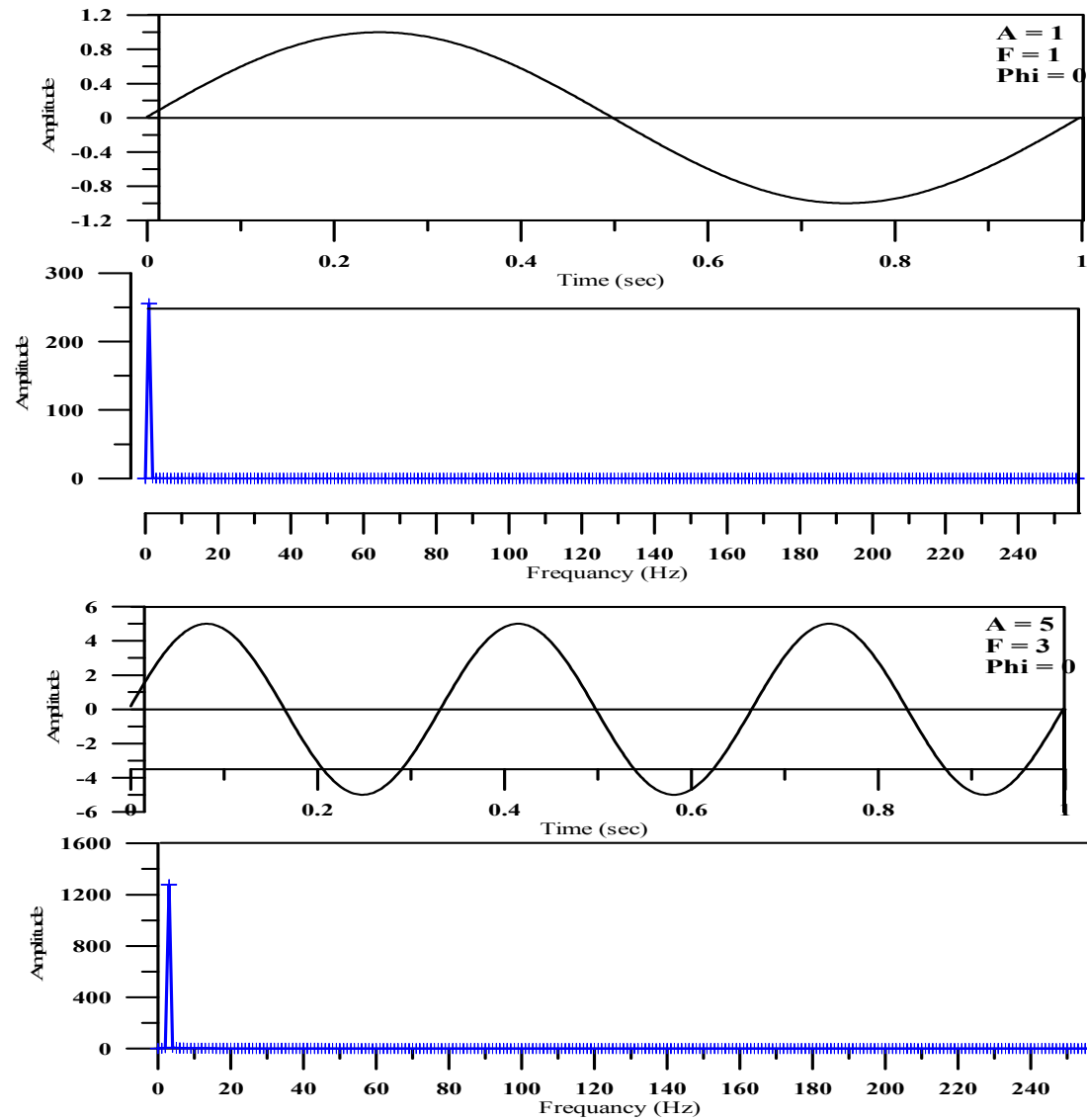
2. Find the frequency spectra of the 1 point time domain signals

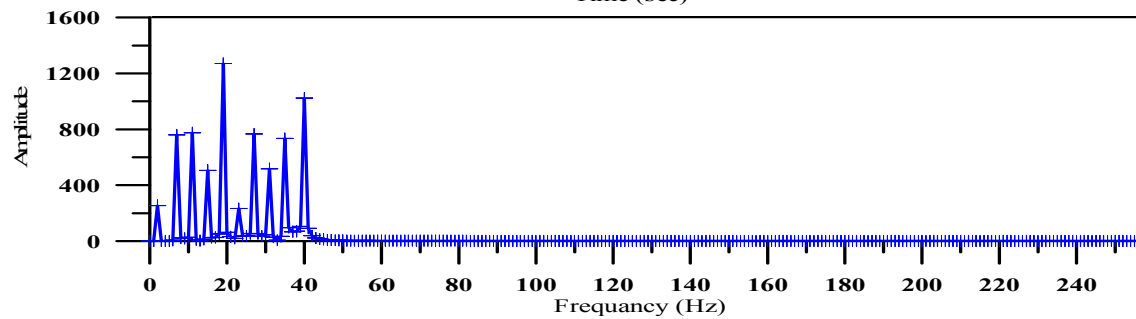
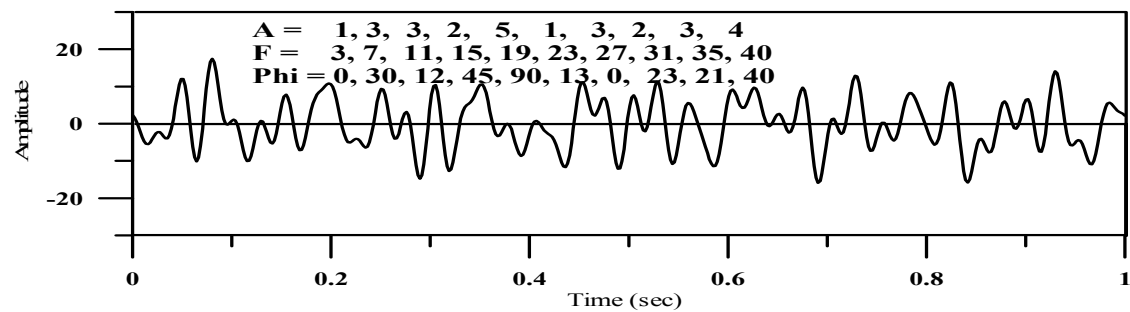
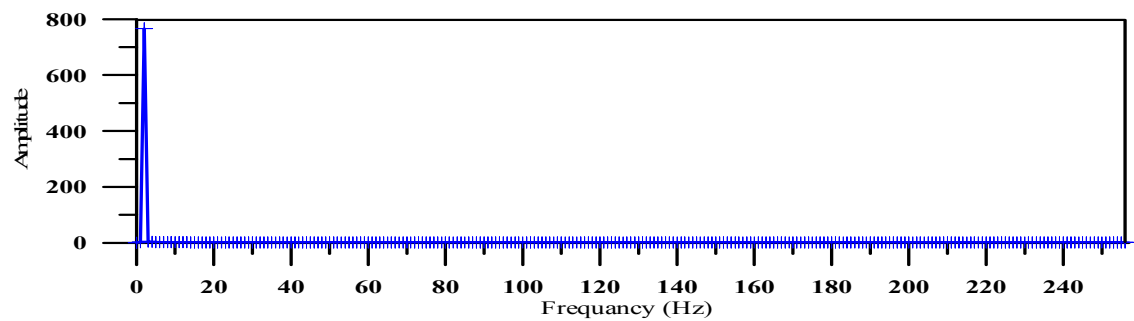
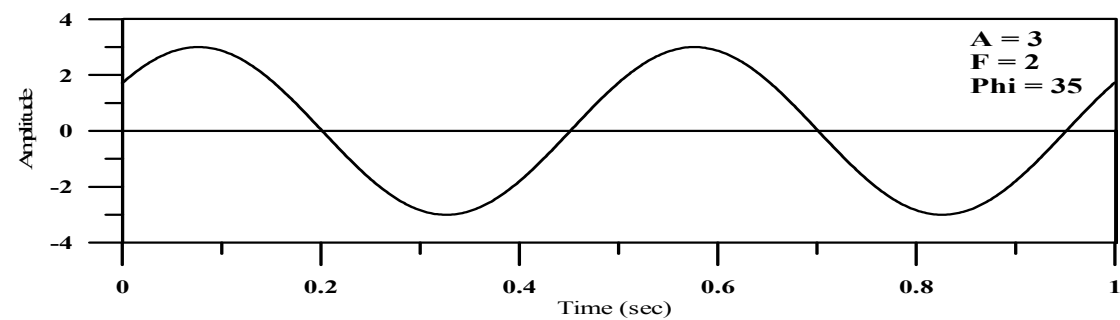
Nothing could be easier; the frequency spectrum of a 1 point signal is equal to *itself*

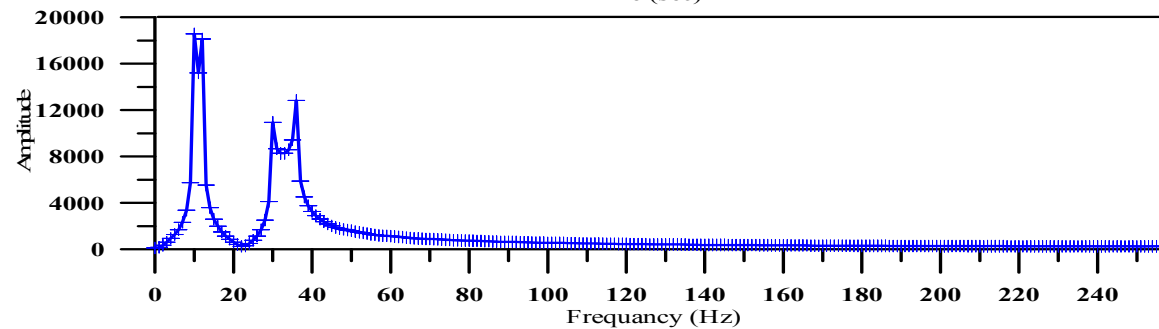
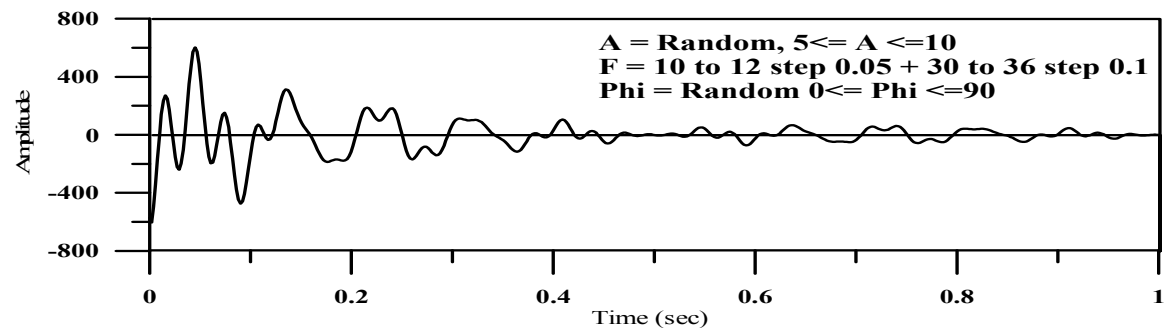
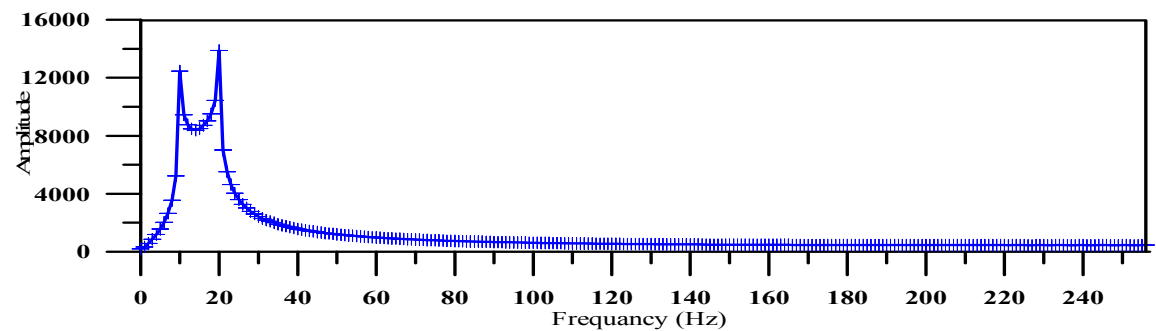
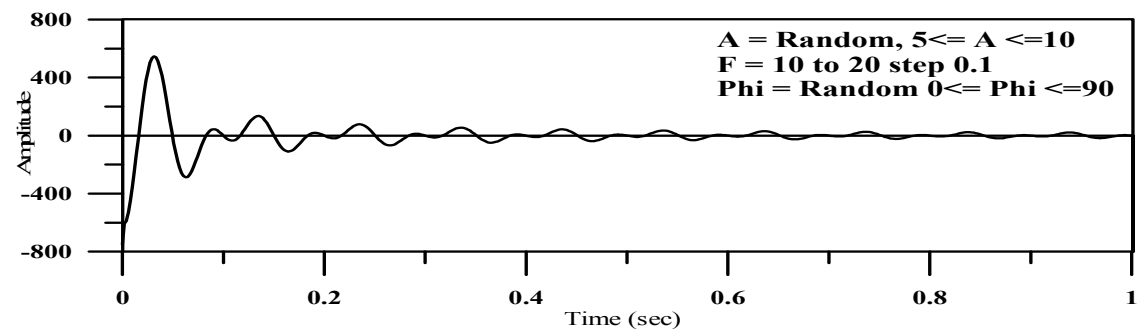
3. Combine the N frequency spectra in the exact reverse order that the time domain decomposition took place

Unfortunately, the bit reversal shortcut is not applicable, and we must go back one stage at a time. In the first stage, 16 frequency spectra (1 point each) are synthesized into 8 frequency spectra (2 points each). In the second stage, the 8 frequency spectra (2 points each) are synthesized into 4 frequency spectra (4 points each), and so on. The last stage results in the output of the FFT, a 16 point frequency spectrum

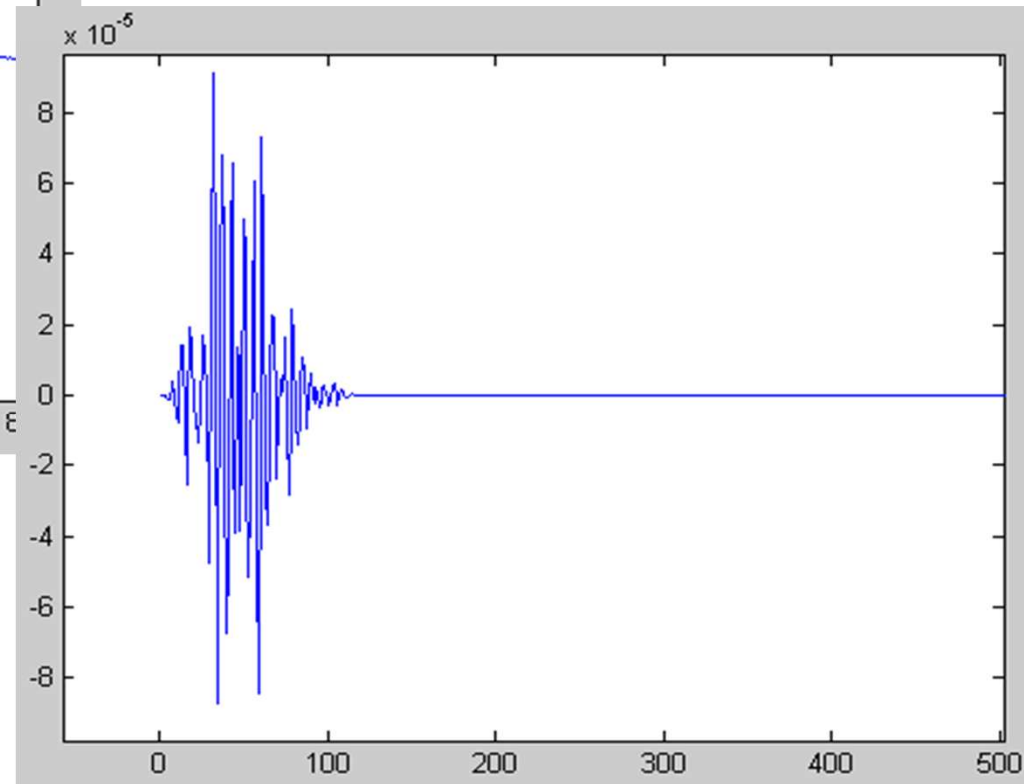
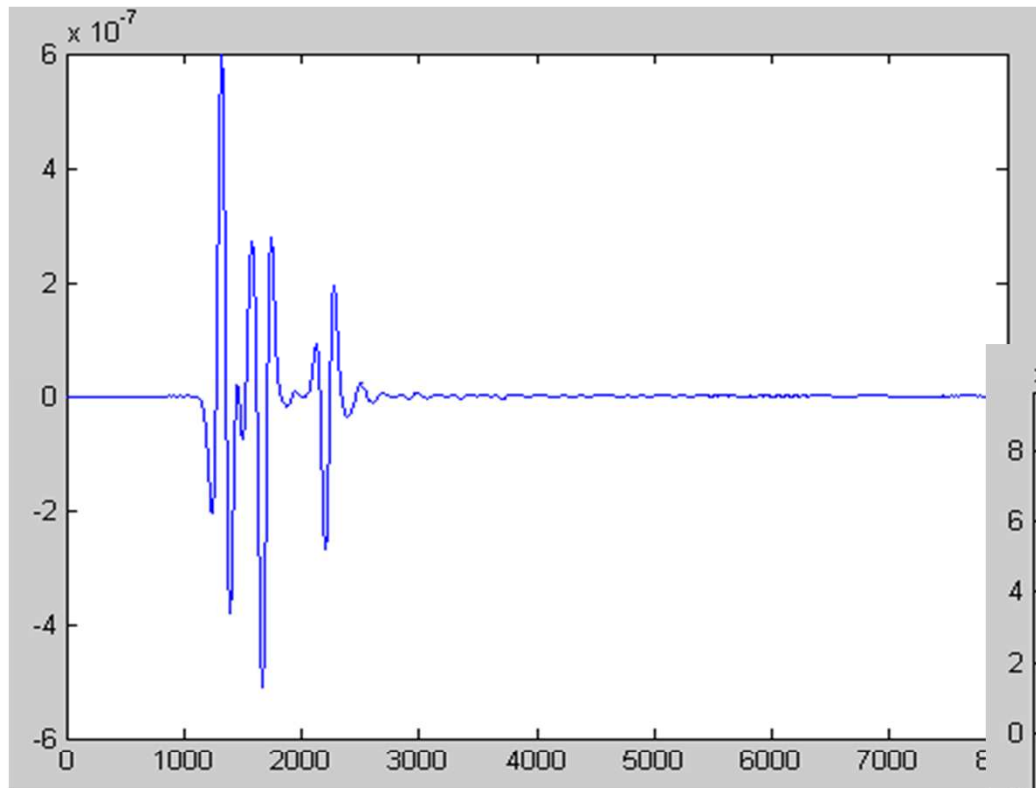
Synthetic Examples



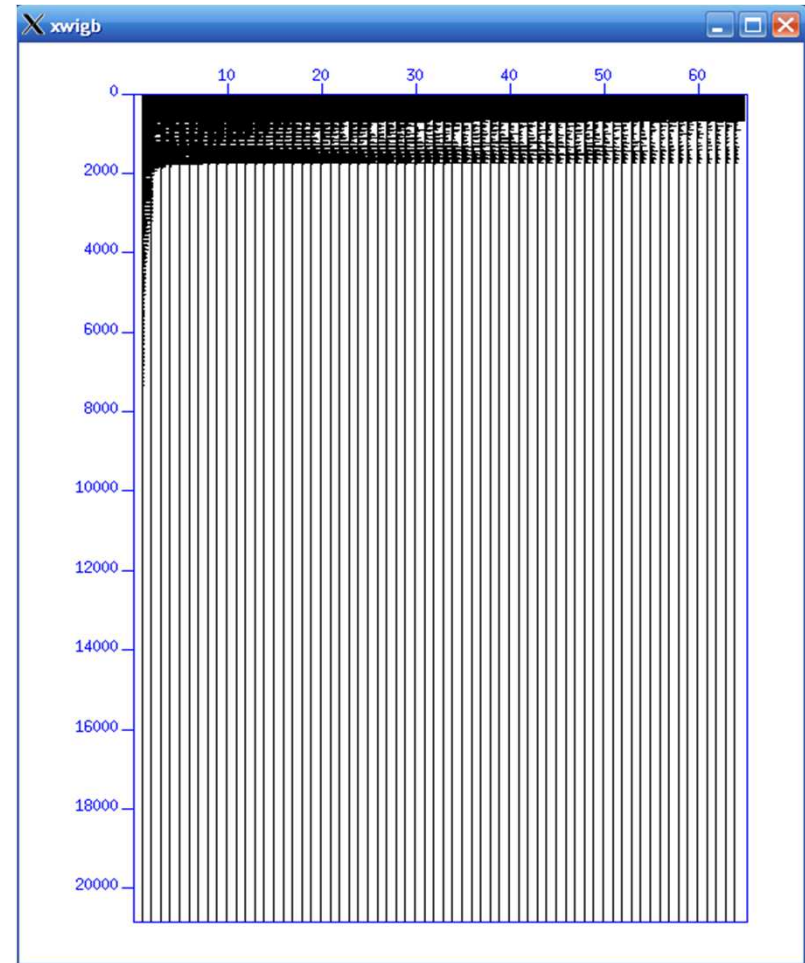
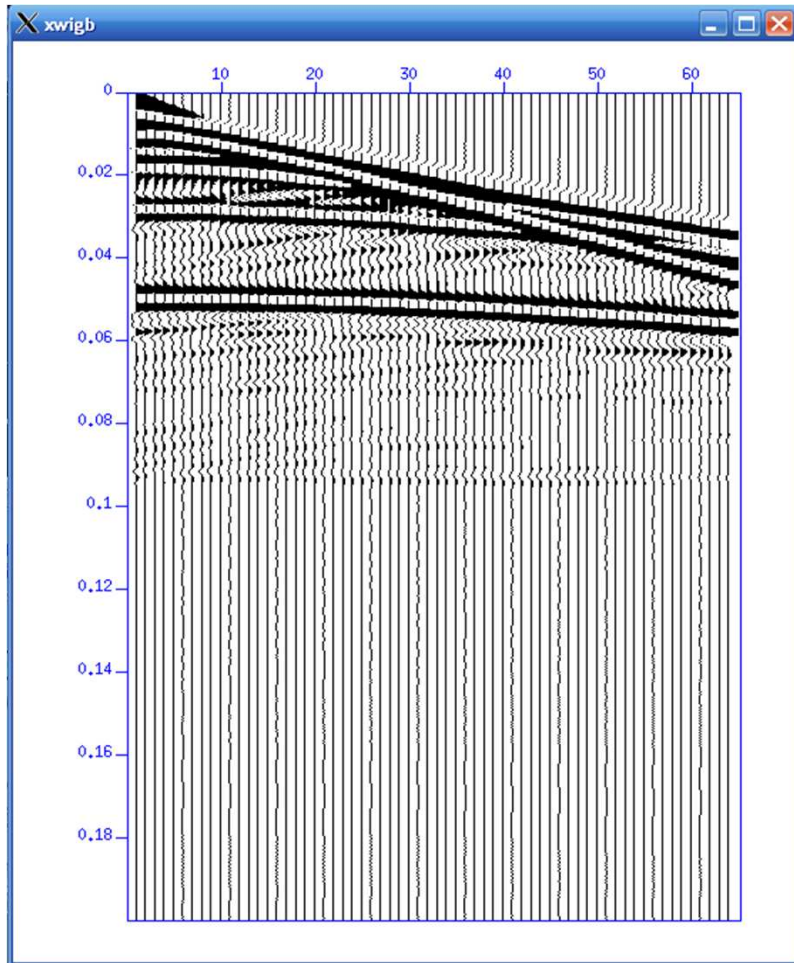




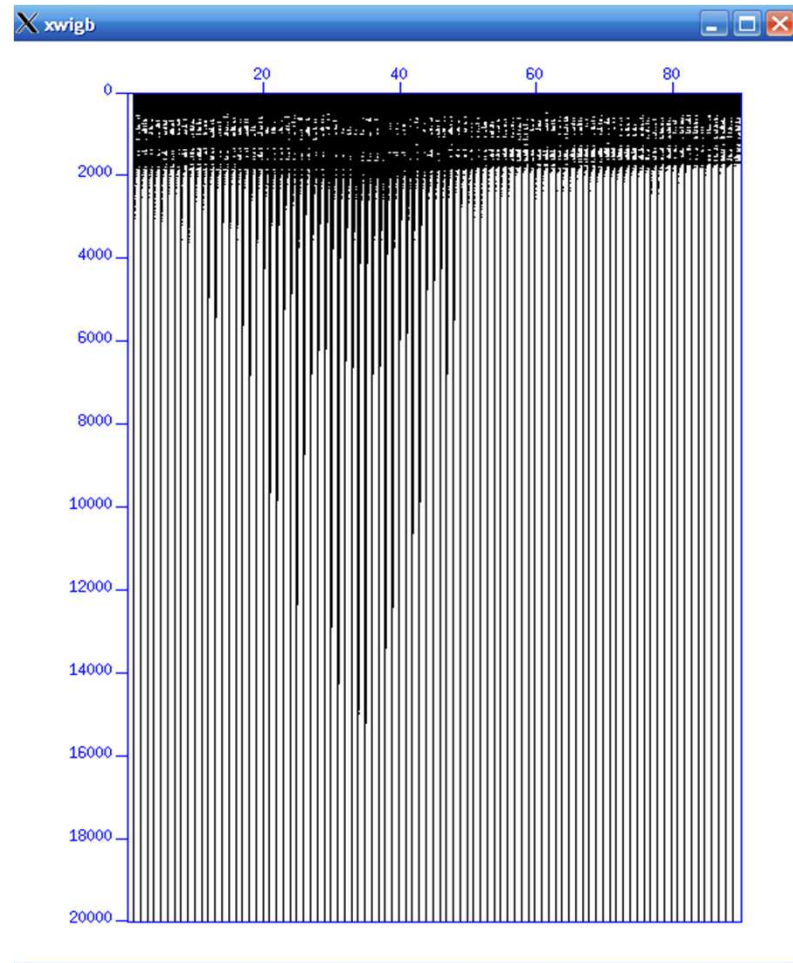
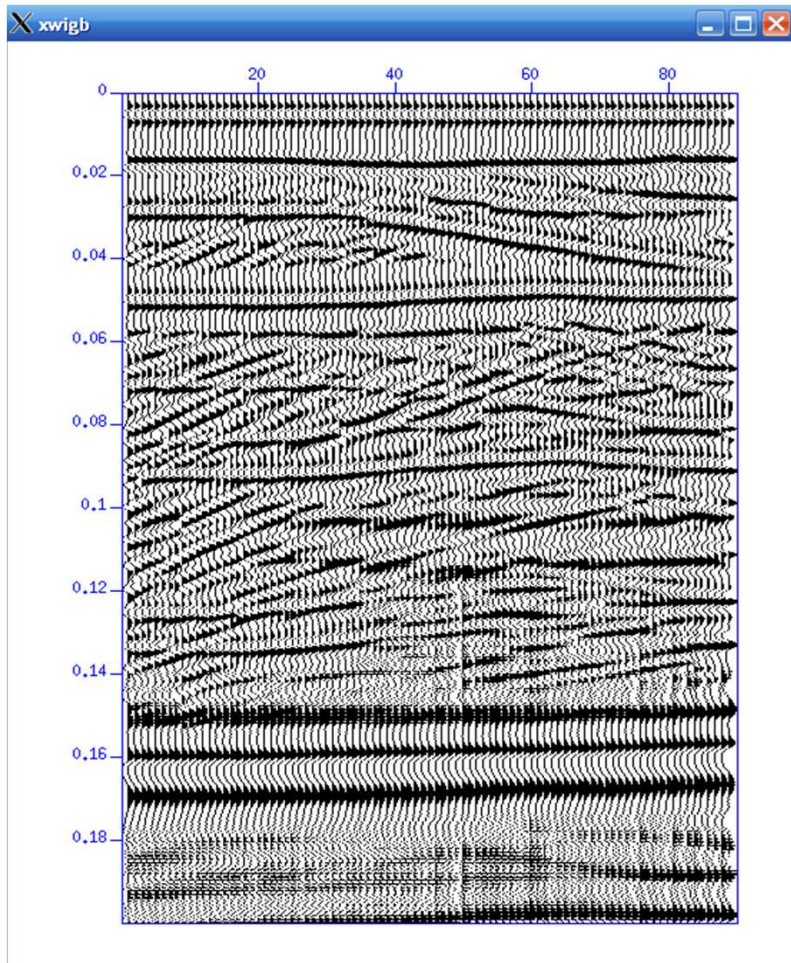
Real Examples



Real Examples



Real Examples



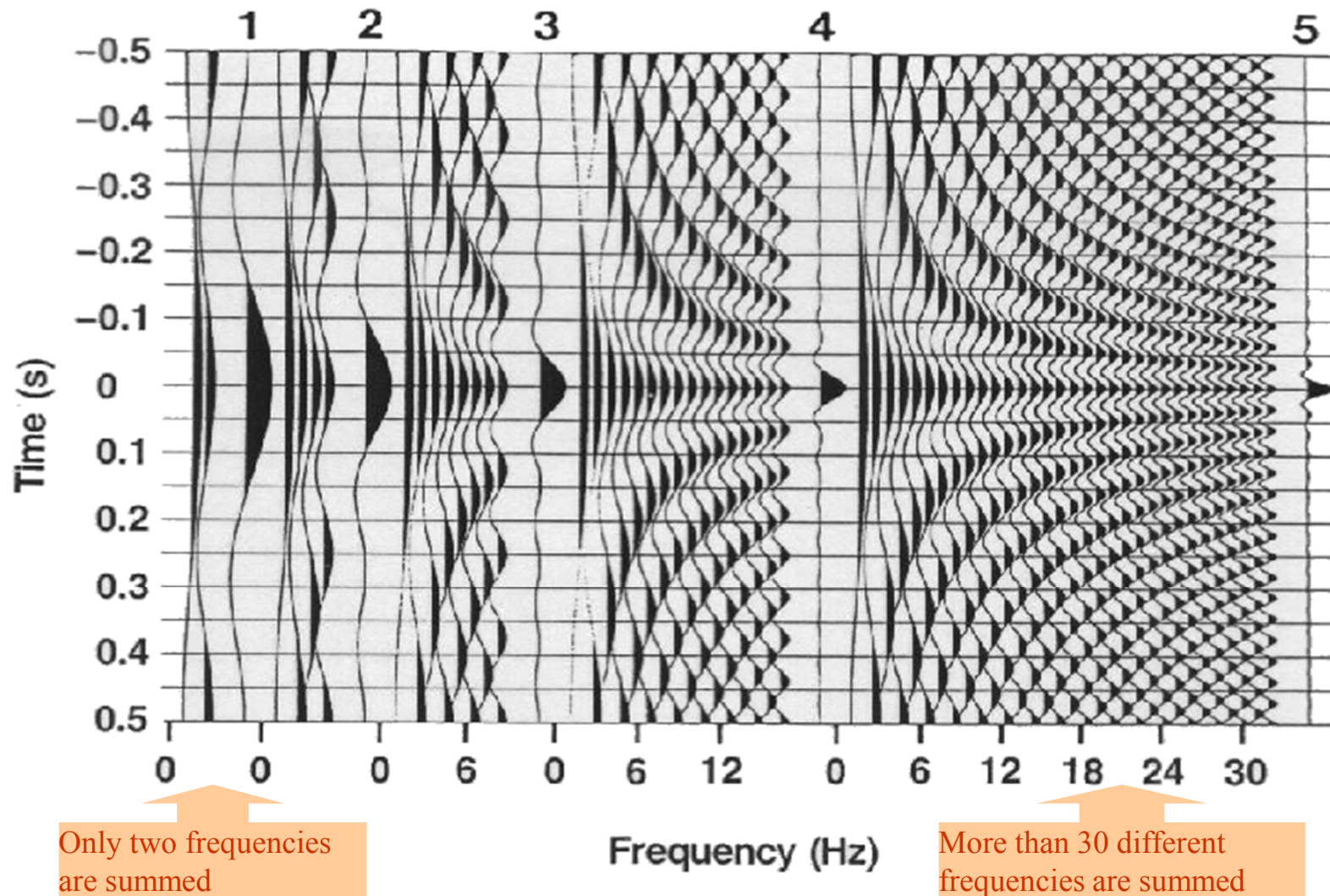
What would happen if;

We increasingly added to a time signal higher frequency components?

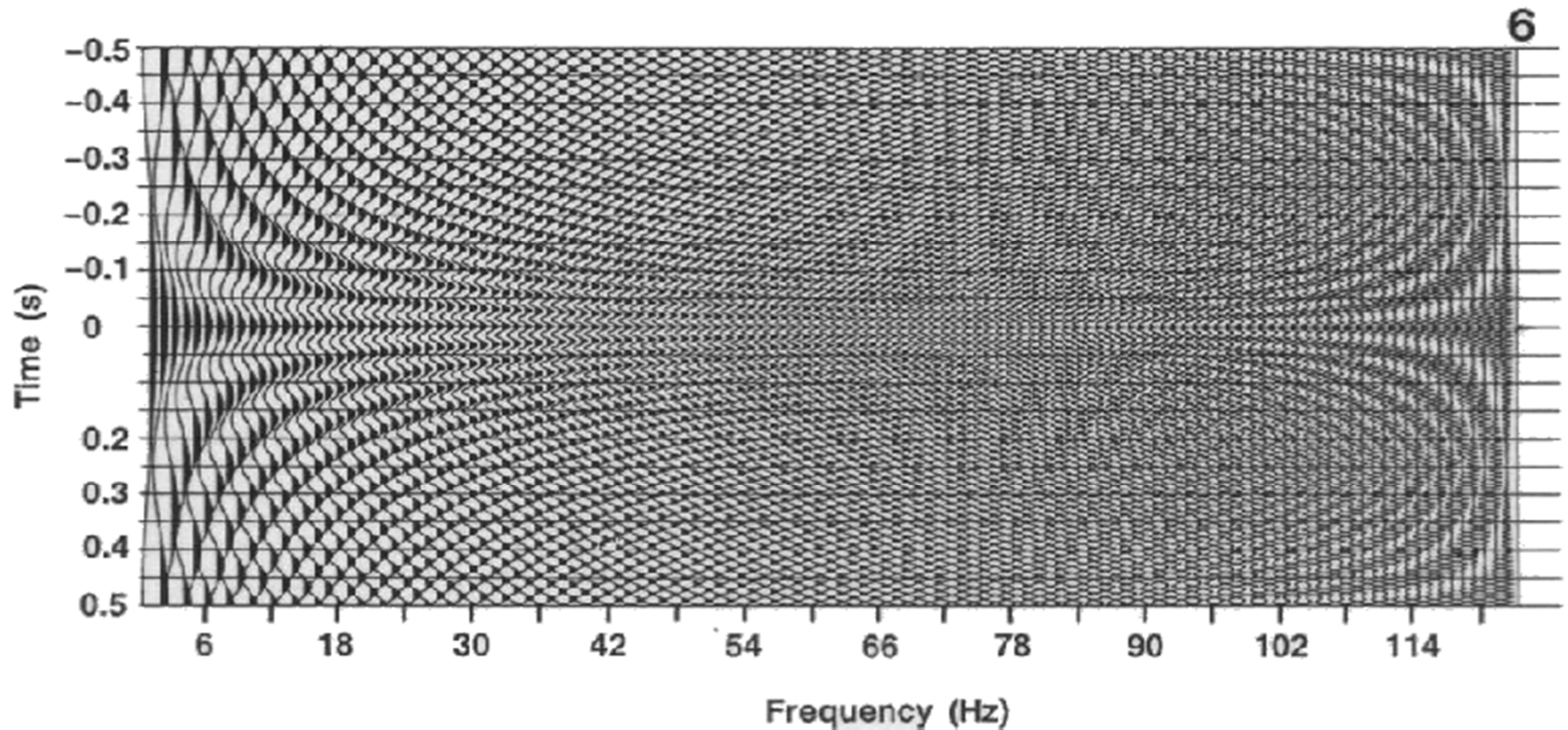
The resulted wavelet will be compressed, if all frequencies are added the result will be a spike.

With increasing the frequencies summed to the signal; resulted trace is compressed.

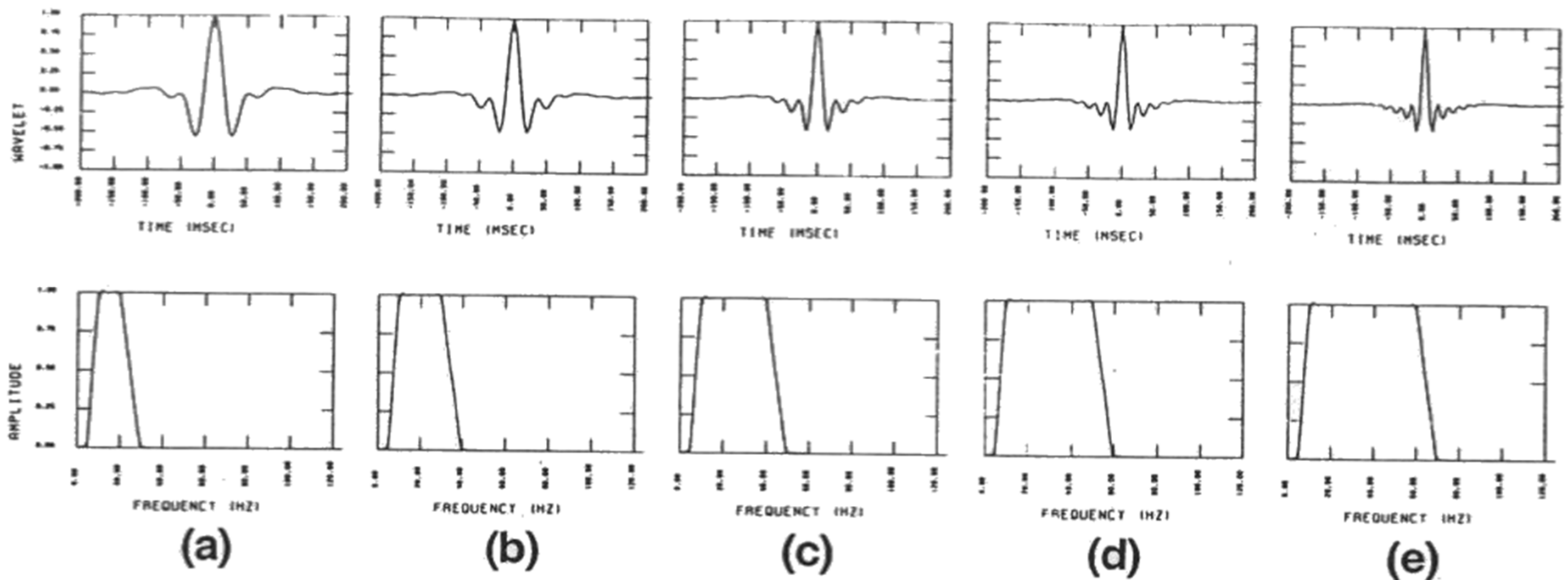
Note the effect on the stacked traces 1, 2, 3, 4, & 5



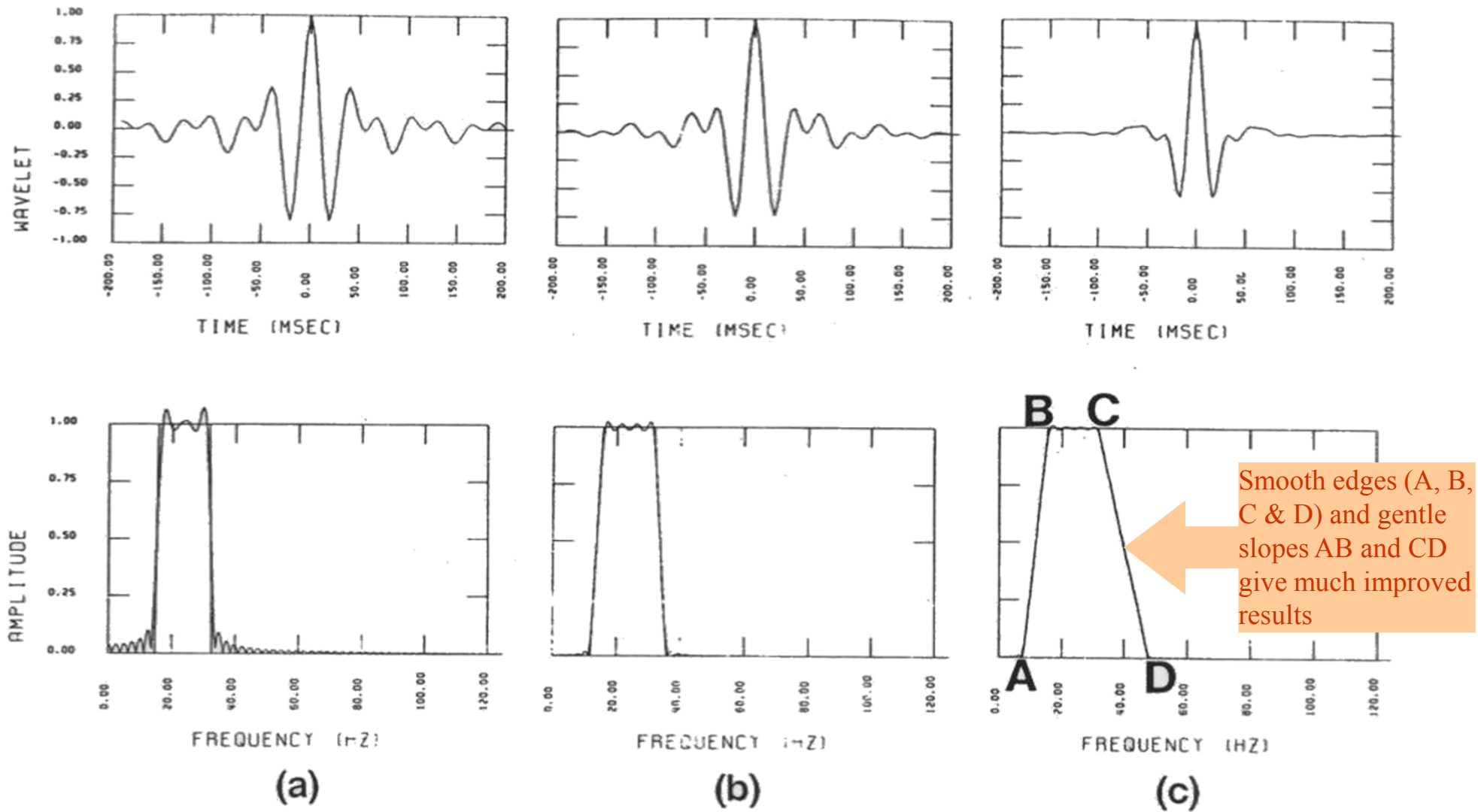
With a very high number of traces (frequency are continuously increased) the resulted stacked trace is very sharp; almost a spike.



From the frequency spectrum point of view, we can see the same feature; the wider the frequency band the sharper the related time trace.



The effect of the edge of the frequency spectrum



FFT

■ مقدمة و تعريف

تحويل فوريير السريع (Fast Fourier Transformation) خوارزمية تمكننا من حساب قيمة تحويل فوريير المتقطع بسرعة . سرعة هذه الخوارزمية تعود إلى أنها لا تقوم بحساب الأجزاء التي يساوي مجموعها صفرا في تحويل فوريير المتقطع. وتنسب الخوارزمية إلى جيمس كولي James W. Cooley وجون تيوكي John W. Tukey اللذان قاما بنشر الخوارزمية سنة 1965 وذلك بالصيغة المعروفة اليوم ، إلا أن العالم الألماني كارل فريدرش غاوس قام بصياغة خوارزمية شبيهة سنة 1805 واستعملها في حساب مجرى المذنبات بالاس وجونو. كما تم تطوير بعض الحالات الخاصة من الخوارزمية قبل اكتشاف توكي لها (من قبل غود سنة 1960).

أيضا تعرف عملية تحويل فوريير على أنها عملية (كالضرب أو الجمع)، ولكنها عملية لدالة وليس لعدد فتسمى وبالتحديد مؤثر. على هذه الدالة، $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ أن تكون قابلة للتكامل، وعندها يعرف تحويل فورييه للدالة $g(x)$ ، على أنه:

$$G(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-i2\pi x f} dx , \text{ لكل } f \text{ حقيقي، وبحيث أن } i^2 = -1 .$$

يستخدم تحويل فوريير كثيرا في تحليل الإشارات ومعرفة الترددات التي تضمّنها، وفي هذه الحالة يمثل المتغير x الزمن، في حين يمثل المتغير f ترددا زمنيا يقاس بوحدات الهرتز.

تحويل فوريير عملية رياضية تستخدم لتحويل الدوال الرياضية من مجال الزمن إلى مجال التردد. وهي مفيدة لتحليل الإشارات ومعرفة الترددات التي تتضمنها، كما أن لها تطبيقاً في حل المعادلات التفاضلية. واسم العملية مشتق من اسم العالم الفرنسي فورييه.

(إذا رمزنا ب t للزمن واعتبرنا w تردداً)

فإن تحويل فوريير الذي نرمز له هنا ب M هو تبسيطا دالة تحول إشارة أو دالة من دالة بمتغير هو الزمن إلى دالة بمتغير هو التردد. أما الأصح هو أنها عملية أي operator (أي مثل الضرب والجمع والقسمة ولكنها أكثر تعقيدا حيث أنها عملية بين دالتين وليست عملية بين عددين) على كل فإن تأثير العملية مبين أسفله.

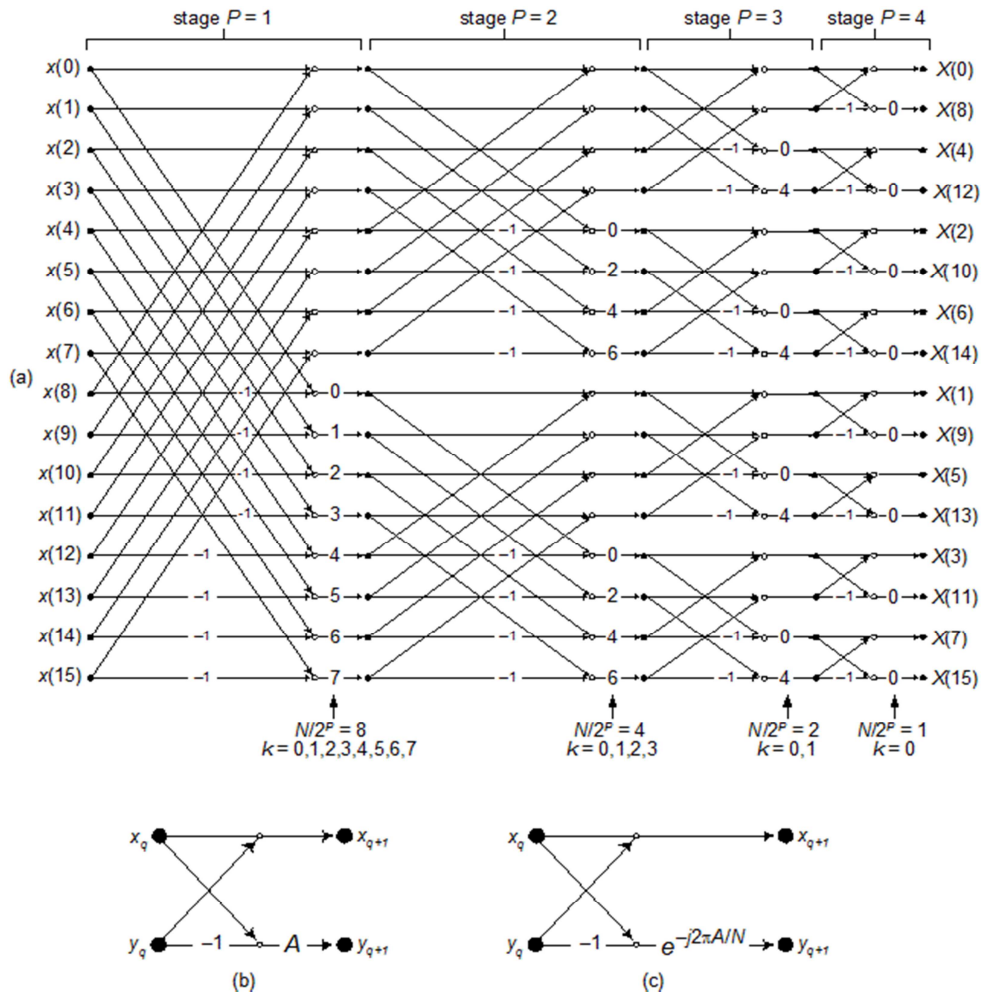
$$f(t) \xrightarrow{M} F(w)$$

و دالة التحويل M أي التي تحول دالة بمتغير هو الزمن إلى دالة بمتغير هو التردد يمكن حسابها على النحو الآتي:

$$M\{f(t)\} = F(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

و كما يوجد تحويل فورييه فإنه يوجد تحويل فورييه معاكس رمزت له هنا ب m وهو يقوم بالتحويل العكسي لتحويل فوريي أي من دالة بمتغير قيمته معقدة إلى دالة بمتغير قيمته حقيقية.

DFT وتحلل سلسلة من القيم في مكونات ترددات مختلفة. هذه العملية مفيدة في العديد من المجالات ، لكن الحساب المباشرة من تعريف كثيرا ما يكون بطيئا جدا ليكون عمليا. و FFT هو وسيلة لحساب نفس النتيجة بسرعة أكبر: حساب الـ DFT من نقاط N هي طريقة ساذجة ومتعبة ، وذلك باستخدام التعريف ، ويأخذ $O(N^2)$ من العمليات الحسابية ، في حين أن FFT يمكنه حساب النتيجة نفسها في $O(N \log N)$ من العمليات. الفرق في السرعة يمكن أن تكون كبيرة ، خصوصا بالنسبة للبيانات ذات المجموعات الطويلة حيث N قد تكون في الآلاف أو الملايين، من الناحية العملية، يمكن تخفيض الوقت اللازم للحساب من قبل عدة مجموعات من القدر الزلزالي في مثل هذه الحالات، والتحسين النسبي تقريبا على $N / \log(N)$. مما يصنع تحسنا كبيرا من DFT القائم على خوارزميات العملية ؛ FFT لها أهمية كبيرة على مجموعة واسعة من التطبيقات ، بدءا من معالجة الاشارات الرقمية وحل المعادلات التفاضلية الجزئية لخوارزميات لتكاثر سريع من الأعداد الصحيحة الكبيرة .



■ صيغة فورييه للدوال الدورية ذات الدور $\pi/2$ في صورة مثلثية

بالنسبة للدالة الدورية $f(x)$ القابلة للتكامل على $[\pi, \pi-]$ ، الإعداد

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad n \geq 0$$

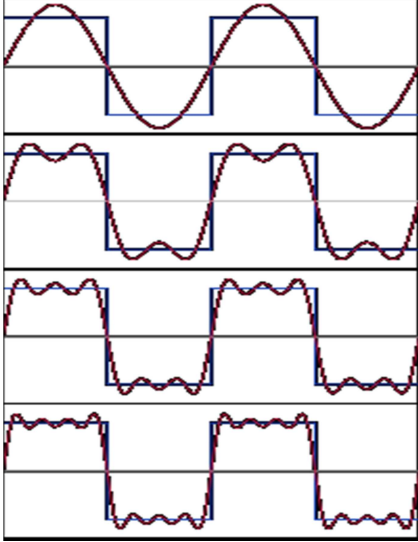
و

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad n \geq 1$$

يطلق عليها معاملات فوريير للدالة f . أحدها يعطي المجاميع الجزئية لمتسلسلات فورييه للدالة f , يرمز لها عادة بـ

$$(S_N f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)], \quad N \geq 0.$$

المجاميع الجزئية لـ f هي كثيرات حدود مثلثية. يتوقع المرء أن الدوال S_N هي تقريبات للدالة f ، وأن التقارب يتحسن عندما تقترب N من ما لانهاية. يطلق على المجموع المحدود



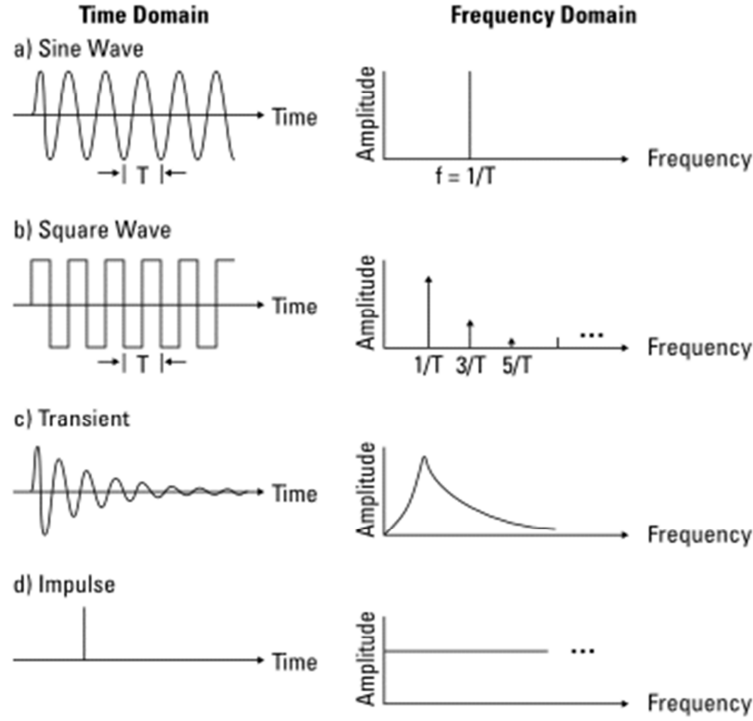
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

اسم متسلسلة فورييه للدالة f .

لا تتقارب متسلسلات فورييه دائماً، وحتى

عندما تتقارب بالنسبة لقيمة معينة، x_0 of x ،

فإن مجموع السلسلة عند x_0 قد تختلف من قيمة $f(x_0)$ للدالة.



إذا تحققت بعض الشروط الرياضيّة، فبالإمكان إعادة بناء الدالة الأصلية، g ، من تحليل فورييه، G ، بواسطة تحويل فورييه معاكس:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f) e^{i2\pi x f} df, \text{ لكل } x \text{ حقيقي.}$$

في هذه الحالة تدعى الدالتين g و G زوج فورييه.

■ خواص تحويل فوريير السريع

دالة قابلة للتكامل هي دالة $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ تحقق :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| dx < \infty$$

لدالة كهذه هنالك تحويل فورييه.

** خواص أساسية

لنفرض أنّ الدوال $g(x)$ و $h(x)$ و $s(x)$ هي دوال قابلة للتكامل ، ولندون تحويلات فورييه لكل منها بـ $G(f)$ و $H(f)$ و $S(f)$ على التوالي .
لتحويل فورييه الخواص الأساسية التالية:

خطية

لأي عددين مركبين a و b ، إذا تحقق:

$$s(x) = a \cdot g(x) + b \cdot h(x)$$

فيتحقق كذلك:

$$S(f) = a \cdot G(f) + b \cdot H(f)$$

إزاحة

لأي عدد حقيقي x_0 ، إذا تحقق: $h(x) = g(x - x_0)$ ، يتحقق أيضاً:

$$H(f) = G(f) \cdot e^{-i2\pi x_0 f}$$

تضمين

لأي عدد حقيقي f_0 ، إذا تحقق: $h(x) = g(x) \cdot e^{i2\pi x f_0}$ ، يتحقق أيضاً:

$$H(f) = G(f - f_0)$$

قياس

لأي عدد حقيقي a غير الصفر، إذا تحقق: $h(x) = g(ax)$ ، يتحقق أيضاً:

$$H(f) = \frac{1}{|a|} G\left(\frac{f}{a}\right)$$

من المهم ذكر الحالة الخاصة التي فيها $a = -1$ ، أي أنّ $h(x) = g(-x)$ ،
وعندها: $H(f) = G(-f)$.

ترافق

إذا تحقّق $h(x) = \overline{g(x)}$ ، فإنّ : $H(f) = \overline{G(-f)}$

التفاف

إذا تحقّق $s(x) = (g * h)(x)$ ، فإنّ : $S(f) = G(f) \cdot H(f)$

تحويلات أساسيّة

ملاحظات	تحويل فورييه غير واحد، تردد زاوي	تحويل فورييه واحد، تردد زاوي	تحويل فورييه واحد، تردد عادي	الدالة	
التعريفات	$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\nu x} dx$	$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$	$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx$	$f(x)$	
خطيّة	$a \cdot \hat{f}(\nu) + b \cdot \hat{g}(\nu)$	$a \cdot \hat{f}(\omega) + b \cdot \hat{g}(\omega)$	$a \cdot \hat{f}(\xi) + b \cdot \hat{g}(\xi)$	$a \cdot f(x) + b \cdot g(x)$	101
الإزاحة في مجال الزمن	$e^{-ia\nu} \hat{f}(\nu)$	$e^{-ia\omega} \hat{f}(\omega)$	$e^{-2\pi i a \xi} \hat{f}(\xi)$	$f(x - a)$	102
الإزاحة في مجال التردد، أو التضمين، القانون التتوي لقانون 102	$\hat{f}(\nu - 2\pi a)$	$\hat{f}(\omega - 2\pi a)$	$\hat{f}(\xi - a)$	$e^{2\pi i a x} f(x)$	103
إذا كانت $ a $ قيمة كبيرة، فإنّ غالبية تكل $f(ax)$ ستتمحور حول الصفر و $\frac{1}{ a } \hat{f}\left(\frac{\nu}{a}\right)$ تنتشر وتصبح أكثر مسطحة.	$\frac{1}{ a } \hat{f}\left(\frac{\nu}{a}\right)$	$\frac{1}{ a } \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$	$\frac{1}{ a } \hat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right)$	$f(ax)$	104
في هذا القانون، يجب حساب \hat{f} بنفس الطريقة الظاهرة في عمود تحويل فورييه. ينتج القانون عن استبدال المتغير x بواحد من ξ أو ω أو ν .	$2\pi f(-\nu)$	$f(-\omega)$	$f(-\xi)$	$\hat{f}(x)$	105
	$(i\nu)^n \hat{f}(\nu)$	$(i\omega)^n \hat{f}(\omega)$	$(2\pi i \xi)^n \hat{f}(\xi)$	$\frac{d^n f(x)}{dx^n}$	106
القانون التتوي للقانون 106	$i^n \frac{d^n \hat{f}(\nu)}{d\nu^n}$	$i^n \frac{d^n \hat{f}(\omega)}{d\omega^n}$	$\left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \frac{d^n \hat{f}(\xi)}{d\xi^n}$	$x^n f(x)$	107
التكوين $f * g$ يشير إلى مؤثر الالتفاف بين f و g	$\hat{f}(\nu) \hat{g}(\nu)$	$\sqrt{2\pi} \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega)$	$\hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi)$	$(f * g)(x)$	108
القانون التتوي للقانون 108	$\frac{1}{2\pi} (\hat{f} * \hat{g})(\nu)$	$\frac{(\hat{f} * \hat{g})(\omega)}{\sqrt{2\pi}}$	$(\hat{f} * \hat{g})(\xi)$	$f(x) g(x)$	109
		$\hat{f}(\nu) \hat{f}(\xi) \hat{f}(\omega)$ هي دوال حقيقية زوجية.		للدالة الحقيقية الزوجية $f(x)$	110
		$\hat{f}(\nu) \hat{f}(\xi) \hat{f}(\omega)$ هي دوال تخيلية فردية.		للدالة الحقيقية الفردية $f(x)$	111

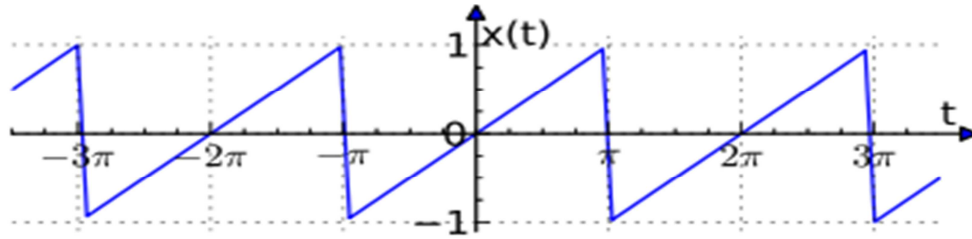
مثال 1: متسلسلة فوريير بسيطة

باستعمال الصيغة المذكورة آنفا، نفرض دالة سن المنشار

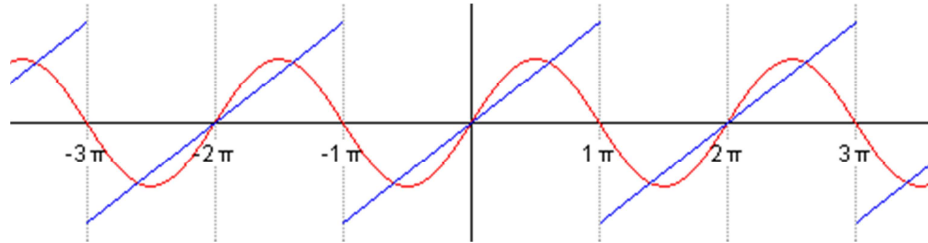
$$f(x) = x, \quad \text{for } -\pi < x < \pi,$$

$$f(x + 2\pi) = f(x), \quad \text{for } -\infty < x < \infty.$$

تكون معاملات فوريير هنا



(مخطط بياني لدالة دورية مكافئة لموجة سن المنشار)

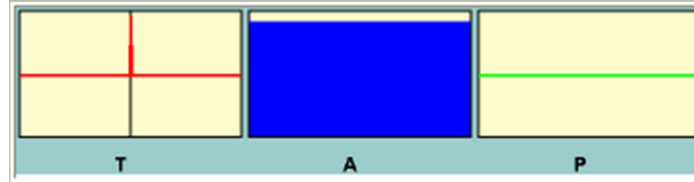


(مخطط للأجزاء الخمسة الأولى من متسلسلة فوريير)

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(nx) dx = 0, \quad n \geq 0.$$

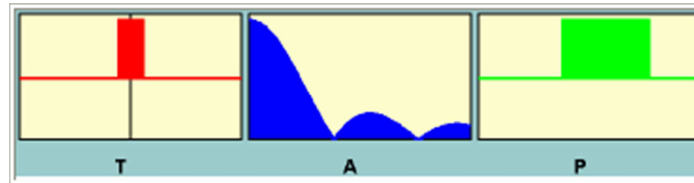
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx = -\frac{2}{n} \cos(n\pi) + \frac{2}{\pi n^2} \sin(n\pi) = 2 \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad n \geq 1.$$

المثال 2 : هو 'الذروة' واحد صفر للوقت وليس له أي قيمة أخرى في المجال مرة. ساوى تصور سلسلة من موجات التمام جميع الترددات الممكنة مع القيم المركزية ، وإلى الصفر مرة. القيم المركزية تسير على نحو بناء ، ويتم تحييد جميع القيم الأخرى. !



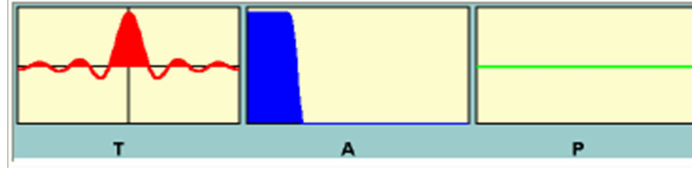
ذروة واحدة ، وبالتالي ، يحتوي على جميع الترددات مع المرحلة صفر (موجات التمام جميع القيم هي في الوقت صفر). وغالبا ما يشار إلى هذه الظاهرة على النحو الطيف 'بيضاء'.

الآن علينا أن نمد الذروة لتشمل مجموعة واسعة من منفصلة -- كل له نفس القيمة المنفصل. وظيفة من وتيرة مطابق لل. sinc (الاستيفاء) ، تحدثنا عنها في وقت سابق ، مع سعة تصل إلى الصفر عندما متبادلة العرض منفصلة نشطة.



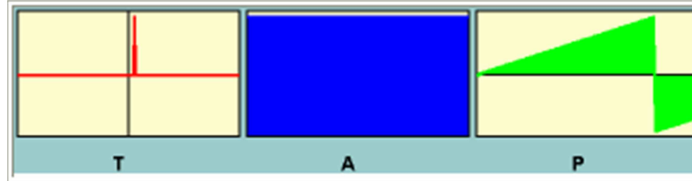
إذا كانت وظيفة الحمراء الساعة 100 مللي ثانية ، في حين أن الصفر الأول في الطيف السعة هو معنى 10 هرتز. علما بأن المرحلة الطيف عند هذه النقطة ، 'تستقيم' في 180 درجة.

والاستيفاء وظيفة (sinc) في المجال الوقت يناظر كتلة السعة ثابتة في مجال الترددات ، والتي تبين الهوية بين فورييه العكسية المباشرة والتحويلات.



المرحلة هو صفر ، لأن الدالة متماثل وقت نطاق -- موجة واحدة جيب التمام (أي مرحلة التحول) هو متناظرة ، بحيث مجموعهما أيضا متماثل. فإن أي الموجات متناظرة في المجال الحين مرحلة الصفر.

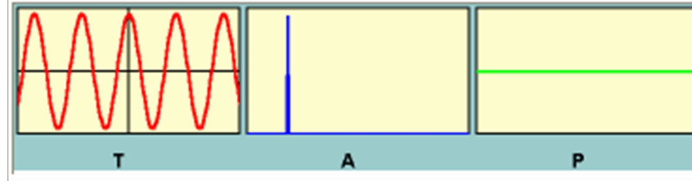
هذه الذروة هي المثال الأول ، ولكن أطول قليلا في وقت الصفر. الطيف السعة ما زالت بيضاء ، ولكن الطيف يشمل المرحلة الآن مرحلة التحول الخطي (الوثب المرحلة في الطيف المرئي يرجع ذلك إلى حقيقة أننا لا نستطيع قياس المرحلة 180 درجة و 200 درجة كما يبدو -160).



في 10 هرتز ، 360 ، أو طول موجة من 10/1000 أو 100 مللي ثانية. 100/ الطول الموجي أو 18 درجة. لمدة 20 هرتز و 5 مللي التحول هو التحول التدريجي من 36 درجة و t. الدكتور. الخطية مرحلة التحول ما يعادل تحولا وقت ثابت.

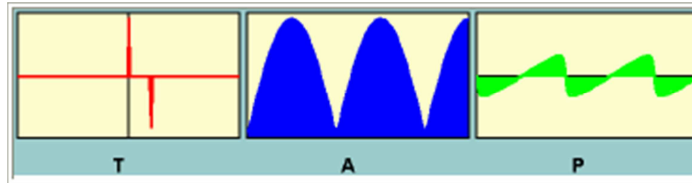
وتيرة واحدة ، في هذه الحالة ، في مرحلة الصفر ، ويمثلها ذروته واحد في الطيف السعة.

إذا كان هذا من شأنه أن يكون في ذروة هرتز 0 (DC), ثم فإن التعبير نطاق الوقت يكون مجرد قيمة ثابتة -- مرة أخرى مشددا على التحول التماثل (الإصدار عكس المثال الأول).



هذا المثال يوضح وحدة موجة الساتلية المصدر أو الوجهة ، مع 'الشقوق' في مجال الترددات.

علما بأن مرحلة 'الانجرافات' حول الصفر -- على الرغم من أنها قريبة من الصفر ، وهذه التغيرات الصغيرة يمكن أن تشوه كل مرحلة من مراحل الخرائط عاكس في القسم الزلزالية.

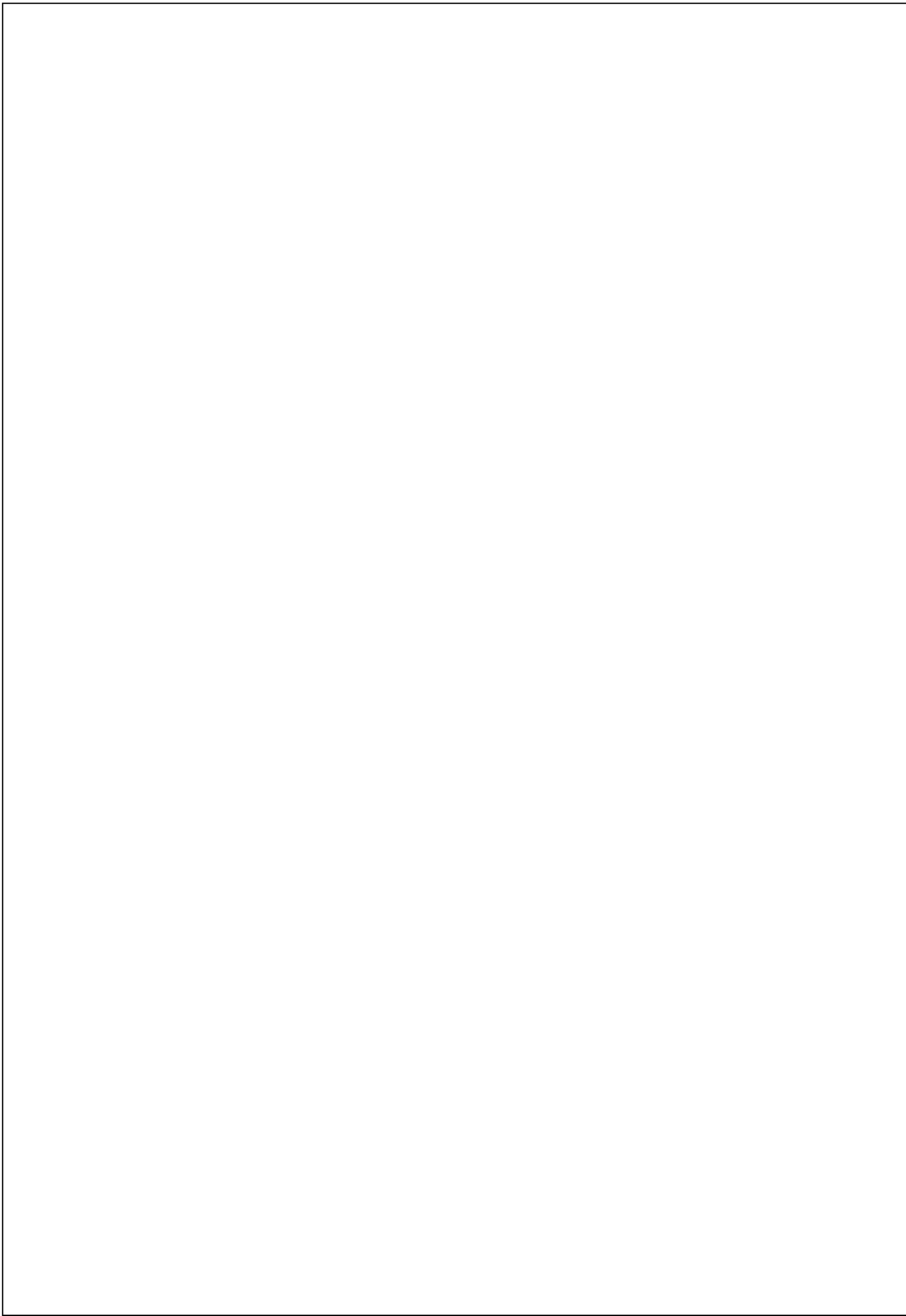


لاحظ مرة أخرى أن هناك تشويه المرحلة ، والتي يتم تضخيمها ترددات معينة (أو مضاعفات التوافقيات من تواتر متعددة المهيمن).

■ استخدام FFT في المعالجة :

يستخدم لتحويل الدوال الرياضية من مجال الزمن إلى مجال التردد. وهي مفيدة لتحليل الإشارات ومعرفة الترددات التي تتضمنها . حيث أنه من شروط تحويل فوريير السريع أن يكون عدد البيانات n هو عدد صحيح من البيانات قوة 2 .

وهو أداة قوية وسريعة لتحليل و قياس الاشارات من المكونات في الحصول على البيانات حيث يتم تنعيم مرشحات (ممر منخفض) للإشارات غير مرغوب فيها بطريقة سريعة جدا من خلال الحواسيب.



Three main types of waves:

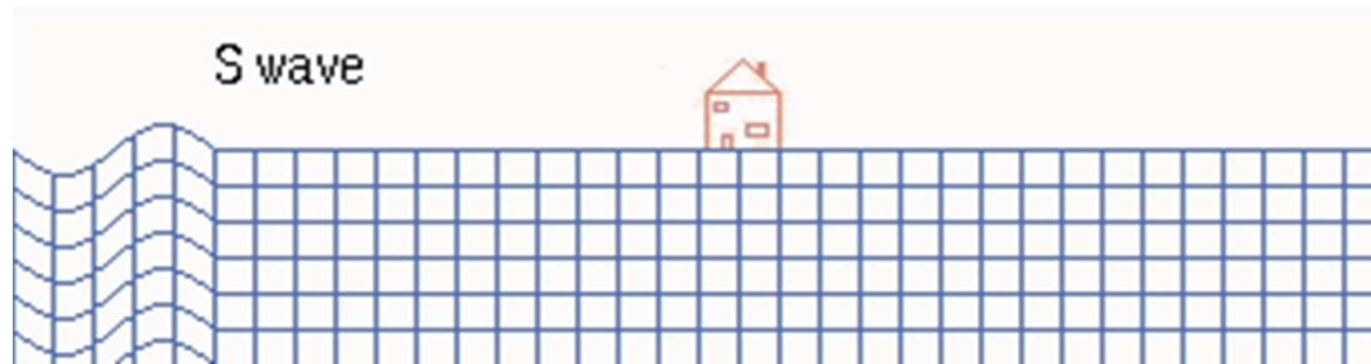
P-waves

Compressional, acoustic, really the only one that reflection seismologists are interested in.



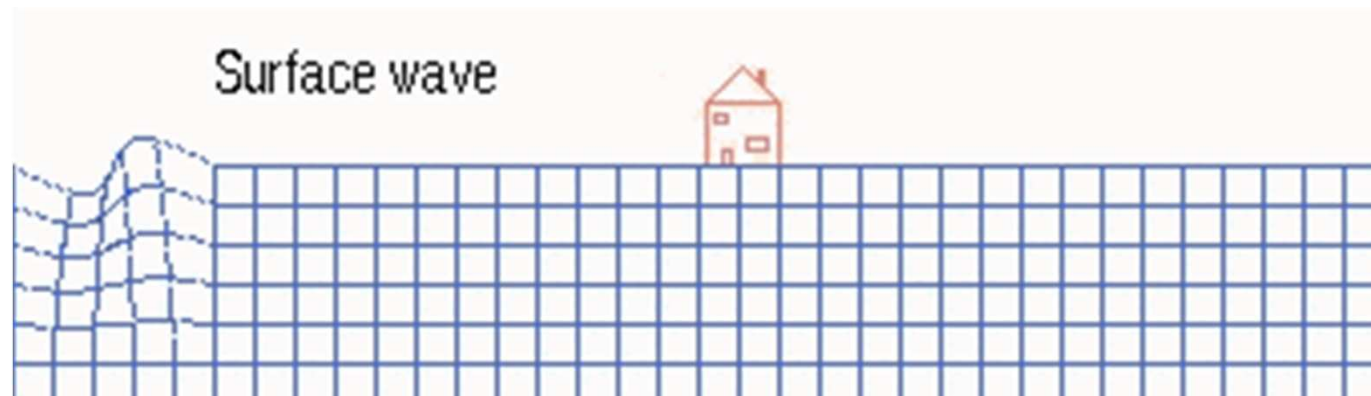
S-waves

Shear wave, do not travel through fluids, travel at about half the speed of P-waves.

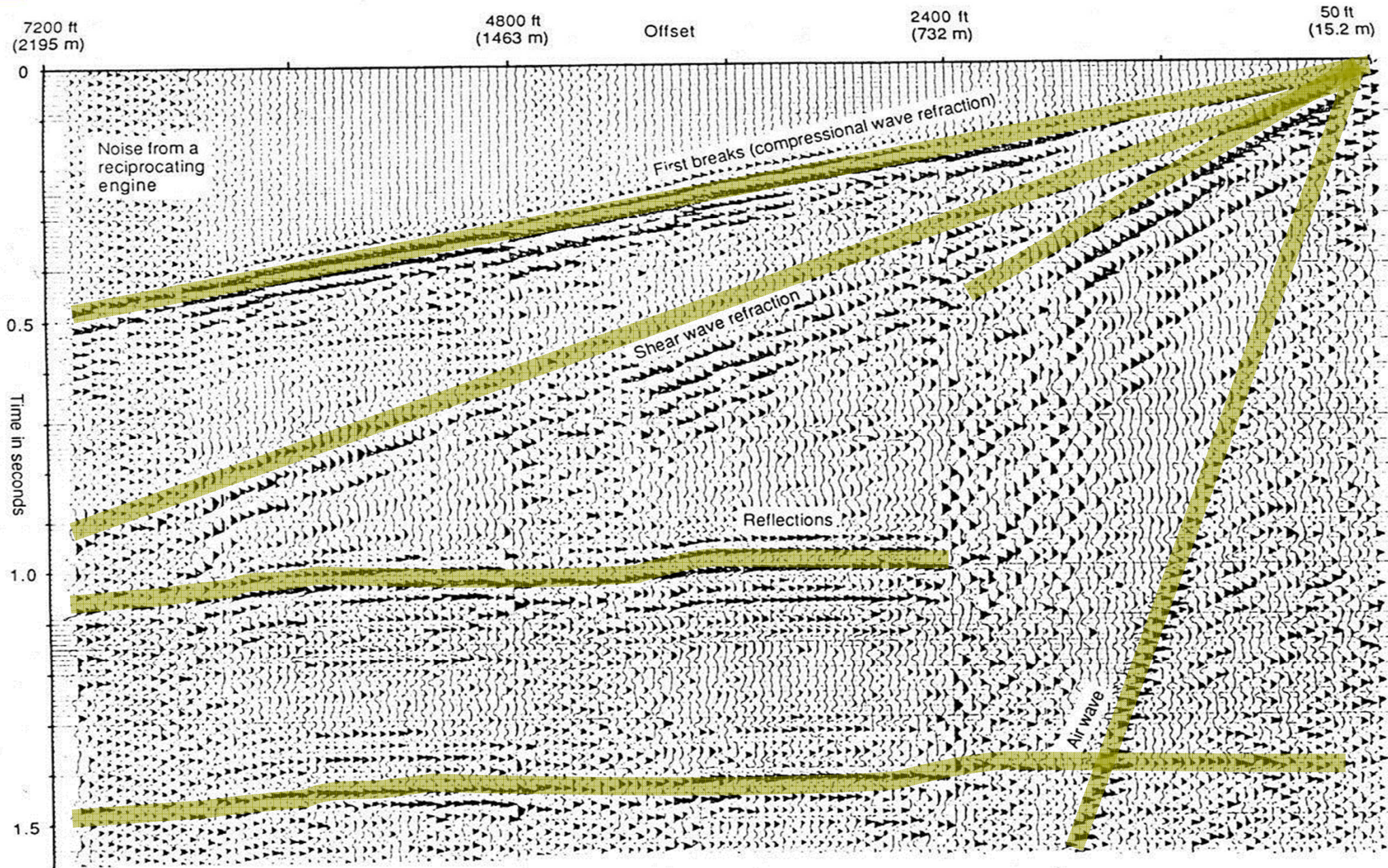


Surface Waves

Travel at surface, large amplitude. Slow velocity, low frequency, knock down buildings.



Different types of waves: P, S, Rayleigh, air, refraction, reflection



Different types of waves: P, S, refelction, Love, Rayleigh

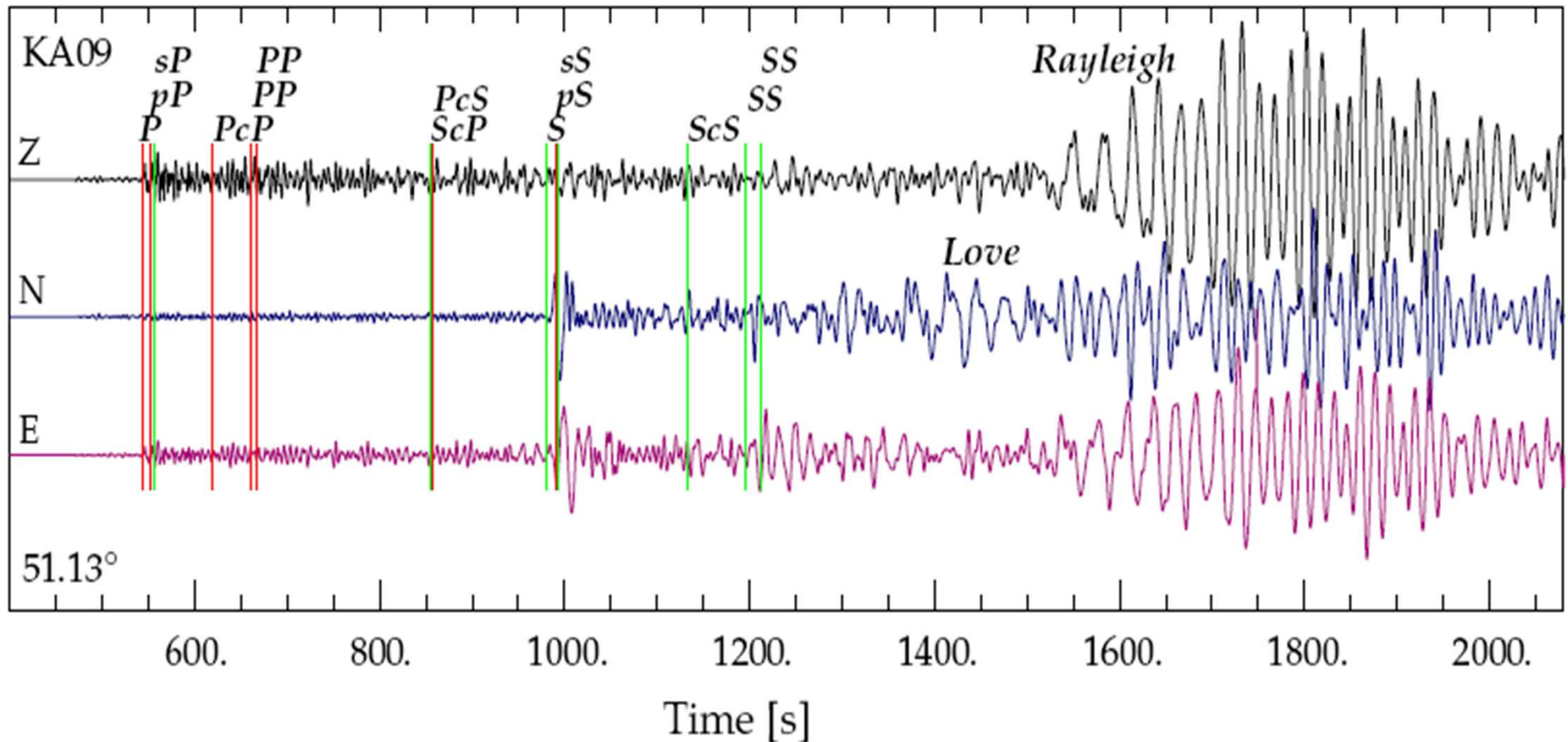


Figure 1.2. Unfiltered three-component velocity records from a portable broad-band recording system in NW Australia for a shallow event near the Fiji islands at an epicentral distance $\Delta = 51.13^\circ$. The event is almost due east of the receiver so the horizontal components are naturally polarised with transverse motion to the path on the N/S component.

Seismic Velocities

Important for :

Conversion from traveltime to depth

Check of results by modeling

Imaging of the data (migration)

Classification and Filtering of Signal and Noise

Predictions of the Lithology

Aid for geological Interpretation

Seismic velocities

- Can be written as function of physical quantities that describe stress/strain relations
- Depend on medium properties
- Measurements of velocities
- Definitions of velocities (interval, rms, average etc.)
- Dix formula: relation between rms and interval velocities
- Anisotropy

What physics controls the propagation?

Rock properties

density = mass per unit volume, units kg.m^{-3} , ρ

modulus = stress/strain = τ/ε

stress = applied force/unit area (F/A) (or pressure, P), units $\text{N.m}^{-2} = \text{Pa}$, τ

strain = relative change of dimension, unitless, ε , or $\delta L/L$

longitudinal strain, parallel to stress, is $\delta L/L$

lateral strain, perpendicular to stress, is $\delta D/D$

volumetric strain, due to a confining pressure, is $\delta V/V$

shear strain, rotational angle due to an applied shear stress, is θ

What physics controls the propagation?

Rock properties

For an *isotropic, homogeneous* material:

Young's Modulus, E , is defined by

$$E = \tau/\varepsilon = (F/A)/(\delta L/L)$$

(Hooke's Law, strain is proportional to stress)

Poisson's Ratio, σ , is defined by

$$\delta D/D = \sigma \cdot (\delta L/L)$$

(lateral strain is proportional to longitudinal strain)

Note $0 \leq \sigma \leq 0.5$; if $\sigma = 0$ then $dD/D = 0$;

if $\sigma = 0.5$ there is no volume change, the case for a liquid.

E , σ and ρ together *completely define* the elastic properties of an isotropic, homogeneous material.

There are actually
three moduli
we can define:

17.2 The Elastic Moduli and Hooke's Law

An elastic modulus is defined by the equation

$$\text{modulus} = \frac{\text{stress}}{\text{strain}}$$

$$\text{modulus [Pa]} = \frac{\text{stress [Pa]}}{\text{strain [no unit]}}$$

Three kinds of moduli are defined to correspond to the three kinds of stress and strain: each has dimensions $[\text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}]$.

<i>Name of elastic modulus</i>	<i>Nature of stress</i>	<i>Nature of deformation</i>
bulk modulus K	change of pressure	change of size but not shape
shear modulus G	$\frac{\text{tangential force}}{\text{area}}$	change of shape but not size
Young's modulus E	$\left(\frac{\text{tensile or compressive force}}{\text{area}} \right)$	change (usually) of both size and shape

Young's:

17.3 Young's Modulus E

$$\text{Stress } \sigma = \frac{\text{tensile force}}{\text{area of cross-section}} = \frac{F}{A}$$

$$\text{Strain } \epsilon = \frac{\text{change of length}}{\text{original length}} = \frac{\Delta l}{l_0}$$

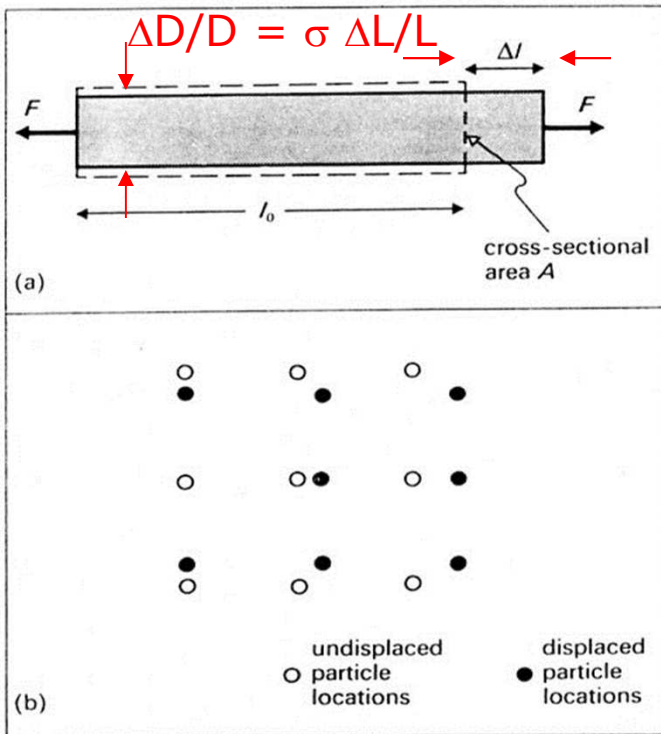


Fig. 17.3. Illustration of Young's modulus on (a) a macroscopic, and (b) a microscopic scale (both exaggerated).

Bulk:

17.4 Bulk Modulus K

$$\text{Stress } \sigma = \frac{\text{change of normal force}}{\text{area}} = \Delta p$$

(the change of hydrostatic fluid pressure)

$$\text{Strain } \theta = \frac{\text{change of volume}}{\text{original volume}} = \frac{\Delta V}{V_0}$$

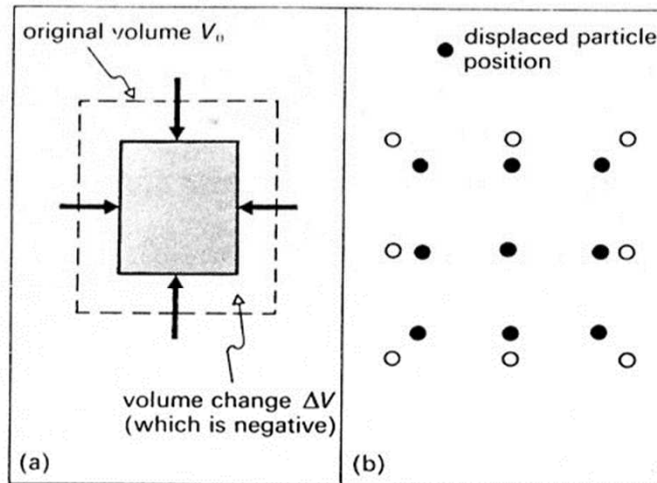


Fig. 17.4. To illustrate bulk modulus on (a) a macroscopic, and (b) a microscopic scale (both exaggerated).

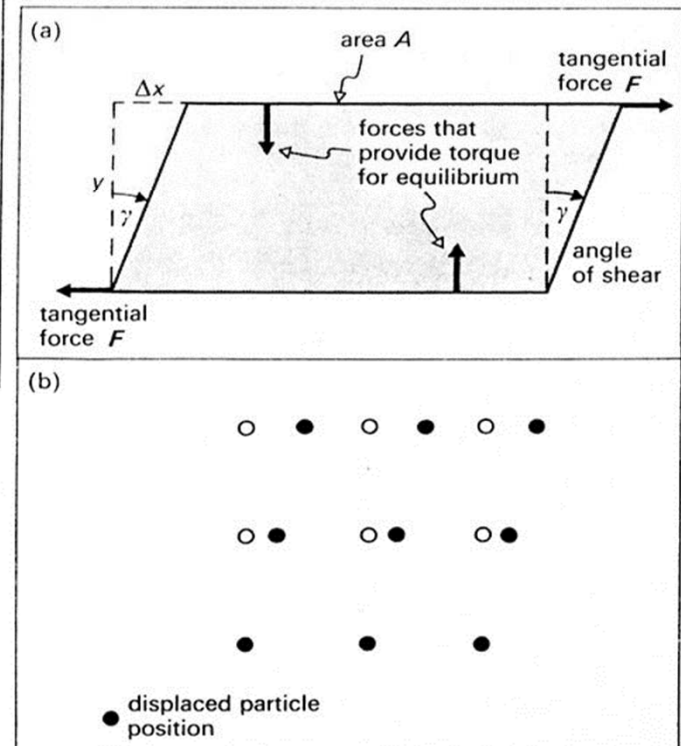
Shear:

17.5 Shear Modulus G

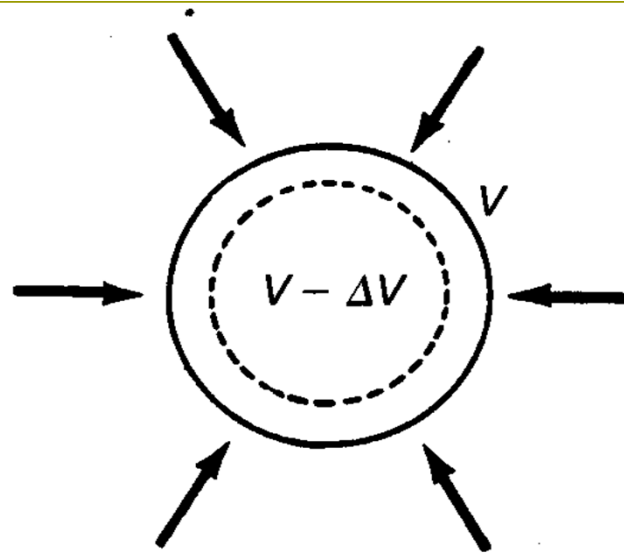
Shear modulus is sometimes called **rigidity** modulus, and is possessed only by *solids*, since the shape of a fluid is determined by its container.

$$\text{Stress } \tau = \frac{\text{tangential force}}{\text{area over which it is applied}} = \frac{F}{A}$$

$$\text{Strain } \gamma = \text{angle of shear } \gamma = \frac{\Delta x}{y}$$



Bulk modulus



(d) Bulk contraction

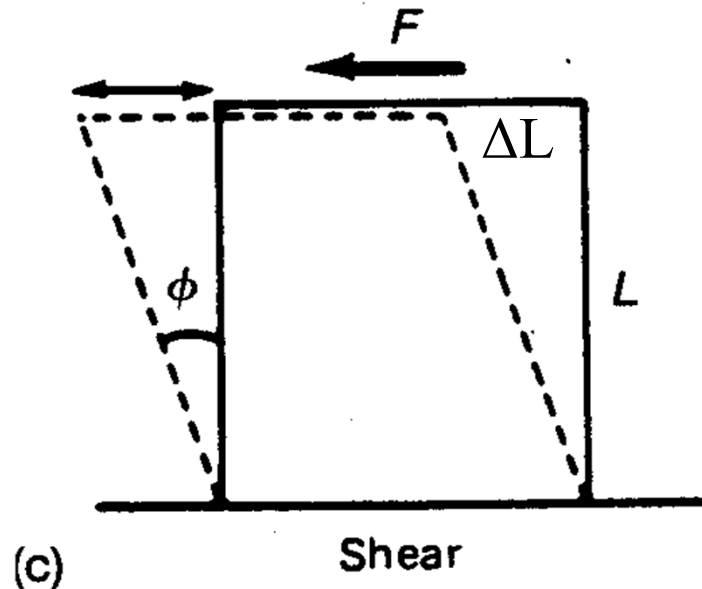
$$K = \frac{\text{volume stress}}{\text{volume strain}} \\ = \frac{P(\text{pressure})}{\Delta V / V}$$

Bulk modulus:

$$k = \frac{1}{\kappa} = \frac{P}{\Delta V / V}$$

κ = compressibility

Shear modulus



$$\begin{aligned}\mu &= \frac{\text{shear stress}}{\text{shear strain}} \\ &= \frac{F/A}{\tan \phi} = \frac{F/A}{\Delta L/L}\end{aligned}$$

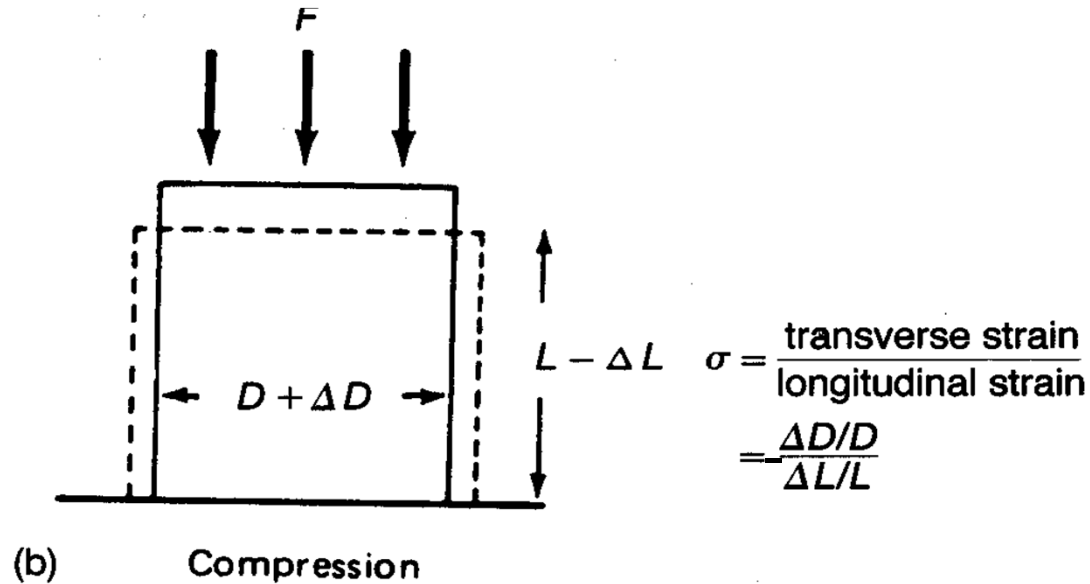
Shear modulus:

$$\mu = \frac{\tau}{\tan \theta}$$

τ is the shear stress

The shear modulus μ is zero for fluids and gaseous media

Poissons ratio

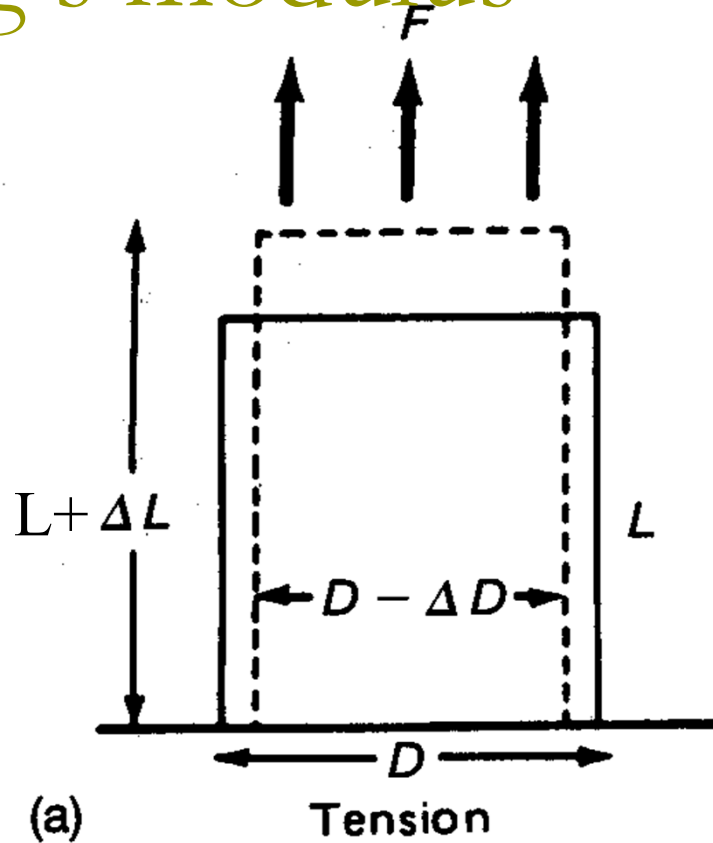


Poisson's ratio varies from 0 to $\frac{1}{2}$.

Poisson's ratio has the value $\frac{1}{2}$ for fluids

$$\sigma = \frac{3k - 2\mu}{2(3k + \mu)}$$

Young's modulus



$$E = \frac{\text{longitudinal stress}}{\text{longitudinal strain}}$$
$$= \frac{F/A}{\Delta L/L}$$

$$E = \frac{9k\mu}{3k + \mu}$$

What physics controls the propagation?

E , σ and ρ together *completely define* the elastic properties of an isotropic, homogeneous material.

Additional useful relations are:

The **bulk modulus**, k , (or coefficient of incompressibility) is defined by

$$k = \tau/\varepsilon = P/(\delta V/V)$$

(here, P is a triaxial confining pressure). $(1/k)$ is the compressibility.

The **shear modulus**, μ , is defined by

$$\mu = \tau/\varepsilon = \sigma/\theta$$

(σ is the shear or tangential stress) ($\mu = 0$ for fluids, with zero rigidity)

$$k = E / \{3 (1 - 2\sigma)\}$$

$$\mu = E / \{2 (1 + \sigma)\}$$

$$\lambda = E.\sigma / \{(1 + \sigma).(1 - 2\sigma)\} \text{ (Lamé's coefficient)}$$

Typical moduli/Pa:	Young's, E	Bulk, k	Shear, μ	$\rho/\text{kg.m}^{-3}$ Rock
10^{10}	10^{10}	10^{10}	2500	
Water	0	2.10^9	0	1000
Air	0	10^5	0	1

Seismic Velocities in a homogeneous medium

Can be expressed as function of different combinations of

$K, \sigma, E, \mu, \rho, \lambda$

Often used expressions
are:

$$v_p = \sqrt{\frac{k + \frac{4\mu}{3}}{\rho}} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

$$v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

k = Bulk modulus

σ = Poisson ratio

E = Young's modulus

μ = Shear modulus

ρ = mass density

λ = Lamé's lambda constant

$$\lambda = k - \frac{2}{3}\mu$$

Ratio V_p and V_s depends on Poisson ratio:

$$\frac{V_s}{V_p} = \sqrt{\frac{0.5 - \sigma}{1 - \sigma}}$$

where

$$\sigma = \frac{3k - 2\mu}{2(3k + \mu)}$$

Seismic velocity

Depend on

- ▣ Matrix and structure of the stone
- ▣ Lithology
- ▣ Porosity
- ▣ Porefilling interstitial fluid
- ▣ Temperature
- ▣ Degree of compaction
- ▣

Seismic wave velocities

time = distance/speed

$$c = f \cdot \lambda$$

Body waves

Compressional waves = p waves (p for *primus* or first) = pressure waves

Particle motion parallel to wave propagation

Shear waves = s waves (s for *secundus* or secondary)

Particle motion perpendicular to wave propagation

for *P* waves

Stiff rocks (high moduli) have fast wavespeed

for *S* waves

$$V_p = \sqrt{\frac{\kappa + \frac{4}{3}\mu}{\rho}}, \quad V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

P is always faster than S

For a fluid, $\mu = 0$, so $V_s = 0$

(for derivation, see Dobrin & Savit, p. 32-34)

$$V_s/V_p = \sqrt{\{(0.5 - \sigma)/(1 - \sigma)\}}$$

Alternatively, $\sigma = [(V_p/V_s)^2 - 2]/[(2V_p/V_s)^2 - 2]$ For a

fluid, $\sigma = 0.5$, so $V_s = 0$ (very soft or poorly consolidated rocks, can approach this limit)

The minimum value of $\sigma = 0$ (approached by the most rigid rocks) gives the maximum value of

$$V_s = V_p/\sqrt{2} \approx 0.7 V_p$$

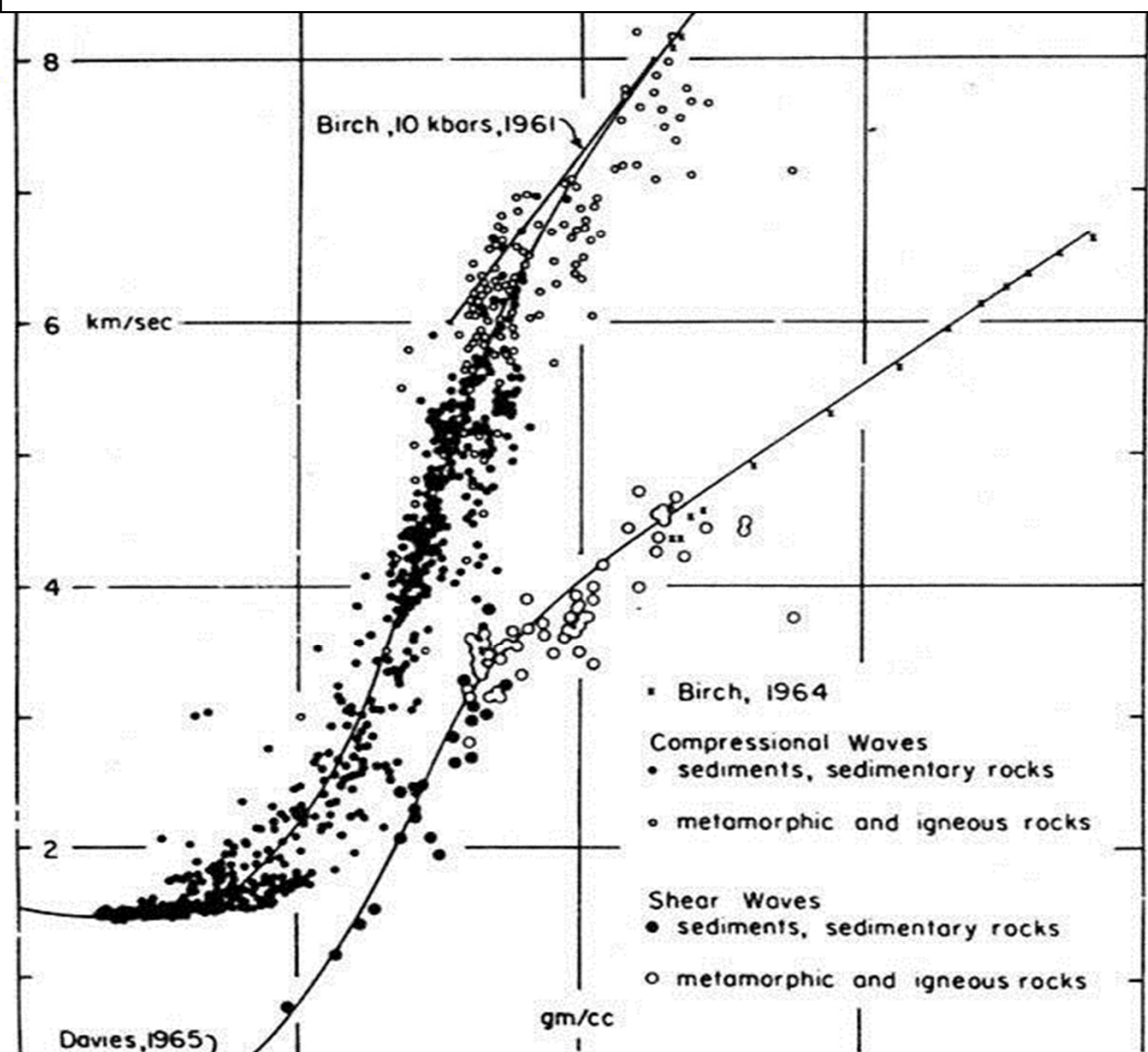
The “average” value typically assumed is

$$\sigma = 0.25 \text{ and } V_s = V_p/\sqrt{3} \approx 0.58 V_p$$

Relating velocity to lithology

Nafe-Drake curve
(Ludwig et al., 1970)

$$\rho(\text{g/cm}^3) = 1.6612V_p - 0.4721V_p^2 + 0.0671V_p^3 - 0.0043V_p^4 + 0.000106V_p^5$$

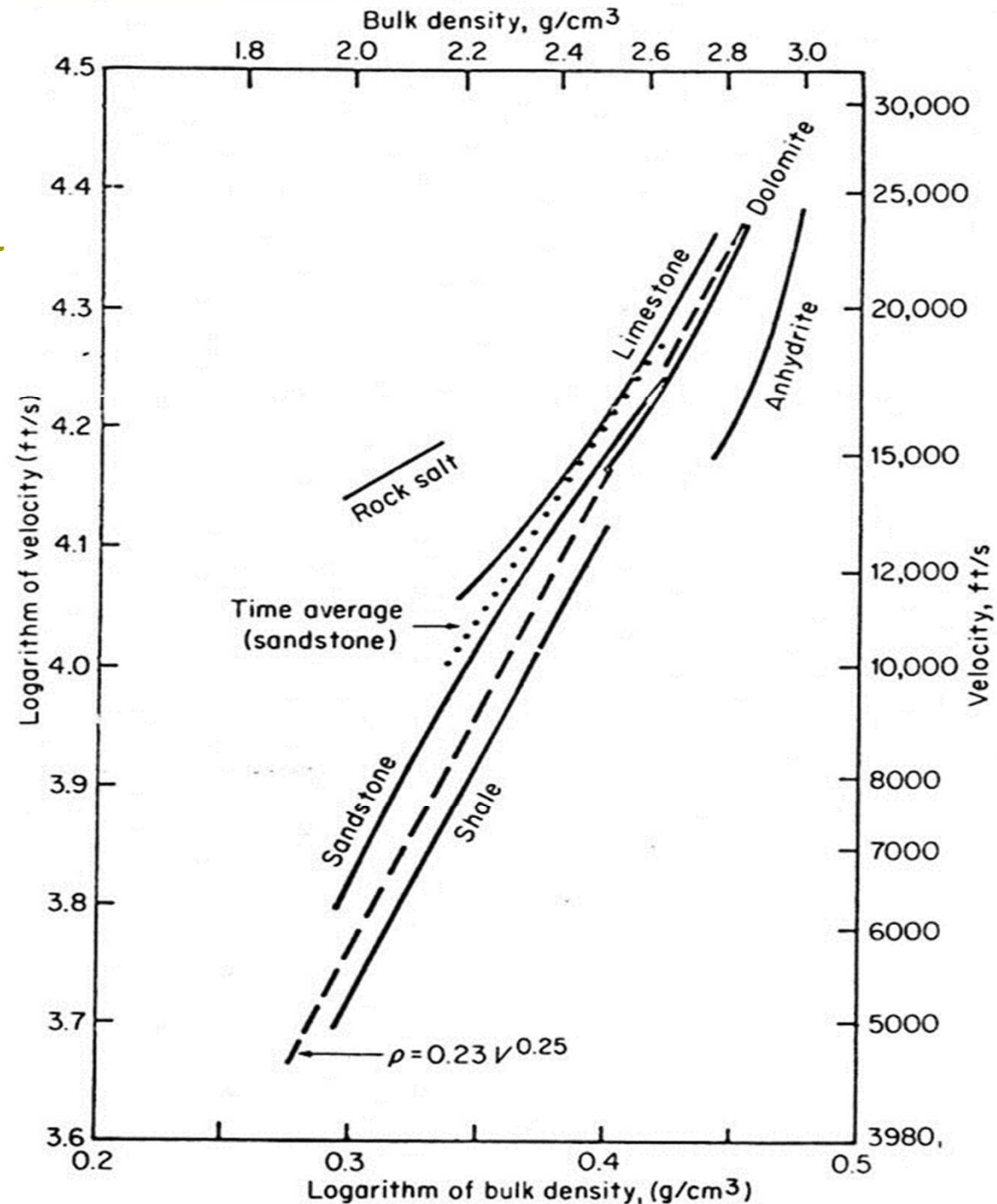


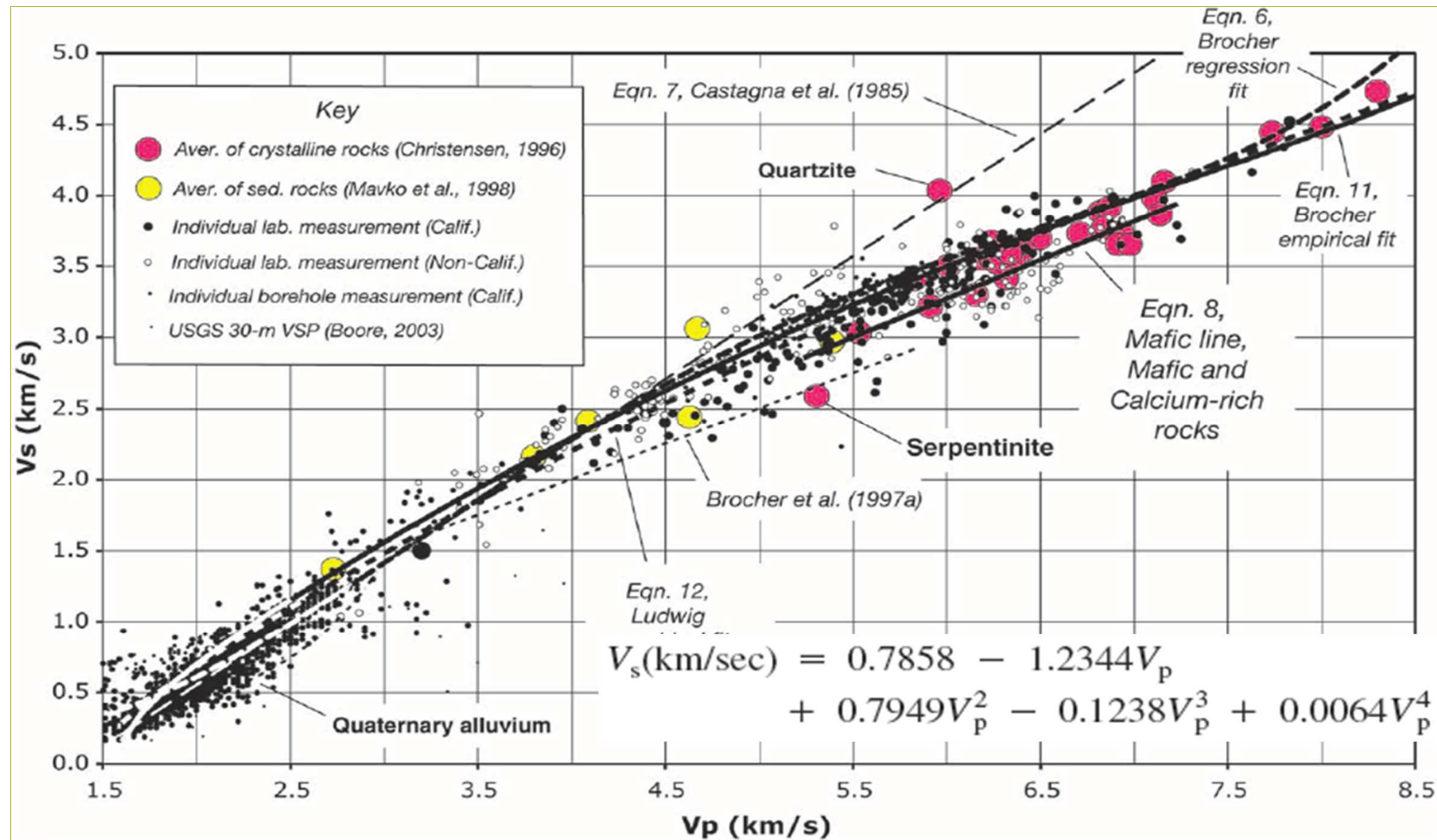
Relating velocity to lithology

Sedimentary rocks

(Gardner, Gardner &
Gregory)

$$\rho(\text{g/cm}^3) = 1.74V_p^{0.25}$$

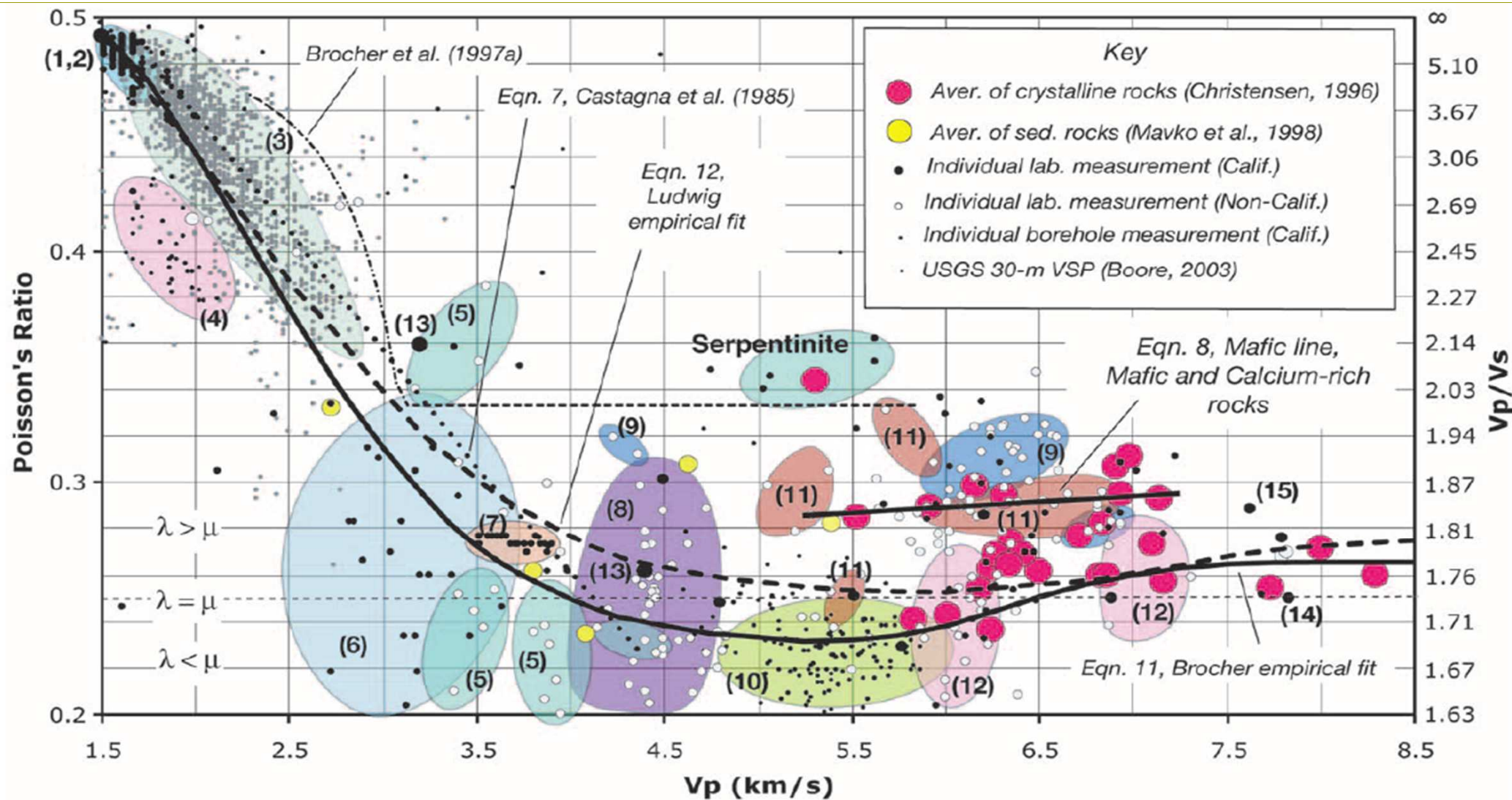




Empirical Relations between Elastic Wavespeeds and Density in the Earth's Crust

Thomas M. Brocher

Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 95, No. 6, pp. 2081–2092, December 2005,



$$\sigma = 0.8835 - 0.315V_p + 0.0491V_p^2 - 0.0024V_p^3$$

Empirical Relations between Elastic Wavespeeds and Density in the Earth's Crust

Thomas M. Brocher

Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 95, No. 6, pp. 2081–2092, December 2005,

Measurements of velocities

- Laboratory measurements using probes
- Borehole measurements
- Refraction seismics
- Analysis of reflection hyperbolas
- Vertical seismic profiling

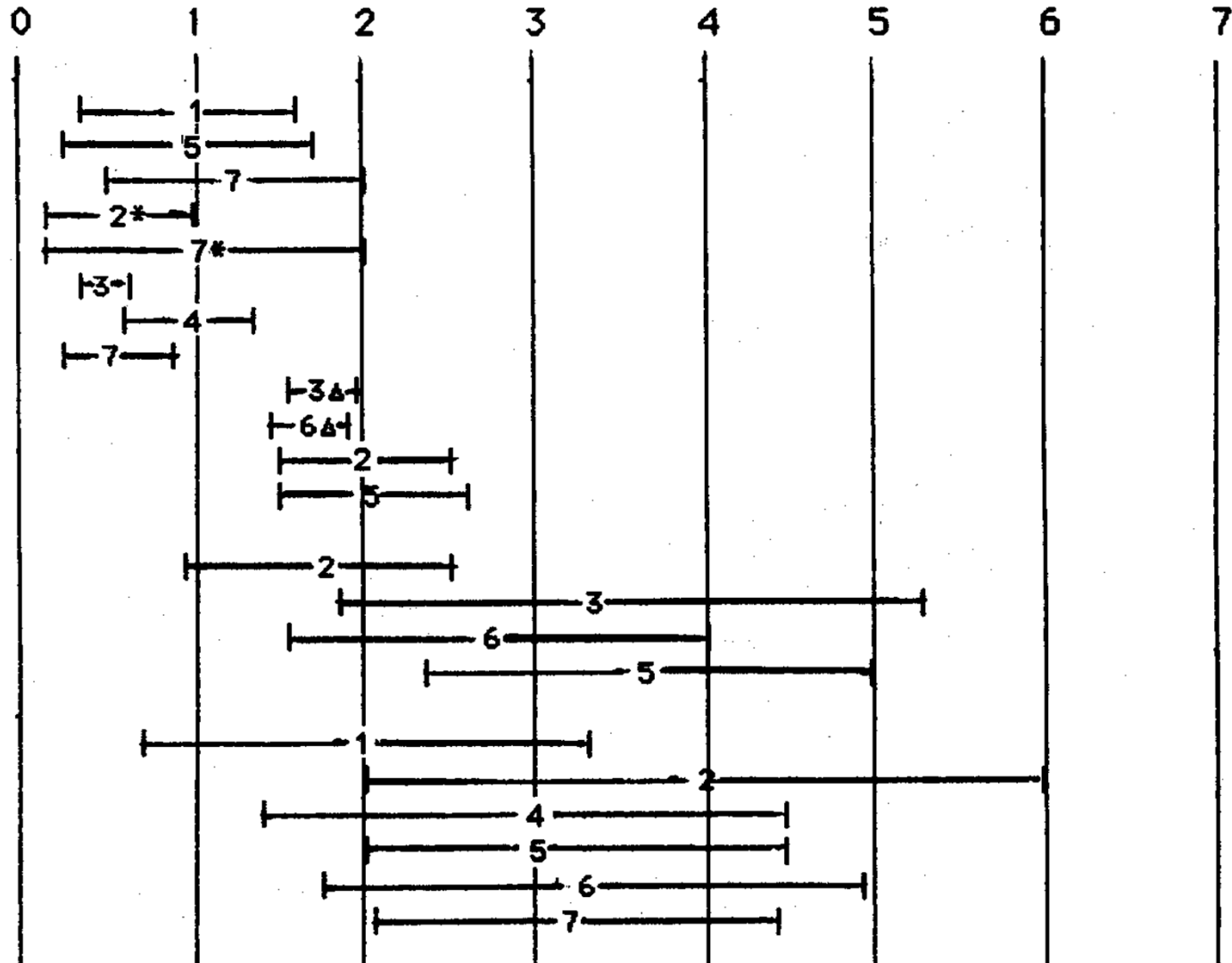
P-wave velocities v_p for different material in (km/s)

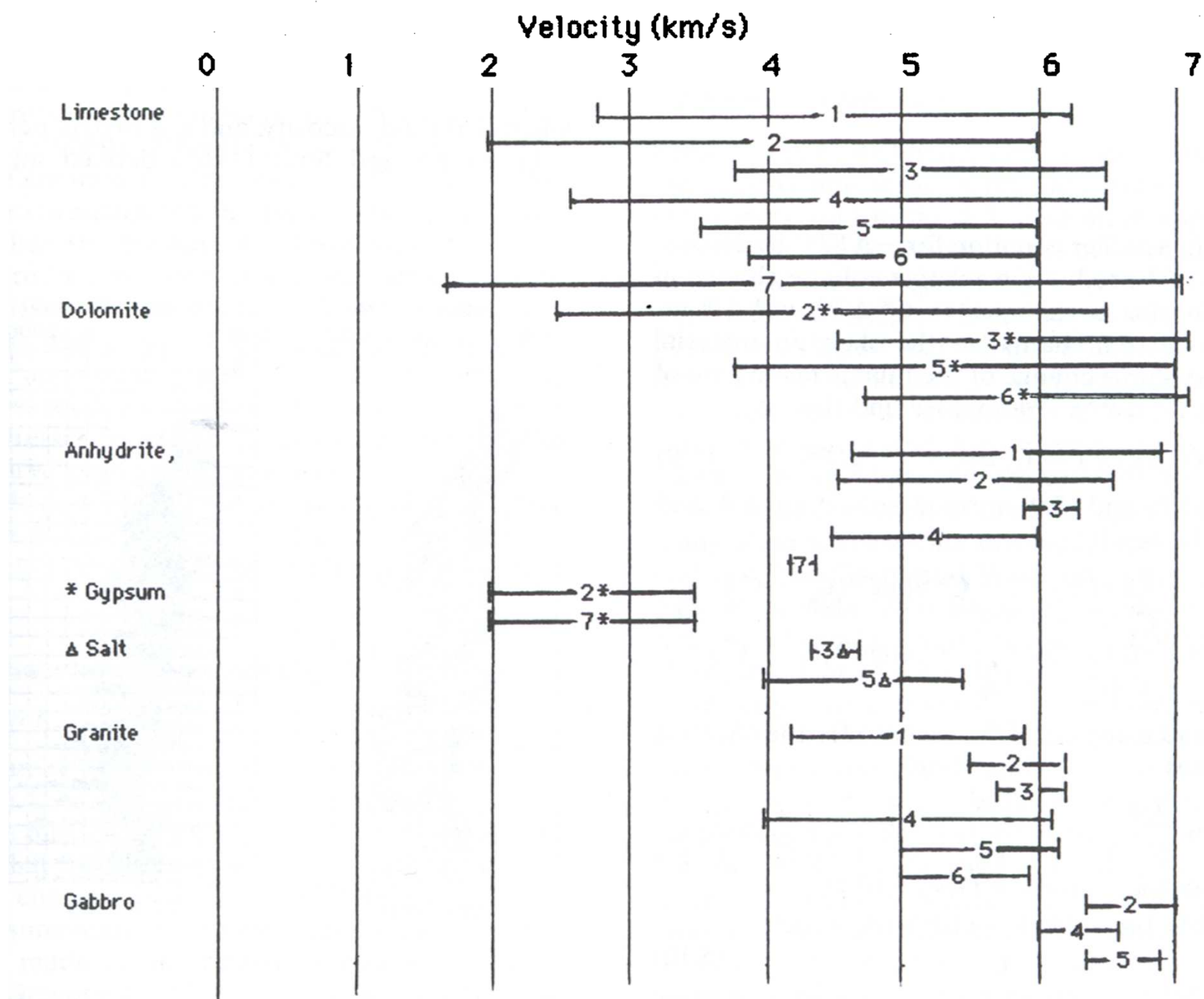
<u>Unconsolidated Material</u>	
Sand (dry)	0.2 - 1.0
Sand (water saturated)	1.5 - 2.0
Clay	1.0 - 2.5
Glacial till (water saturated)	1.5 - 2.5
Permafrost	3.5 - 4.0
<u>Sedimentary rocks</u>	
Sandstone	2.0 - 6.0
Tertiary sandstone	2.0 - 2.5
Pennant sandstone (Carboniferous)	4.0 - 4.5
Cambrian quartzite	5.5 - 6.0
Limestones	2.0 - 6.0
Cretaceous chalk	2.0 - 2.5
Jurassic oolites and bioclastic limestones	3.0 - 4.0
Carboniferous limestone	5.0 - 5.5
Dolomites	2.5-6.5
Salt	4.5 - 5.0
Anhydrite	4.5 - 6.5
Gypsum	2.0 - 3.5

P-wave velocities v_p for different material in (km/s)

<u>Igneous / Metamorphic rocks</u>	
Granite	5.5 - 6.0
Gabbro	6.5 - 7.0
Ultramafic rocks	7.5 - 8.5
Serpentine	5.5 - 6,5
<u>Pore fluids</u>	
Air	0.3
Water	1.4 - 1.5
Ice	3.4
Petroleum	1.3 - 1.4
<u>Other materials</u>	
Steel	6.1
Iron	5.8
Aluminium	6.6
Concrete	3.6

Velocity (km/s)





Velocities

Interval-Velocity

$$V_I = \frac{Z_m - Z_n}{t_m - t_n} = \frac{Z_m - Z_n}{\tau_m}$$

Instantaneous Velocity

$$V_{\text{inst}} = \frac{dz}{dt}$$

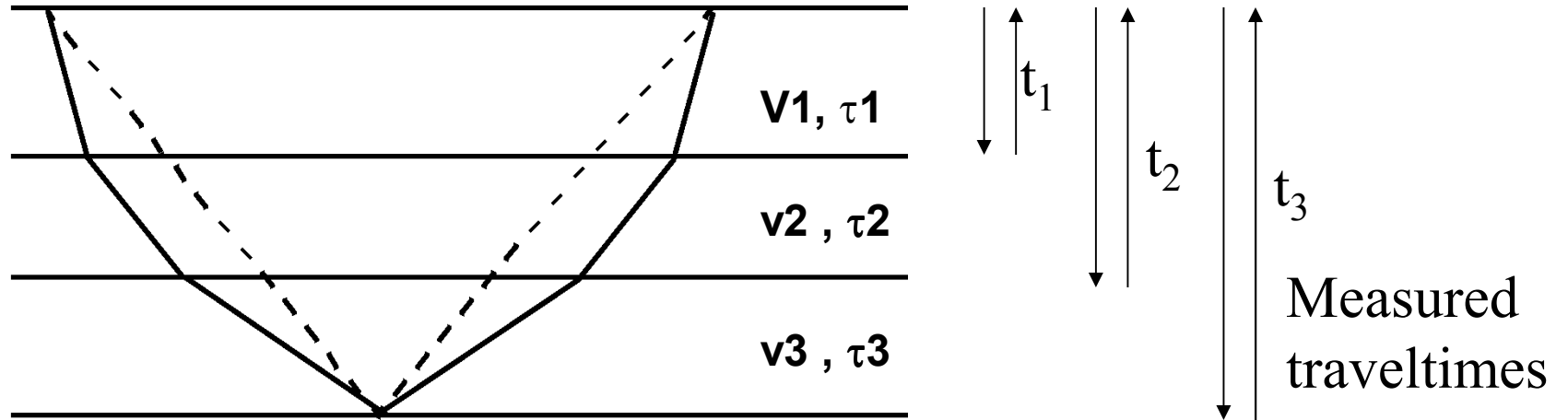
Average-Velocity

$$V_{av} = \frac{\sum_{i=1}^n z_i}{\sum_{i=1}^n \tau_i} = \frac{\sum_{i=1}^n v_i \tau_i}{\sum_{i=1}^n \tau_i}$$

t_m : measured reflected ray traveltime

τ_m : one-way reflected ray traveltime only through m^{th} layer

Several horizontal layers



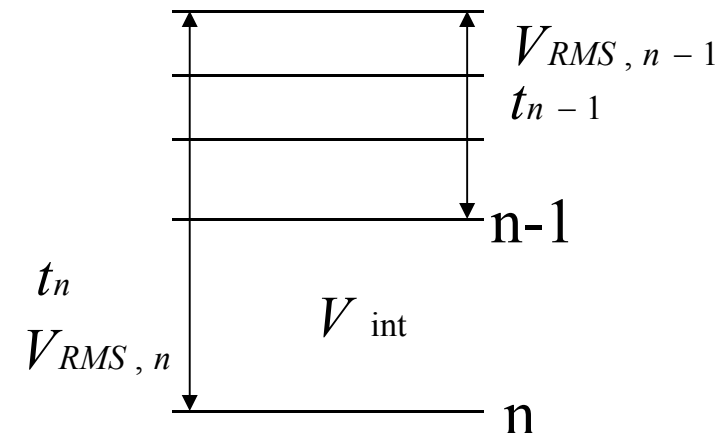
RMS-velocity (root-mean-square)

$$v_{rms}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n v_i^2 \tau_i}{\sum_{i=1}^n \tau_i}$$

Dix' Formula

Conversion from v_{rms} in v_{int} (interval velocities)

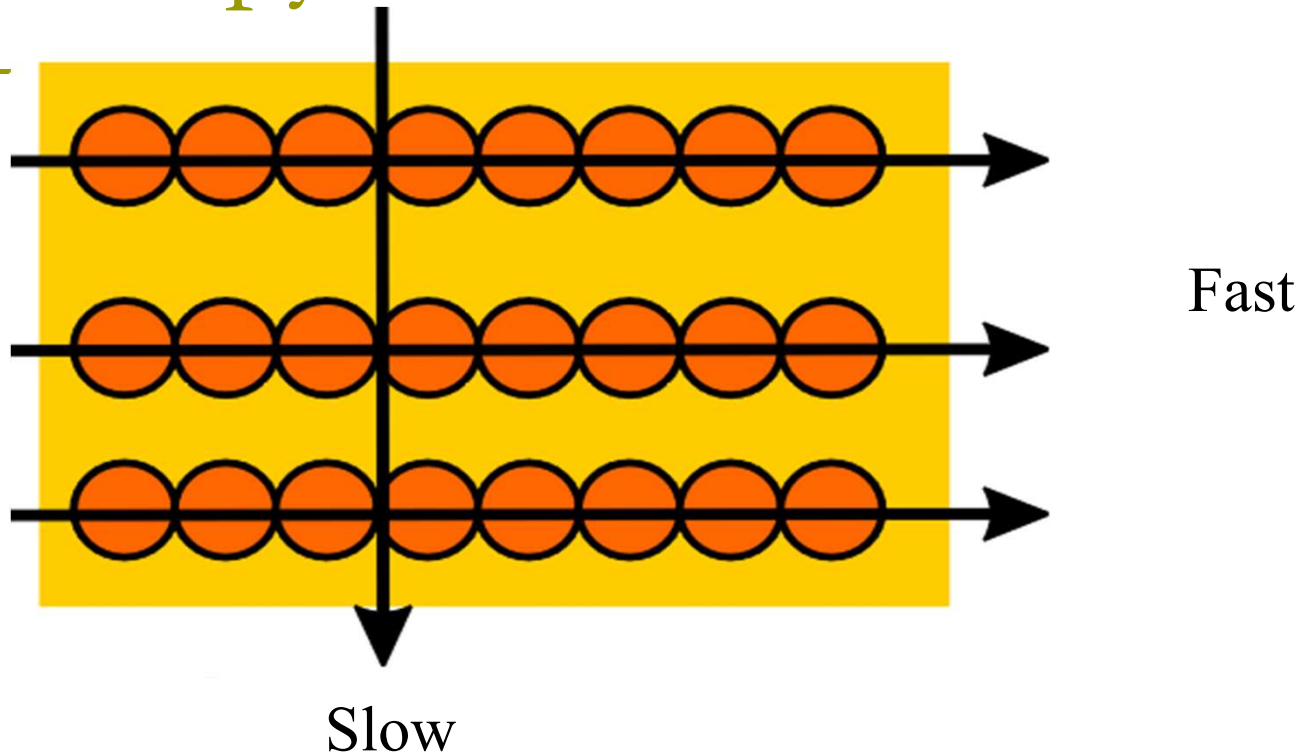
$$V_{int} = \sqrt{\frac{(V_{RMS,n})^2 t_n - (V_{RMS,n-1})^2 t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}}$$



V_{rms} is approximated by the stacking velocity that is obtained by NMO correction of a CMP measurement.

(when maximum offset is small compared with reflector depth)

Anisotropy

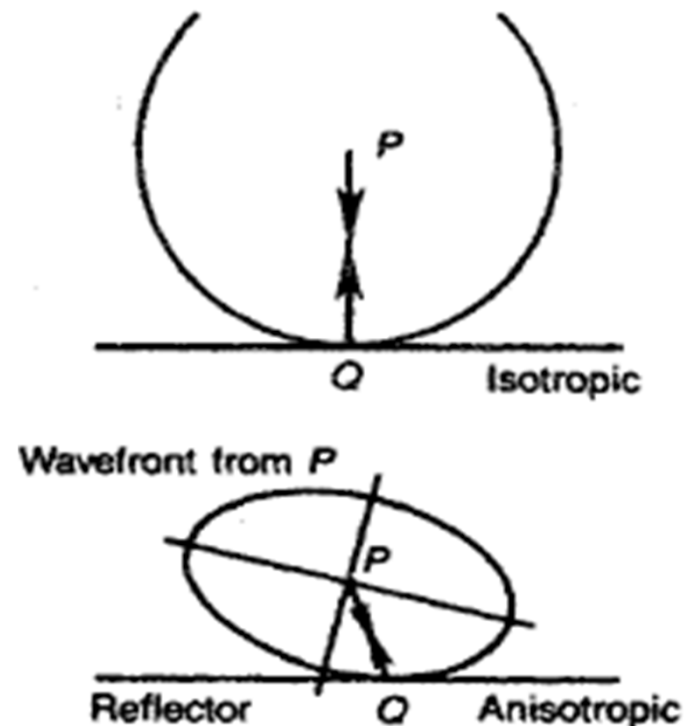
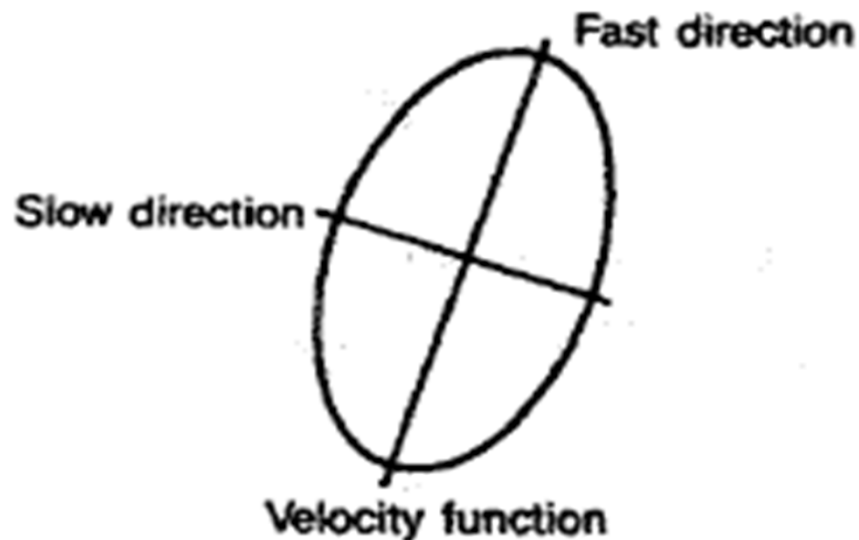


Anisotropy(seismic): Variation of seismic velocity depending on the direction in which it is measured.

Anisotropic media

Media (rocks) in which sound-wave velocity is different in different directions are termed anisotropic.

This may be *macroscopic* in origin, as in a layered gneiss, horizontally laminated shale, or fractured interval with stress-aligned fractures; or may be *intrinsic*, as in a ultramafic tectonite: non-cubic minerals (e.g. olivine) have different velocities in different crystallographic directions, and if the crystal axes are aligned by flow, the rock will be macroscopically anisotropic.



Effect of anisotropy on imaging:

Time migration:

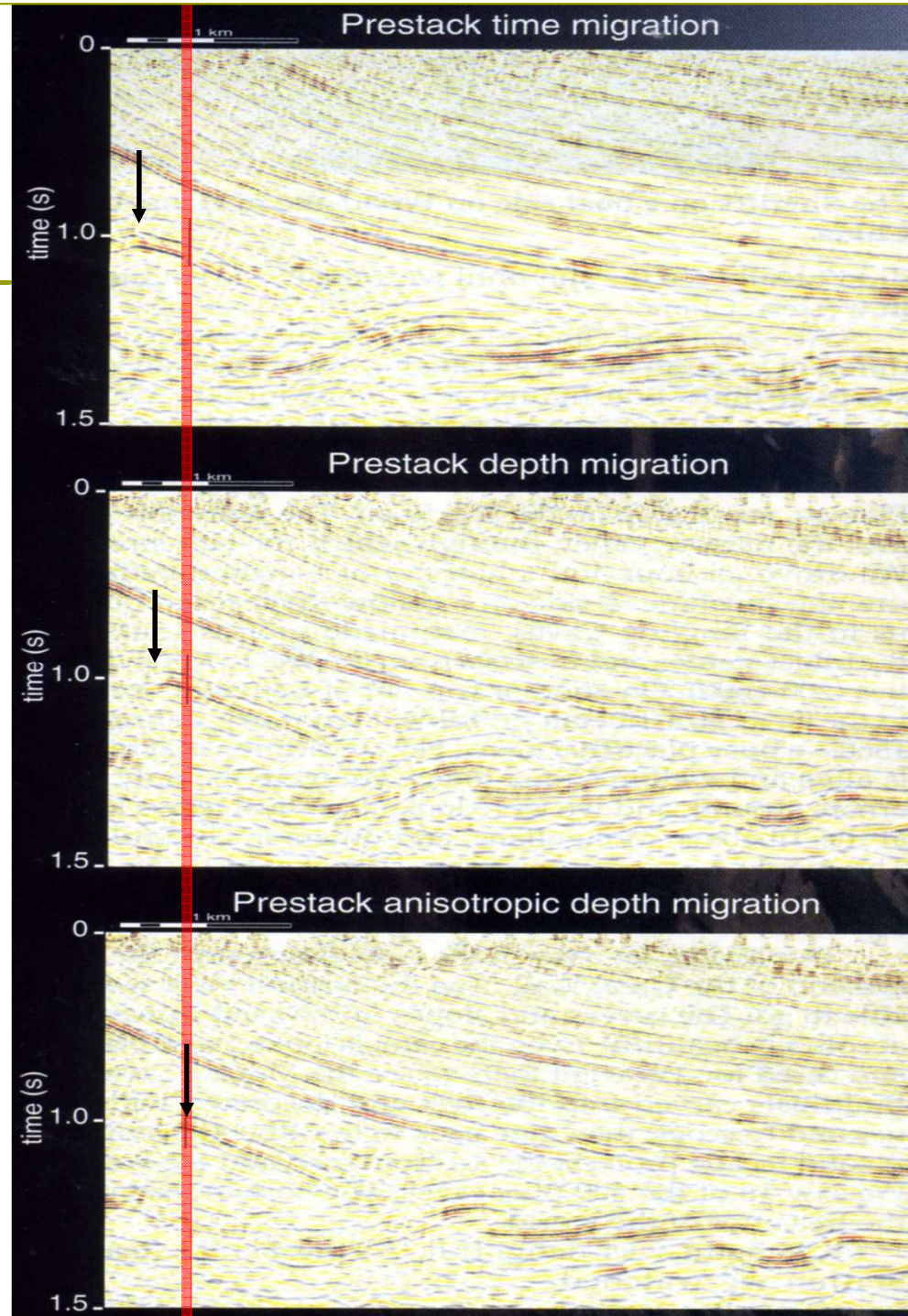
- fast robust process;
- inaccurate lateral position

Depth migration:

- position corrected for lateral velocity changes only;
- model convergence difficult because of anisotropy

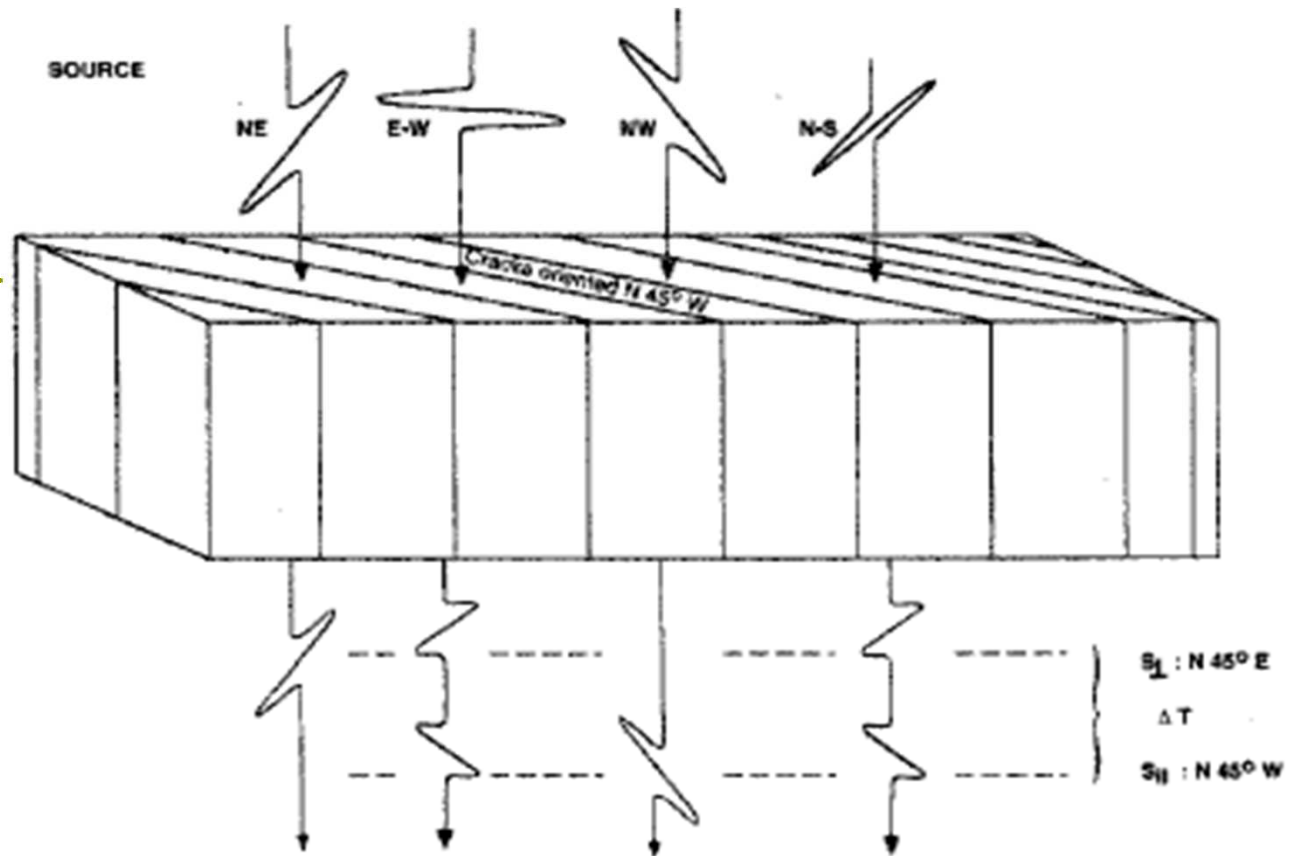
Anisotropic depth migration:

- most accurate lateral position
- model convergence faster, easier



Anisotropic media

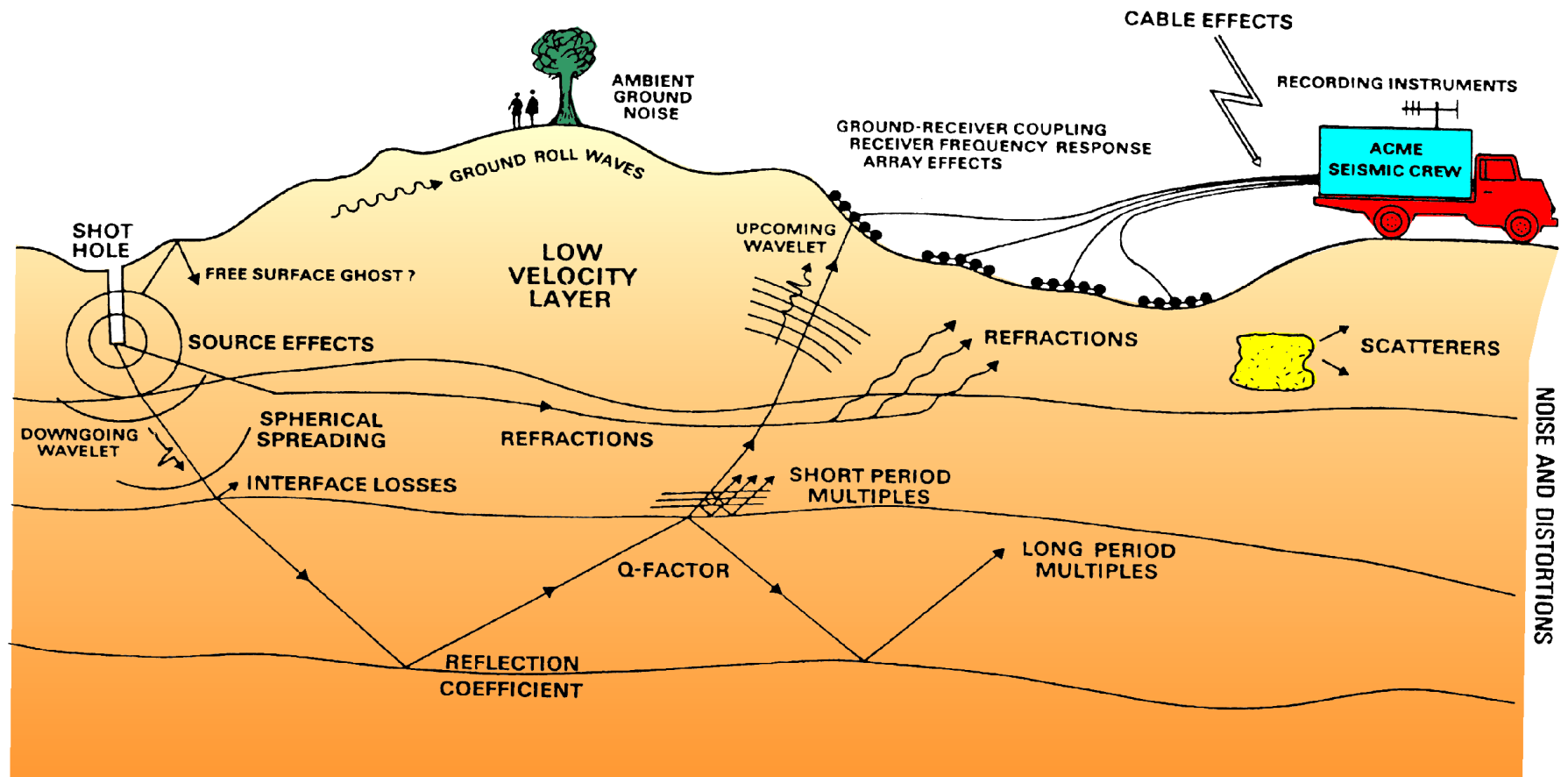
Shear-wave splitting occurs in such rocks, because shear waves can be polarized so that the shear motion is in a single parallel direction. A horizontally travelling shear wave is an SV wave if all the motion is vertical; and is an SH wave if all the motion is horizontal.



What about a wave travelling vertically?
Which is SV?
Which is SH?

Because the polarized SH and SV waves travel at different velocities, delay times between them can be used to detect crack properties of reservoirs.

Processes altering seismic amplitudes



(Reynolds, 1998)

Seismic amplitudes

Affected by

- Reflection and transmission at an interface
- Geometrical spreading
- Absorption
- Receiver response
- Measurement system

Attenuation = spherical divergence + absorption

Combined attenuation effect: $A_r = [A_0 \cdot r_0 \cdot e^{-\alpha r}] / r$

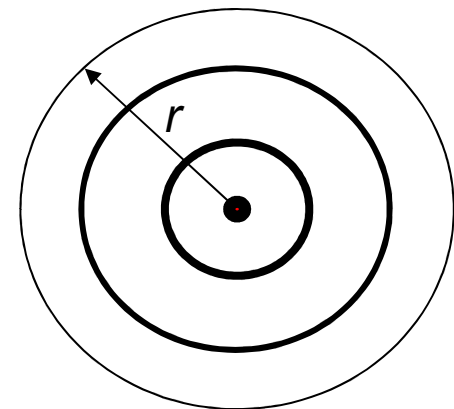
Spherical divergence: energy of wavefront remains constant; but wavefront spreads spherically in a constant-velocity medium and has a surface area $\propto r^2$

Note, $E \sim V\rho(2\pi fA)^2$ - so earthquakes damage structures built on soft sediments

Energy, E , and amplitude, A , are related as $E \propto A^2$ so **$A \propto r^{-1}$**

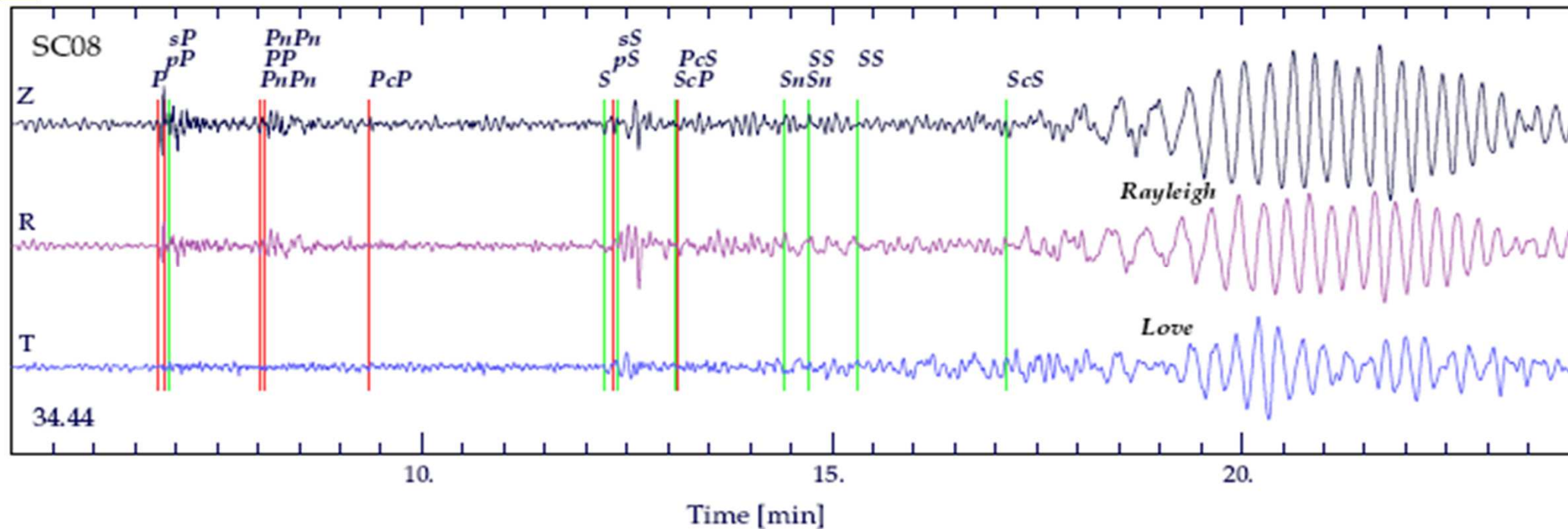
Energy is conserved on the spherical surface.

$$E \propto A^2 \quad A \propto r^{-1}$$



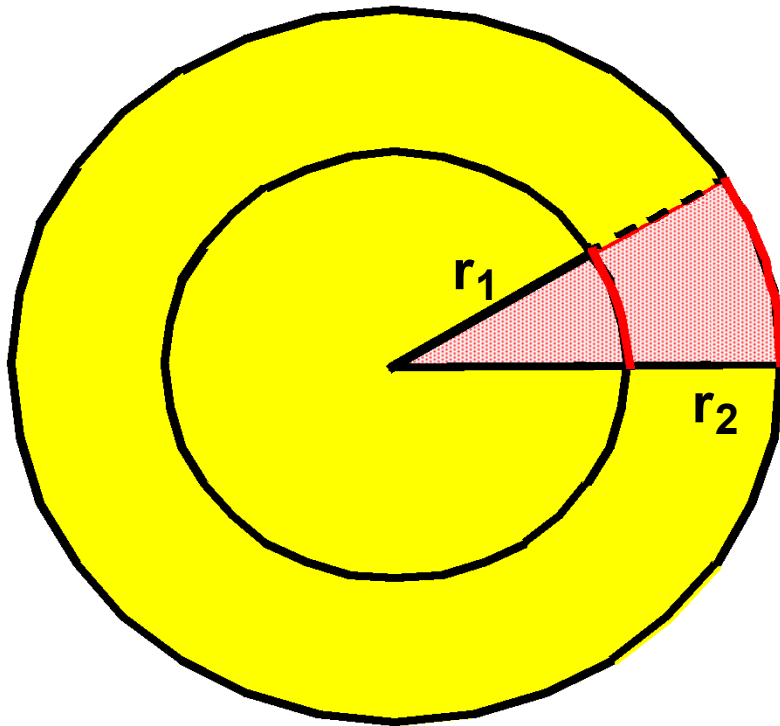
Line thickness represents energy density

Body waves decay over a sphere ($E \sim r^{-2}$)
Surface waves decay over a circle ($E \sim r^{-1}$)



As the distance from the source increases, body waves spread out into the volume of the Earth but the surface wave field is guided along the surface with a much lower spreading rate. As a result the surface wave field tends to become more pronounced and play a major role in the character of the seismic wave train for shallow sources

Geometrical spreading



Energy proportional to:

Plane wave: **constant**

Cylindrical wave: $\sim 1/r$

Spherical wave: $\sim 1/r^2$

Energy is proportional to (Amplitude)²

Attenuation due to geometrical spreading:

$$10^{*10} \log \left(\frac{E(r_1)}{E(r_2)} \right)$$

Absorption

Transformation of Energy into Heat

Amplitude:

$$A = A_0 e^{-\alpha x}$$

$\alpha =$ **Absorption coefficient**

Energy is proportional with A^2

Quality factor

$$Q = \frac{2\pi}{\Delta E / E} = 2\pi \frac{E}{\Delta E} = \frac{2\pi}{\text{Part of energy, that is lost in a cycle}}$$

Relation between Q and α

$$\frac{1}{Q} = \frac{\alpha v}{\pi f} = \frac{\alpha \lambda}{\pi}$$

Absorption is frequency dependent

input
spike

$$\alpha = \frac{\pi f}{Qv}$$

20 ms

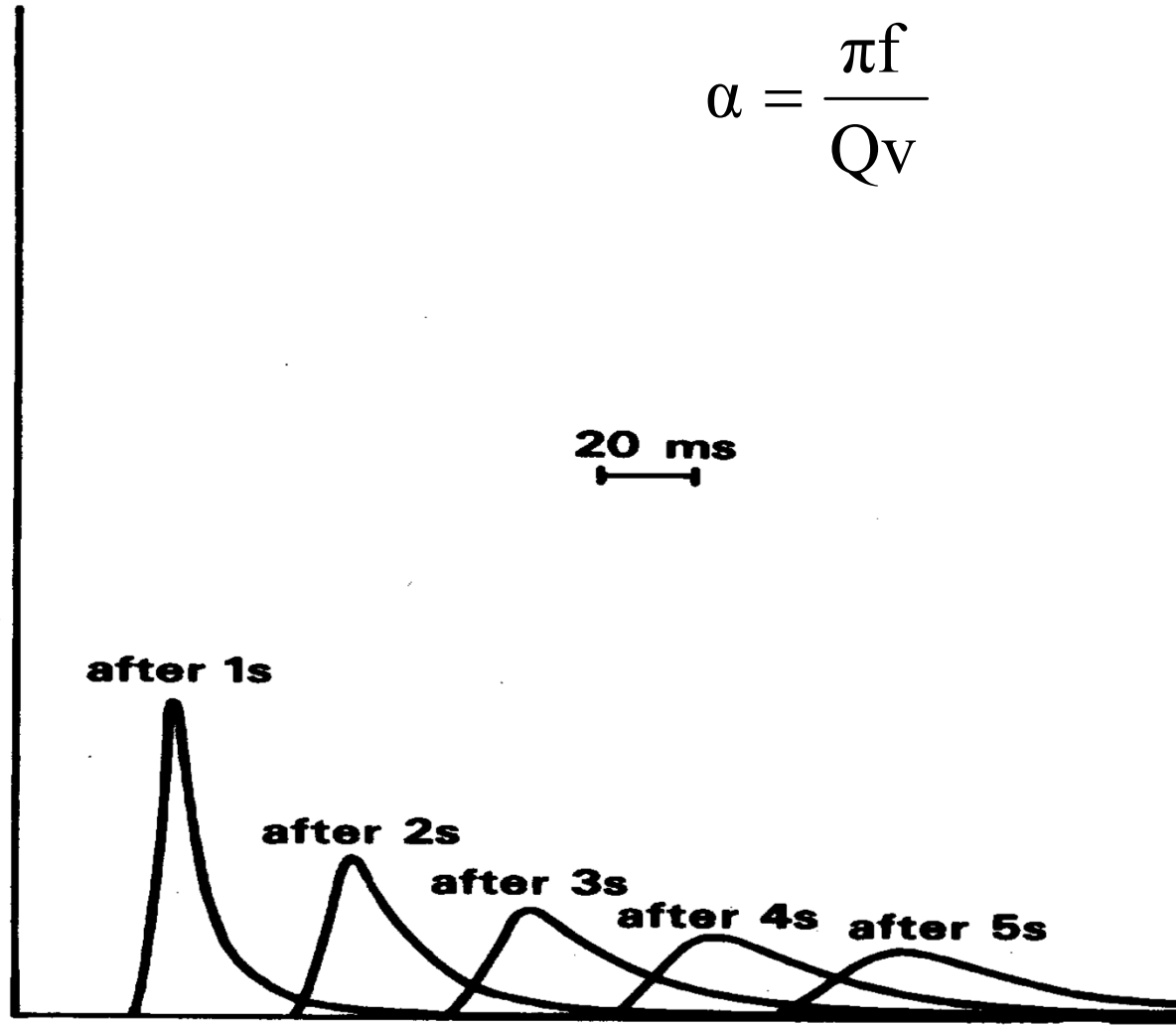
after 1s

after 2s

after 3s

after 4s

after 5s



Common Earth materials

$$0.25 < \alpha < 0.75 \text{ (dB}/\lambda\text{)}$$

$$300 > Q > 50$$

$$Q = \frac{\pi}{\alpha\lambda}$$

Note: $\exp(-\alpha x)$

Attenuation = spherical divergence + absorption

Combined attenuation effect: $A_r = [A_0 \cdot r_0 \cdot e^{-\alpha r}] / r$

Absorption: inelastic transmission of energy produces friction and heat.

Empirically, $A \propto e^{-\alpha r}$ in which α is termed the absorption coefficient (units: m^{-1})

= $\pi \cdot f / Q \cdot v$, where Q (dimensionless) is the quality factor of the rock type in question (regarded as a constant for a particular rock)

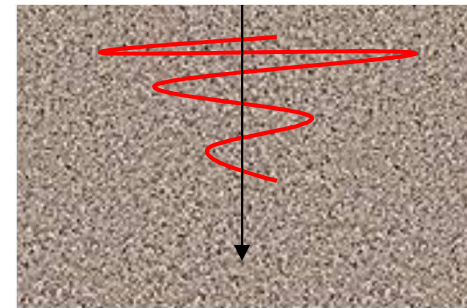
$Q = \pi / \delta$, where δ is the logarithmic decrement, or the natural logarithm of the ratio of amplitudes of two successive maxima or minima in an a decaying wave.

$$A \propto e^{-\alpha r}$$

$$\alpha = \pi f / Q v$$

$$Q = \pi / \delta$$

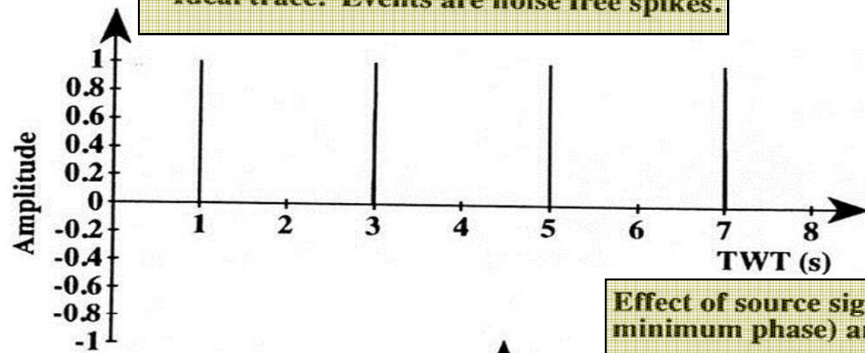
Because of anelastic behavior at the source, we assume the initial amplitude A_0 to be measured over a unit sphere radius r_0



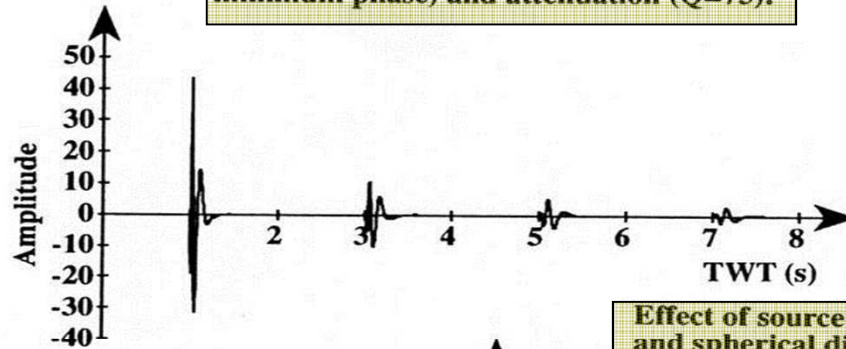
Amplitude decays due to absorption

Combined effect of attenuation and spherical divergence

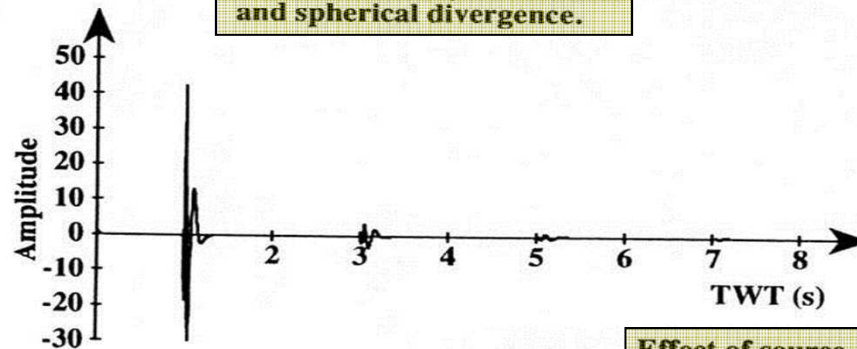
Ideal trace. Events are noise free spikes.



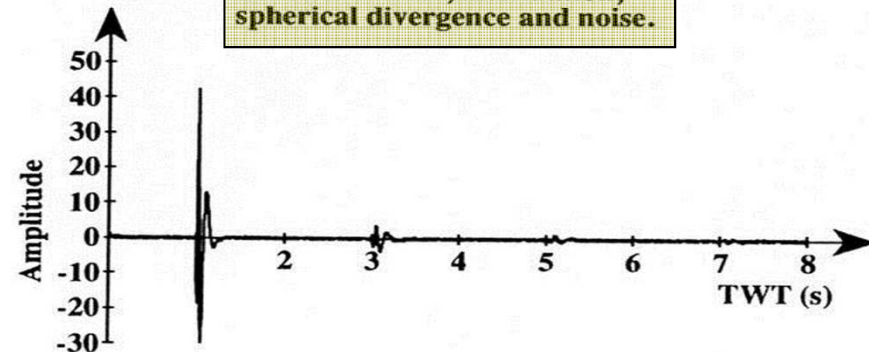
Effect of source signature (0-10-100 Hz minimum phase) and attenuation (Q=75).



Effect of source, attenuation and spherical divergence.



Effect of source, attenuation, spherical divergence and noise.



$$A_r = [A_0 \cdot r_0 \cdot e^{-\alpha r}] / r$$

Amplitude correction ($1/r$) shows increasing significance of constant noise

Attenuation ($Q=75$), spherical divergence, time invariant noise and "spherical divergence" correction ($\text{gain}=t^2$).



Example: seismic amplification in sediments over bedrock

$$R = (V_2 \cdot \rho_2 - V_1 \cdot \rho_1) / (V_2 \cdot \rho_2 + V_1 \cdot \rho_1) \\ = (2-4)/(2+4) = -0.33$$

$$T = 2 \cdot V_1 \cdot \rho_1 / (V_2 \cdot \rho_2 + V_1 \cdot \rho_1) \\ = (4+4)/(2+4) = +1.33$$

$$R + T = 1$$

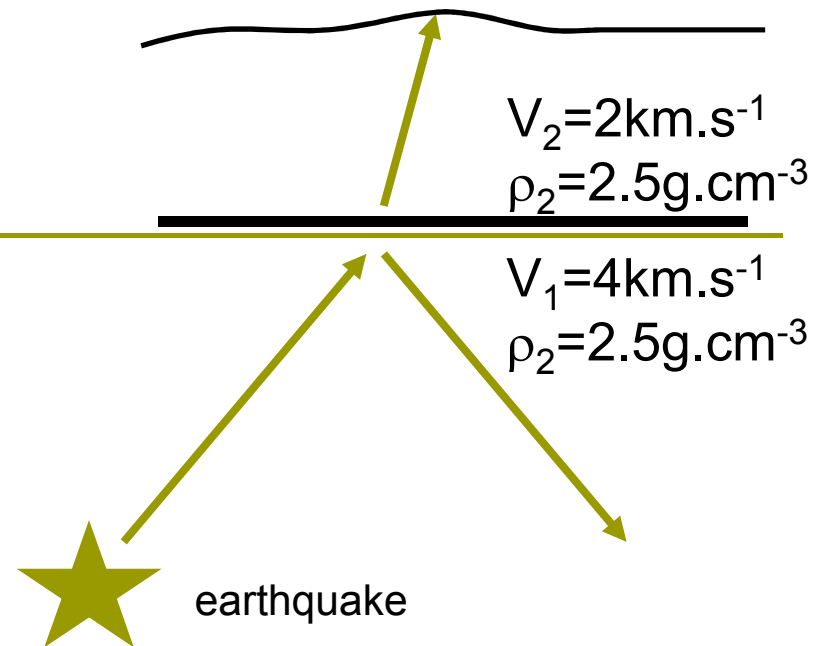
amplitude in low-velocity sediments
is higher than in bedrock

$$E_R = R^2 = (-0.33)^2 = +0.11$$

$$E_T = T^2 \cdot V_2 \cdot \rho_2 / V_1 \cdot \rho_1 = (1.33)^2 \times 2/4 = +0.89$$

$$E_R + E_T = 1$$

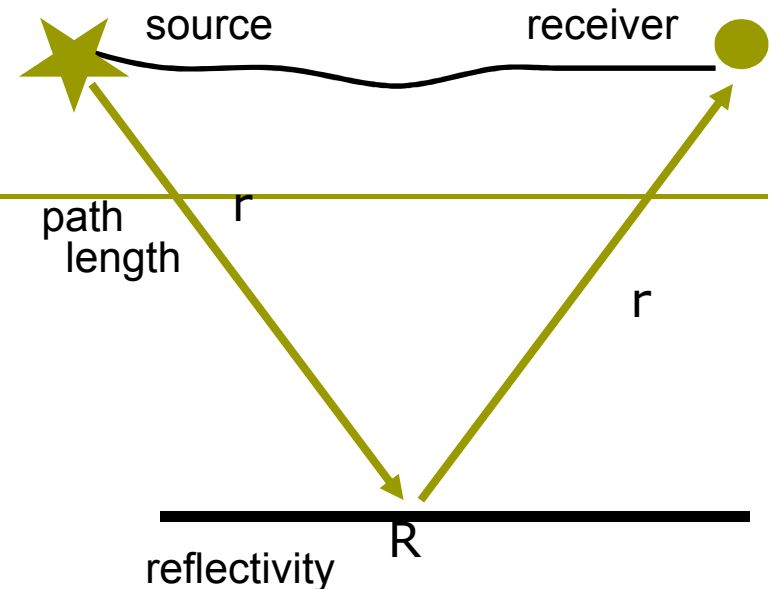
energy is conserved



Example: seismic attenuation by spreading, absorption and reflection

Amplitude decay from source to
reflection point = $e^{-\alpha r}/r$

Amplitude loss on reflection = R



To calculate the total amplitude decay along the entire length of the reflected ray-path, *should we*:

- break down the ray into “ray down” / “reflection” / “ray up”

$$= e^{-\alpha r}/r \cdot R \cdot e^{-\alpha r}/r = R \cdot e^{-2\alpha r}/r^2 \quad ???$$

or

- consider losses over the total path convolved with a reflection

$$= e^{-\alpha 2r}/2r \cdot R = R \cdot e^{-2\alpha r}/2r \quad ???$$

Question 1:

- 20 Hz seismic wave
- Travels with 5 km/s
- Propagates for 1000 m. through
- Medium: absorption coefficient $0.25 \text{ dB}/\lambda$
- What is the wave attenuation in dB due solely to absorption?????

Answer: $\lambda = v/f = 250 \text{ m}$: absorption: $4 * 0.25 = 1 \text{ dB}$

Question 2:

- Wave with $\lambda=100$ m propagates through homogeneous medium
- Between two detectors at radial distances of 1 km and 2 km the wave amplitude is attenuated by 10 dB.
- Calculate contribution of geometrical spreading to this value of attenuation and, thus, determine the absorption coefficient of the medium in dB/ λ .

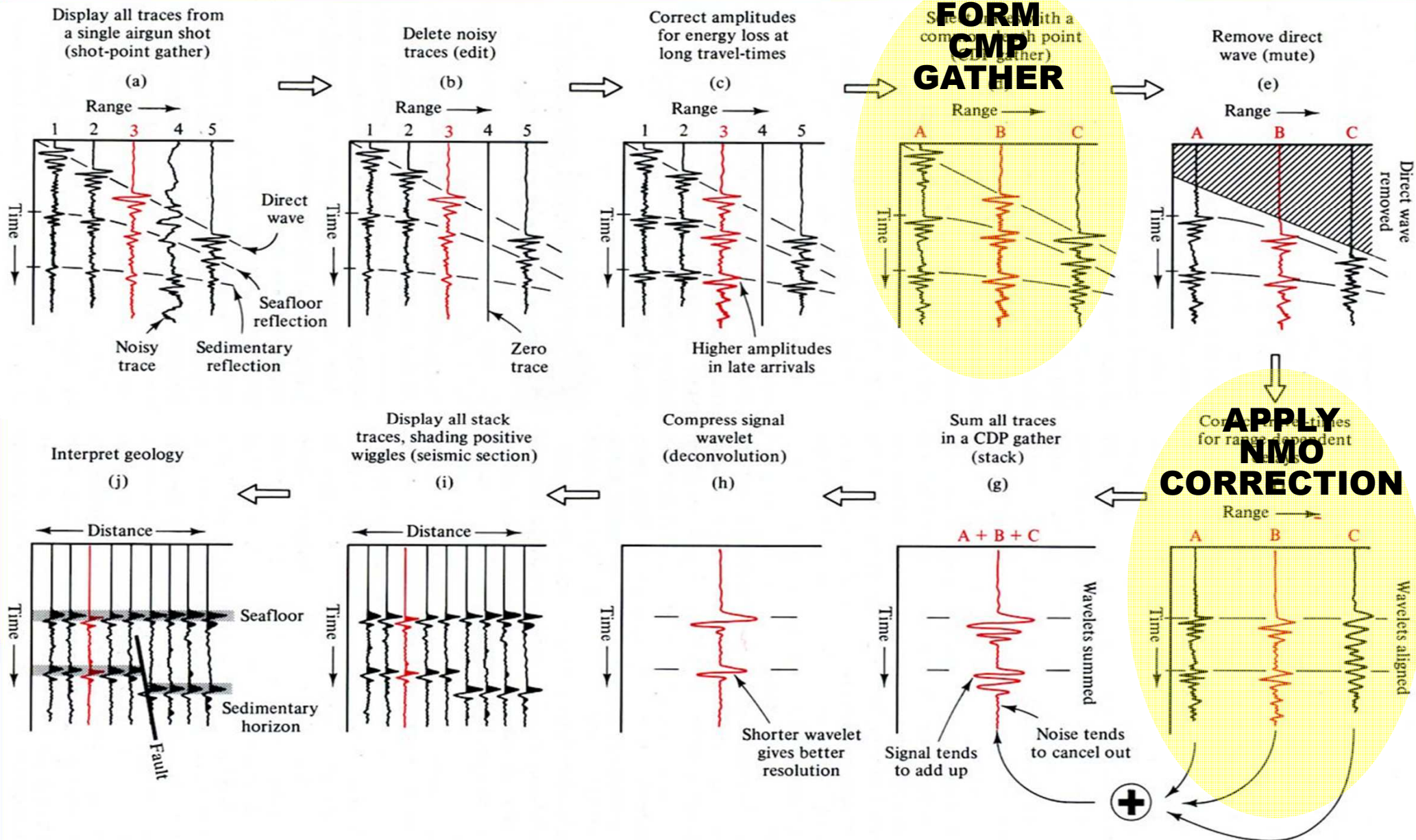
10 dB in 1000 m: 1 dB/ λ

Geometrical spreading: $20^{10}\log(A_0/A) = 20^{10}\log(2) = 6\text{dB}/1\text{km}$
 $= 0.6 \text{ dB}/\lambda \Rightarrow$ absorption coefficient: $1-0.6=0.4 \text{ dB}/\lambda!$

“Velocity”

Measuring velocity (wavespeed) from
CMP seismic data and relating this to
rock velocities

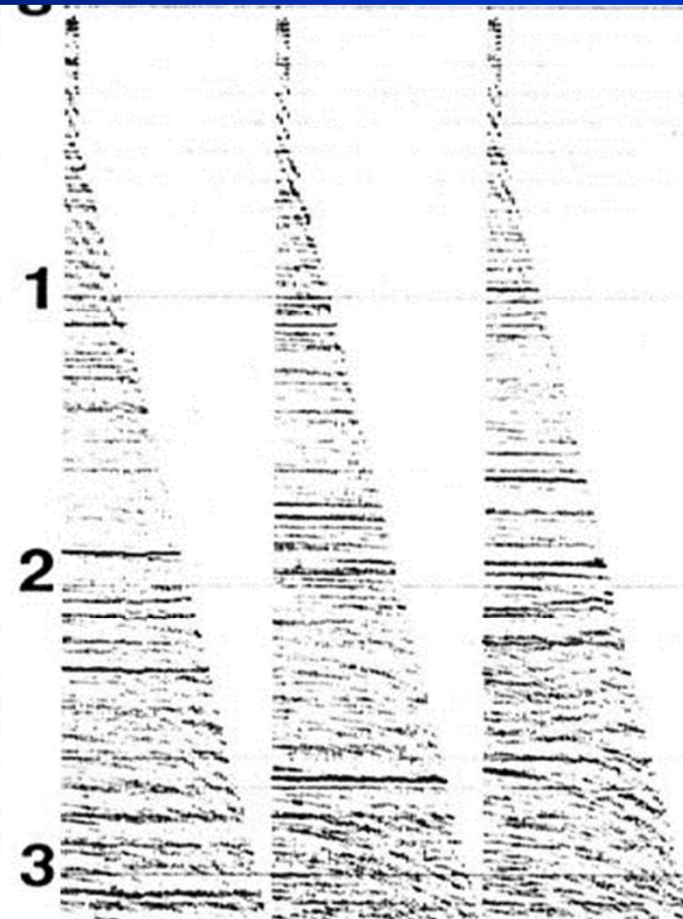
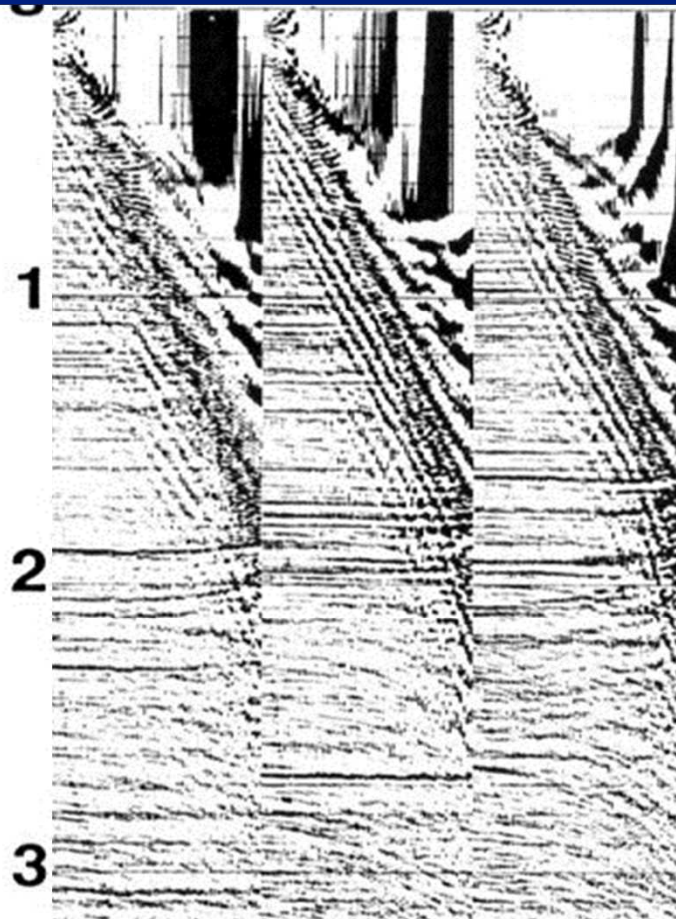
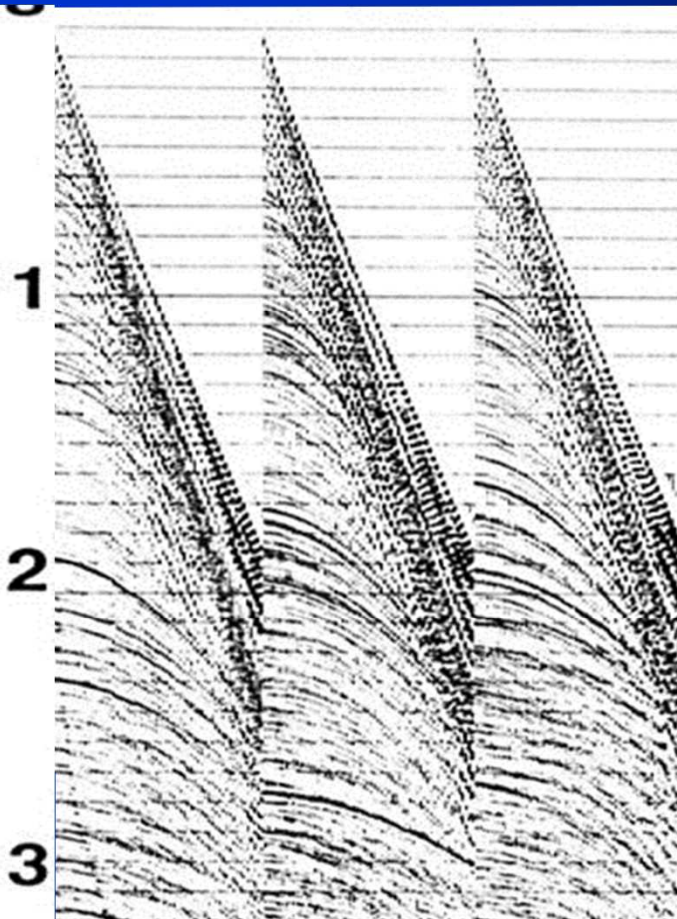
Simplified processing sequence:



Motivation:

Velocity measurements are required for:

- normal-moveout correction before stacking
- correct migration
- time-to-depth conversion for well-ties
- lithological interpretation



Velocity: anything with units of distance/time:

Instantaneous velocity

Apparent velocity

Average velocity

RMS (root-mean-square) velocity

NMO (normal-moveout) velocity

Interval velocity

Stacking velocity

Migration velocity

We need to define them all and remember key differences!

Instantaneous velocity

$$V_{\text{inst}} = dy/dt$$

The local velocity (wave-speed) *along the ray-path* through the rock

The intrinsic velocity of the rock, $V_p = \sqrt{(k + 4\mu/3)/\rho}$

Instantaneous velocity $V_{\text{inst}} = dy/dt$

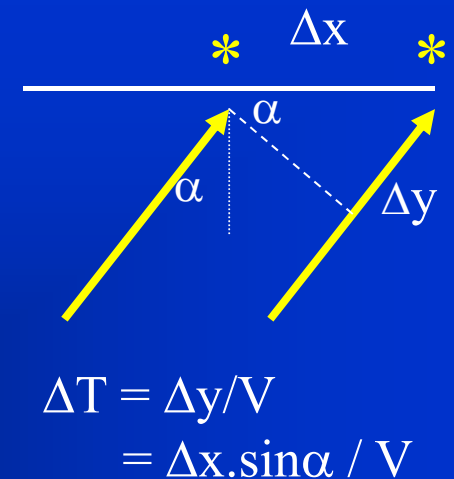
Apparent velocity

$$V_{\text{app}} = [dy/dt] / \sin \alpha = dx/dt$$

The apparent velocity of a seismic phase between a pair (or along a line) of receivers.

Typically measured at the earth's surface, but could be down-hole.

Typically measured radially from the source, but could be oblique (for off-line arrivals).



Instantaneous velocity

$$V_{inst} = dy/dt$$

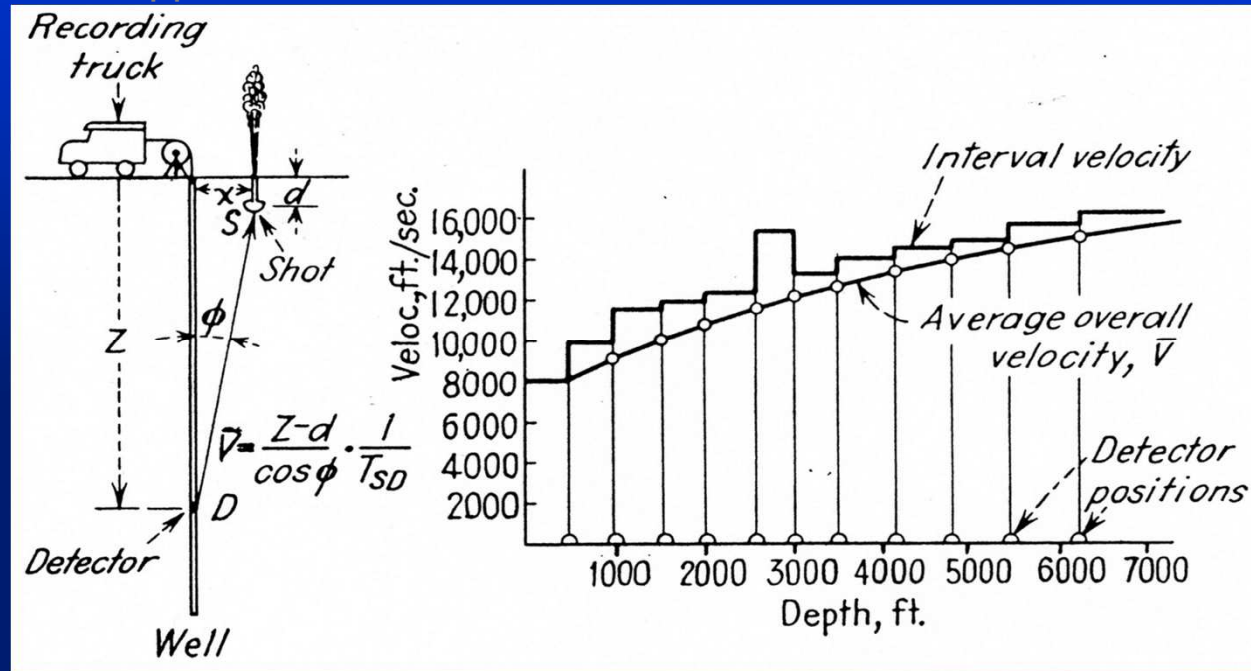
Apparent velocity

$$V_{\text{app}} = [dy/dt] / \sin \alpha = dx/dt$$

Average velocity

$$V_{av} = \Sigma z / \Sigma t = \Sigma Vt / \Sigma t$$

Just like it sounds,
average velocity is
total distance / total travel-time.



Typically calculated for the vertical travel path to a reflector.
Average velocity is used to convert from travel-time to depth.

Instantaneous velocity

$$V_{\text{inst}} = dy/dt$$

Apparent velocity

$$V_{\text{app}} = [dy/dt] / \sin \alpha = dx/dt$$

Average velocity

$$V_{\text{av}} = \Sigma z / \Sigma t = \Sigma Vt / \Sigma t$$

Interval velocity

$$V_i = \Delta z / \Delta t$$

average velocity between two reflections,
i.e. equivalent to a real rock velocity (instantaneous velocity) if
the two reflections bracket a uniform lithology; hence the
velocity we want for lithological interpretation.

Could be directly measured in the subsurface using a downhole
sonic tool.

In practice measured from surface seismic data,
via estimates of RMS velocities,

using the Dix equation: $V_i^2 = \Delta[V_{\text{rms}}^2 \cdot t] / \Delta t$;

$$V_{\text{interval}}^2 = [V_{\text{rms}(\text{base})}^2 \cdot t_{\text{base}} - V_{\text{rms}(\text{top})}^2 \cdot t_{\text{top}}] / [t_{\text{base}} - t_{\text{top}}]$$

(so, what's an RMS velocity?)

Instantaneous velocity

$$V_{\text{inst}} = dy/dt$$

Apparent velocity

$$V_{\text{app}} = [dy/dt] / \sin \alpha = dx/dt$$

Average velocity

$$V_{\text{av}} = \Sigma z / \Sigma t = \Sigma Vt / \Sigma t$$

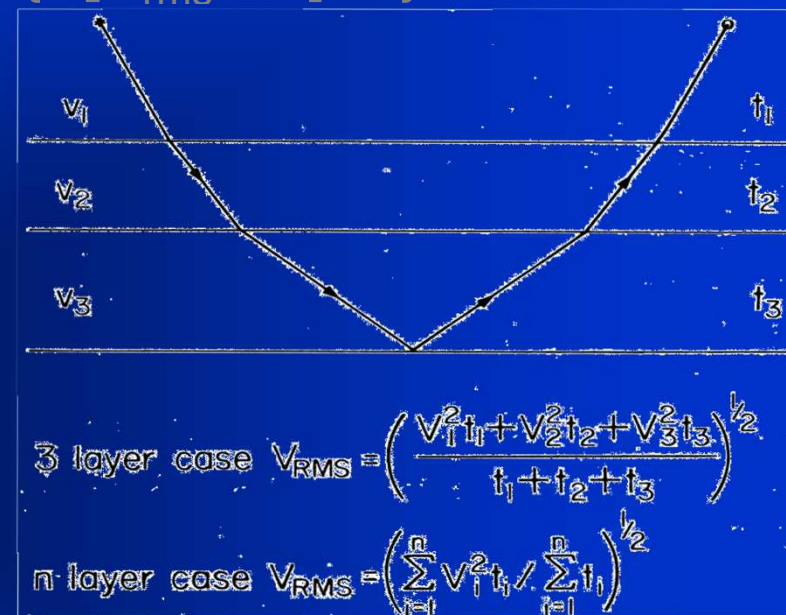
Interval velocity

$$V_i = \Delta z / \Delta t = \sqrt{\{\Delta[V_{\text{rms}}^2 \cdot t] / \Delta t\}}$$

RMS (root-mean-square) velocity

$$V_{\text{rms}} = \sqrt{[\Sigma V^2 t / \Sigma t]}$$

V_{rms} is the root-mean-square of the interval velocities weighted by the interval-times - *cf.* average velocity.



V_{rms} is the rms of the intrinsic velocity of the rocks through which the waves travel, so is *independent* of geometry

We cannot measure V_{rms} directly, but we can estimate it and use it in the Dix equation to calculate interval velocities

$$= \Delta[V_{\text{rms}}^2 \cdot t] / \Delta t$$

$$V_i^2$$

Instantaneous velocity

$$V_{\text{inst}} = dy/dt$$

Apparent velocity

$$V_{\text{app}} = [dy/dt] / \sin \alpha = dx/dt$$

Average velocity

$$V_{\text{av}} = \Sigma z / \Sigma t = \Sigma Vt / \Sigma t$$

Interval velocity

$$V_i = \Delta z / \Delta t = \sqrt{\{\Delta[V_{\text{rms}}^2 \cdot t] / \Delta t\}}$$

RMS velocity

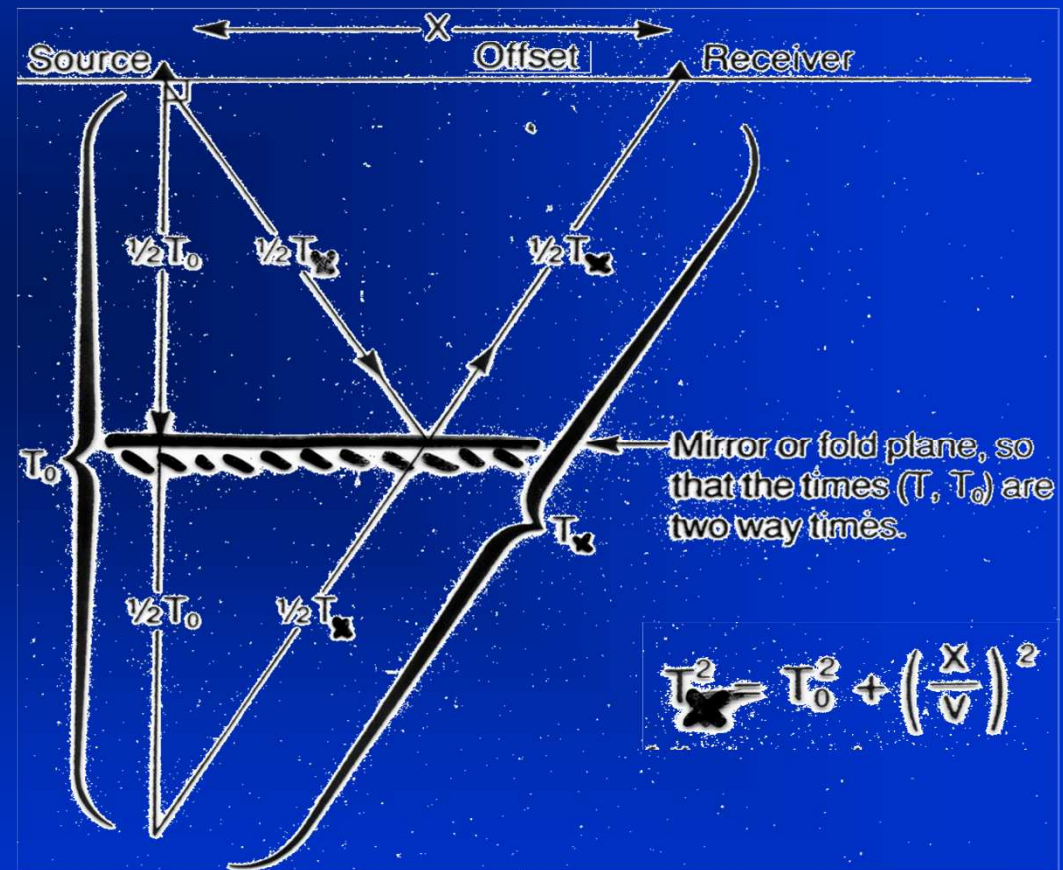
$$V_{\text{rms}} = \sqrt{[\Sigma V^2 t / \Sigma t]}$$

**NMO (normal-moveout)
velocity**

$$T_x^2 = T_0^2 + X^2 / V_{\text{nmo}}^2$$

V_{nmo} is the velocity that appears in the NMO equation, i.e. that velocity which best fits observed arrival times to a hyperbola.

We can measure this!
and equate $V_{\text{nmo}} = V_{\text{rms}}$



Instantaneous velocity

$$V_{\text{inst}} = dy/dt$$

Apparent velocity

$$V_{\text{app}} = [dy/dt] / \sin \alpha = dx/dt$$

Average velocity

$$V_{\text{av}} = \Sigma z / \Sigma t = \Sigma Vt / \Sigma t$$

Interval velocity

$$V_i = \Delta z / \Delta t = \sqrt{\Delta[V_{\text{rms}}^2 \cdot t] / \Delta t}$$

RMS velocity

$$V_{\text{rms}} = \sqrt{[\Sigma V^2 t / \Sigma t]}$$

NMO velocity

$$T_x^2 = T_0^2 + X^2 / V_{\text{nmo}}^2$$

Stacking velocity

(no equation possible)

that velocity which, when applied to CMP gathers via the NMO equation, produces the best looking CMP stack section, despite the presence of noise, multiples, etc...

Migration velocity

(no equation possible)

that velocity used to migrate the stack section to achieve the final stack

Stacking and Migration velocities are *subjective* and often have a *cosmetic* component (multiple & smile suppression)

8 “different” velocities:

Instantaneous velocity	$V_{\text{inst}} = dy/dt$ (along raypath)
Apparent velocity	$V_{\text{app}} = [dy/dt] / \sin \alpha = dx/dt$
Average velocity	$V_{\text{av}} = \Sigma z / \Sigma t = \Sigma Vt / \Sigma t$
Interval velocity	$V_i = \Delta z / \Delta t = \sqrt{\{\Delta[V_{\text{rms}}^2 \cdot t] / \Delta t\}}$
RMS velocity	$V_{\text{rms}} = \sqrt{[\Sigma V^2 t / \Sigma t]}$
NMO velocity	$T_x^2 = T_0^2 + X^2 / V_{\text{nmo}}^2$
Stacking velocity	(no equation)
Migration velocity	(no equation)

Motivation:

Velocity measurements are required for:

normal-moveout correction before stacking

- *we want stacking velocity*

correct migration

- *we want migration velocity*

time-to-depth conversion for well-ties

- *we want average velocity*

lithological interpretation

- *we want intrinsic, rock velocity V_{inst}*

- *we approximate V_{inst} with interval velocity V_i*

- *we calculate V_i from RMS velocity V_{rms}*

- *we obtain V_{rms} by assuming $V_{rms} = V_{nmo}$*

- we obtain V_{nmo} by fitting hyperbolae to data,*

- or - we obtain V_{rms} by assuming $V_{rms} = V_{stacking}$*

- we obtain $V_{stacking}$ by test-stacking data*

V_{rms} and V_{nmo}

Proof that $V_{rms} = V_{nmo}$ for small offsets

RMS velocity: defined as root-mean-square of interval velocities, interval-time-weighted,

$$V_{rms} = \sqrt{[\Sigma V^2 t / \Sigma t]}$$

NMO velocity: defined from the NMO equation, $T_x^2 = T_0^2 + X^2/V_{nmo}^2$

Let us *assume* that we can define RMS velocity in the same way *for small offsets*, and then show that the definition of V_{rms} is satisfied.

Using a converging series expansion $T_x^2 = A + B.X^2 + C.X^4 + D.X^6 + \dots$
with coefficients

$$A = T_0^2$$

$$B = 1 / V_{rms}^2$$

C, D ... are progressively smaller

i.e. our definition of V_{rms} has become $T_x^2 = T_0^2 + X^2/V_{rms}^2 + 0(X^4)$

V_{rms} and V_{nmo}

Proof that $V_{rms} = V_{nmo}$ for small offsets

For the two-layer model,

$$X = x_1 + x_2 = 2 (z_1 \cdot \tan i + z_2 \cdot \tan r)$$

$$\therefore X \approx 2 (V_1 \cdot t_1 \cdot \sin i + V_2 \cdot t_2 \cdot \sin r) \Leftarrow$$

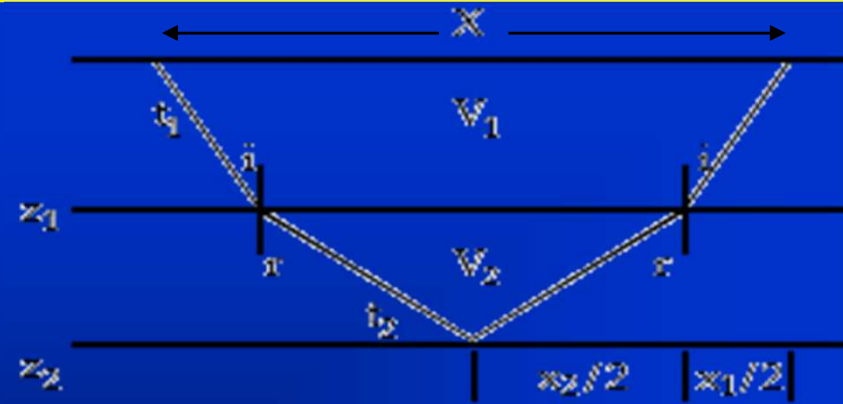
$$\therefore X \approx \frac{2 \sin i}{V_1} (V_1^2 \cdot t_1 + V_2^2 \cdot t_2) \Leftarrow$$

$$\therefore X \approx \frac{2X}{V_{rms}^2 \cdot T_X} (V_1^2 \cdot t_1 + V_2^2 \cdot t_2) \Leftarrow$$

$$\therefore V_{rms}^2 \approx \frac{(V_1^2 \cdot t_1 + V_2^2 \cdot t_2)}{t_1 + t_2} \Leftarrow$$

$$\therefore V_{rms}^2 \approx \frac{\sum V_i^2 \cdot t_i}{\sum t_i}$$

corresponding to our original definition!



$\sin \theta = \tan \theta$
(small-angle approximation)

$\sin r = (V_2 \cdot \sin i) / V_1$
(Snell's Law)

$$\frac{V_1}{\sin i} = V_{app} = \frac{dX}{dt} = \frac{V_{rms}^2 \cdot T_X}{X}$$

$(T_X^2 = T_0^2 + X^2/V_{rms}^2)$

$$\frac{T_X}{2} \approx t_1 + t_2$$

(true at small-offsets)

V_{rms} and V_{nmo}

$V_{nmo} = V_{inst}$ for a single constant-velocity layer above a horizontal reflector

Important result: $V_{nmo} \approx V_{rms}$ for small offsets for multiple horizontal layers

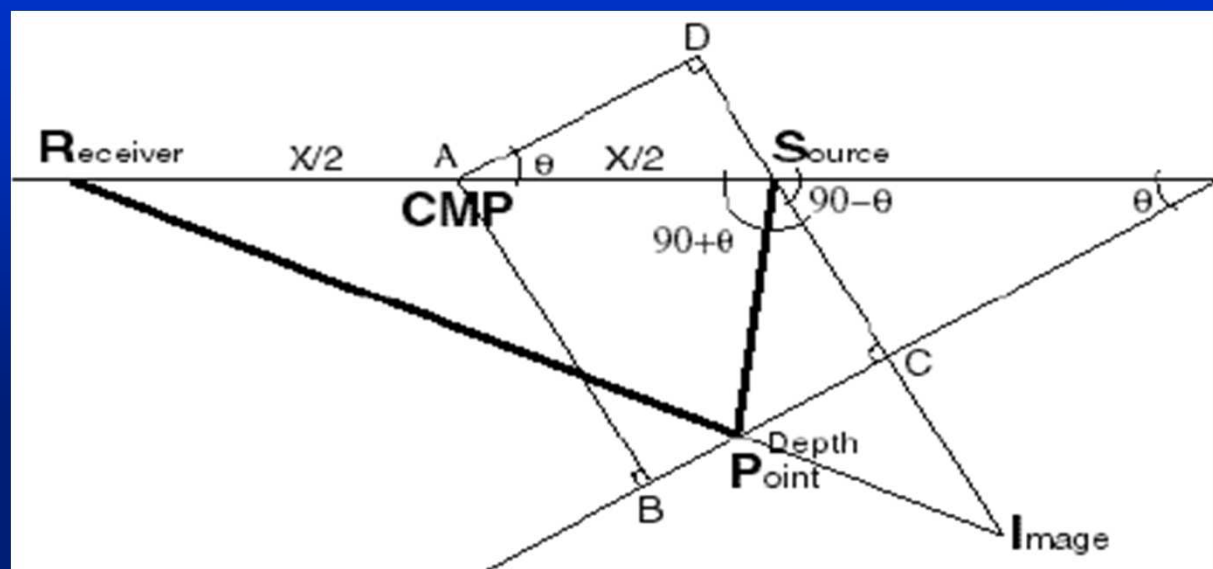
V_{nmo} and V_{rms} are often treated as identical;
but in fact are very different:

V_{nmo} is interpreted from CMP gathers, and so is *affected* by reflector geometries, e.g. reflector dips.

V_{rms} is the rms of the intrinsic velocity of the rocks through which the waves travel, so is *independent* of geometry

Important result: $V_{nmo} \approx V_{inst} / \cos\theta$ for a single dipping layer

Important result: $V_{nmo} \approx V_{inst} / \cos\theta$ for a single dipping layer:



$AB = V.T_0 / 2$ (T_0 is zero-offset travel-time from the mid-point A to the orthogonal reflection point B)

$V.T_x = SP + PR = IPR$ (T_x is the travel-time at an offset X from the source S to the receiver R)

Use the cosine rule, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$:

$$\therefore V^2.T_x^2 = SI^2 + SR^2 - 2.SI.SR.\cos(90^\circ + \theta)$$

But $\cos(90^\circ + \theta) = -\sin\theta$

$SR = X$

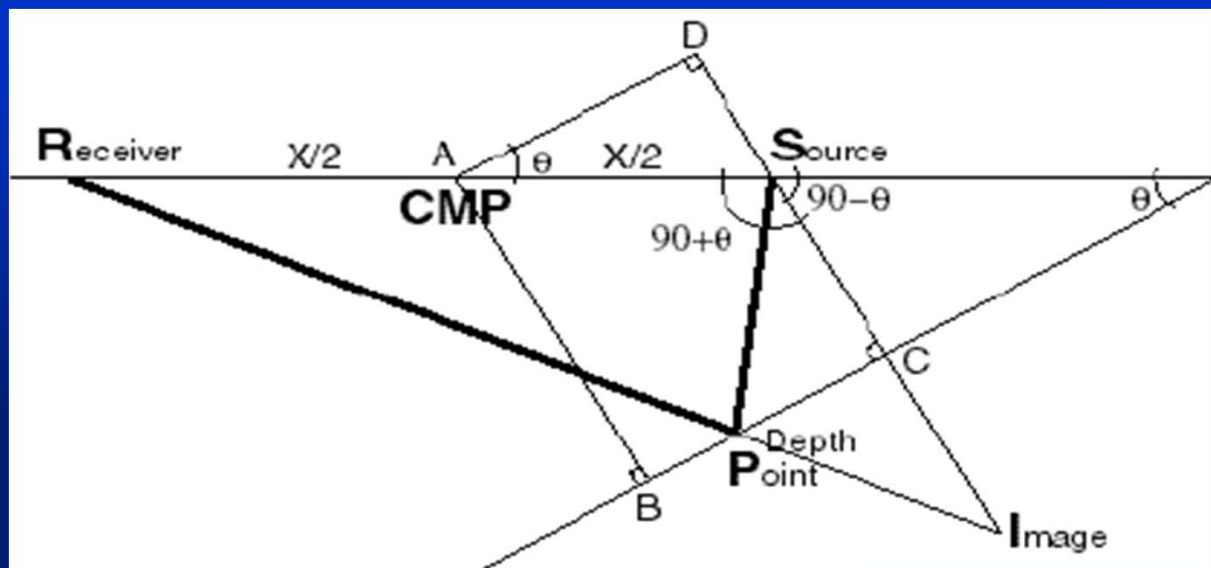
and $SI = 2(CD - SD)$; with $CD = AB = V.T_0 / 2$ and $SD = \sin\theta.X/2$

$\therefore SI = V.T_0 - X.\sin\theta$

$$\therefore V^2.T_x^2 = (V.T_0 - X.\sin\theta)^2 + X^2 + 2.(V.T_0 - X.\sin\theta).X.\sin\theta$$

Important result: $V_{nmo} \approx V_{inst}/\cos\theta$ for a single dipping layer:

Using the principle of reciprocity, we can reverse source and receiver positions, hence the formula is true whether shooting up-dip or down-dip



$$\begin{aligned}\therefore V^2 \cdot T_x^2 &= (V \cdot T_0 - X \cdot \sin\theta)^2 + X^2 + 2 \cdot (V \cdot T_0 - X \cdot \sin\theta) \cdot X \cdot \sin\theta \\ &= V^2 T_0^2 - 2VT_0 X \sin\theta + X^2 \sin^2\theta + X^2 + 2VT_0 X \sin\theta - 2X^2 \sin^2\theta \\ &= V^2 T_0^2 + X^2(1 - \sin^2\theta) = V^2 T_0^2 + X^2 \cdot \cos^2\theta\end{aligned}$$

$$\therefore T_x^2 = T_0^2 + \frac{X^2 \cdot \cos^2\theta}{V^2}$$

By definition, $T_x^2 = T_0^2 + \frac{X^2}{V_{nmo}^2}$

$$\therefore V_{nmo} = V/\cos\theta$$

Because the formula is true both shooting up-dip & down-dip, CMP gathers must be symmetric with reflection hyperbolae that have their apex at zero-offset

Practical approach:

pick NMO velocities (from constant velocity gathers &/or
from semblance plots)

&/or pick stacking velocities (from constant-velocity stacks);

then use these velocities to calculate Dix interval velocities V_i ,

$$\text{i.e. assume } V_{\text{nmo}} \approx V_{\text{stack}} \approx V_{\text{rms}}$$

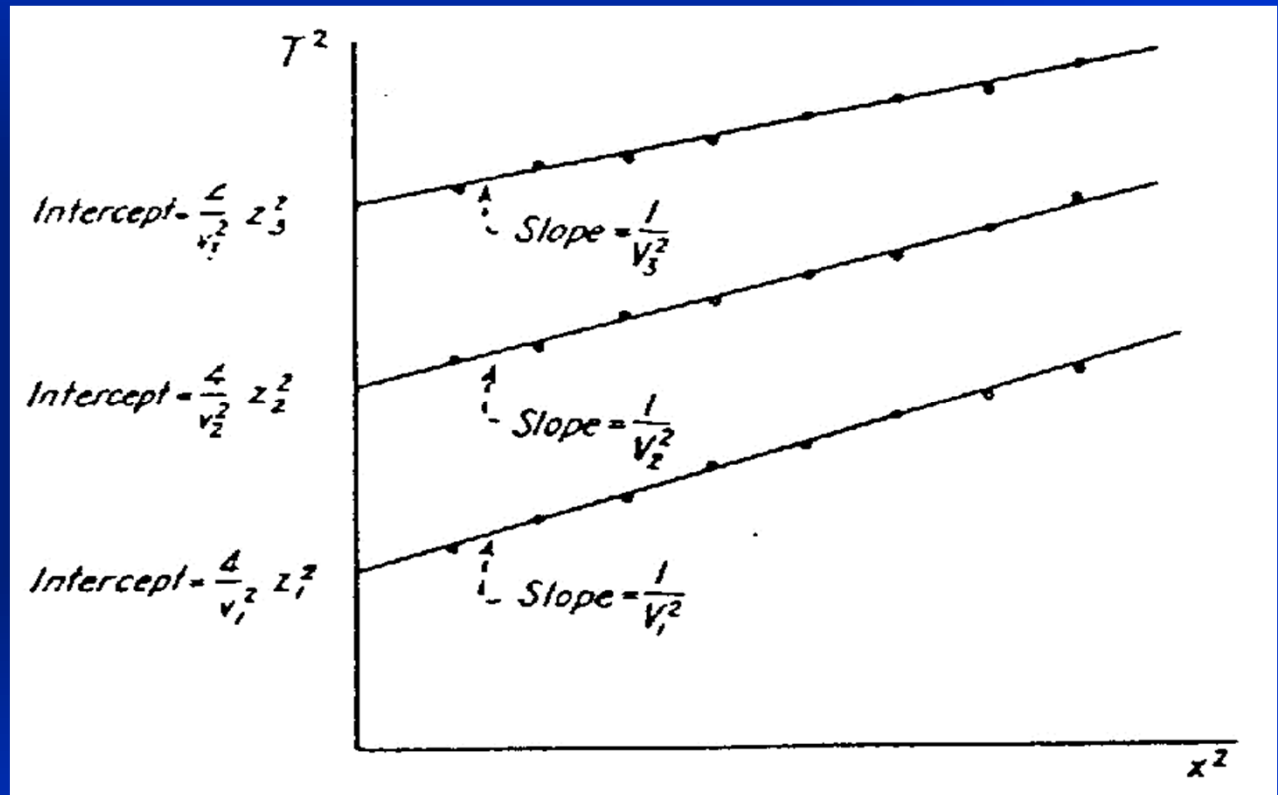
Velocity estimation from seismic data:

- **$T_{\text{squared}}-X_{\text{squared}}$ plots** (gradient = $1/V_{\text{squared}}$)
- **Constant-velocity gathers** (= velocity scans)
- **Constant-velocity stacks** (= mini-stacks)
- **Semblance plots**

Velocity estimation from seismic data:

- **$T_{\text{squared}}-X_{\text{squared}}$ plots** (gradient = $1/V_{\text{squared}}$)

$$T_X^2 = T_0^2 + X^2/V_{\text{nmo}}^2$$



Velocity estimation from seismic data:

Time, s	0.90	1.25	1.87	2.50	2.90	3.33
Stacking velocity, m/s	1870	2010	2170	2700	3370	3550

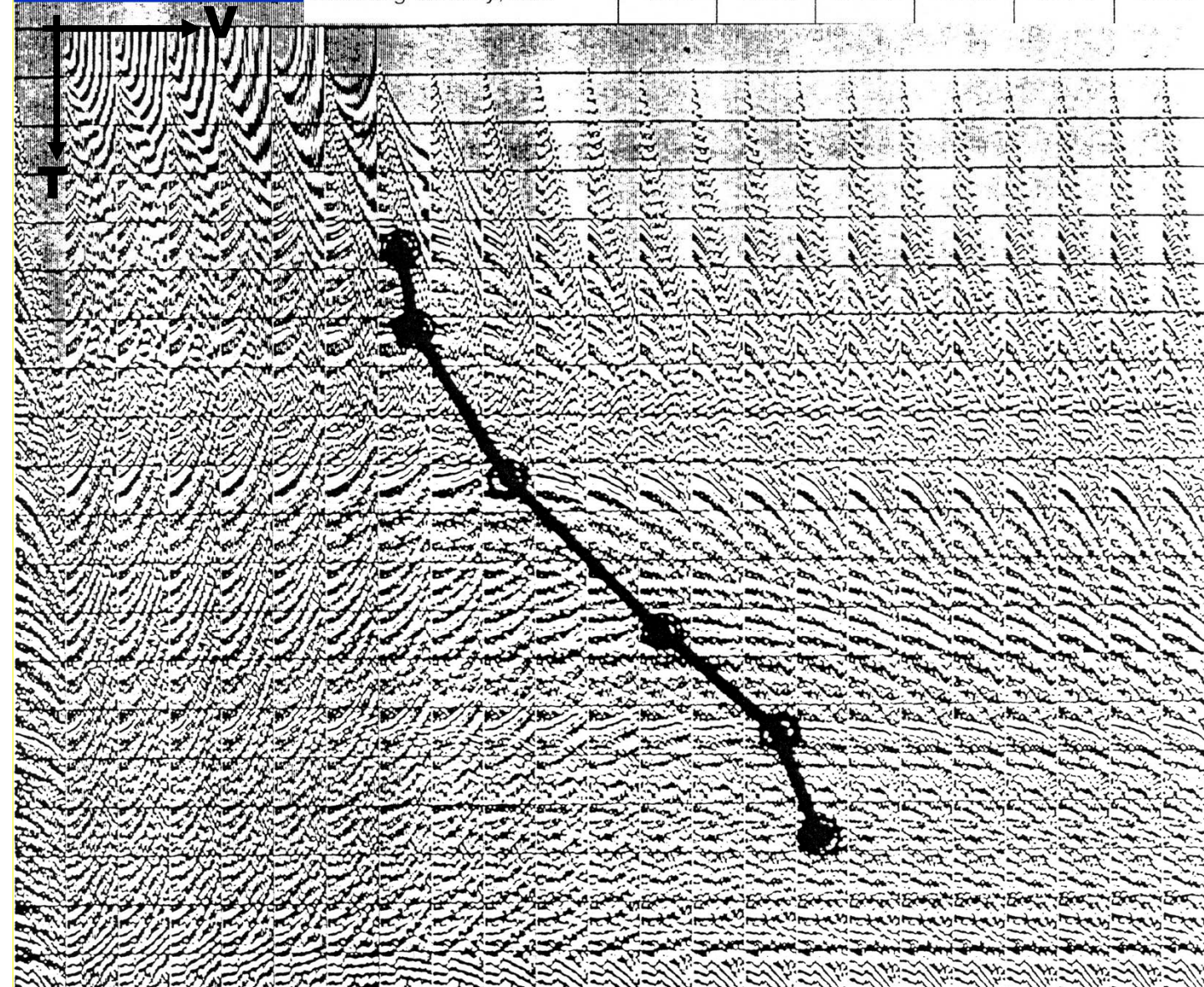
•Constant-velocity gathers

aka “velocity scans”

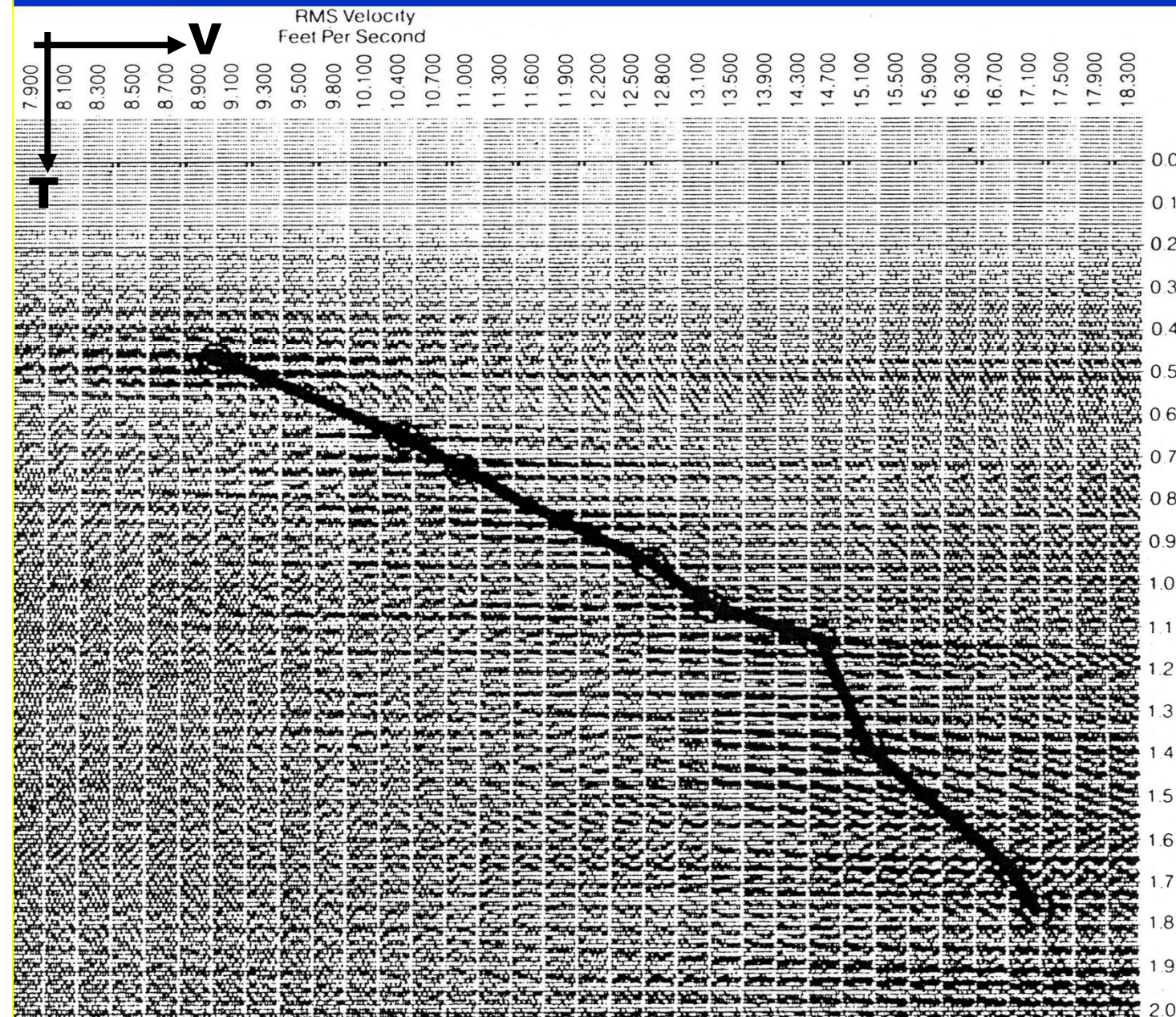
need not be constant
velocity: function gathers
may use a linear velocity
function

the analyst visually
interprets the velocity at
which a reflection is
flattened

note caption says
“stacking velocity”, even
though velocity scans
imply NMO velocities!



Velocity estimation from seismic data:



•Constant-velocity stacks

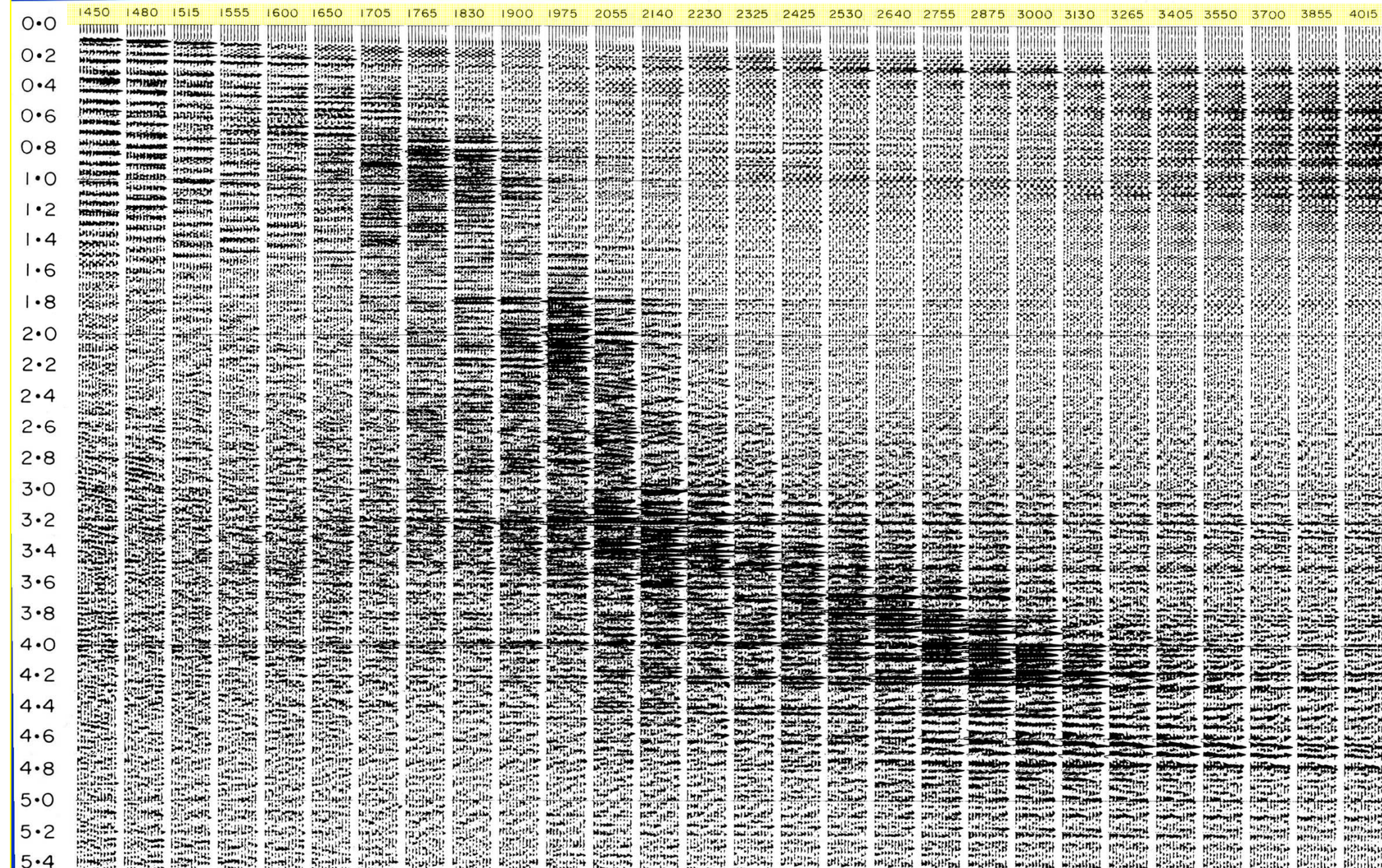
aka "mini-stacks"

can be "function stacks" instead of constant velocity

the analyst visually interprets the velocity at which a reflection is best imaged

note caption says "RMS velocity", even though mini-stacks imply stacking velocities!

Another set of mini-stacks: notice non-linear variation in velocities: *why?*



Linear Systems

- Linear systems: basic concepts
- Other transforms
 - z-transform
- Applications:
 - Convolutional model for seismograms

Scope: Understand that many problems in geophysics can be reduced to a linear system (filtering, tomography, inverse problems).

Linear Systems

Figure 6.3-1: Definition of a linear system.

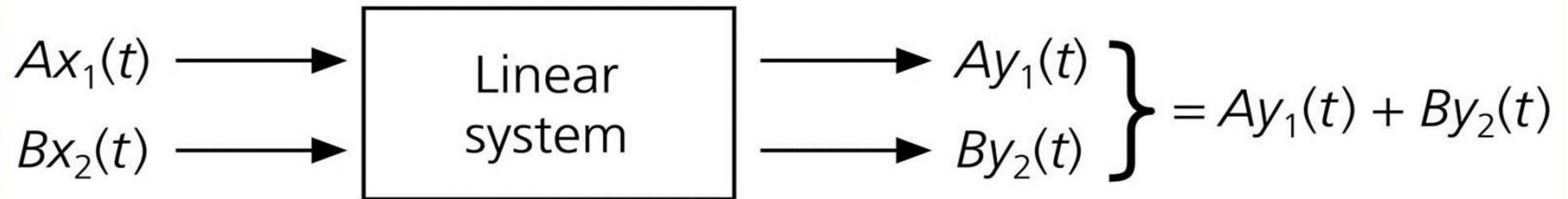
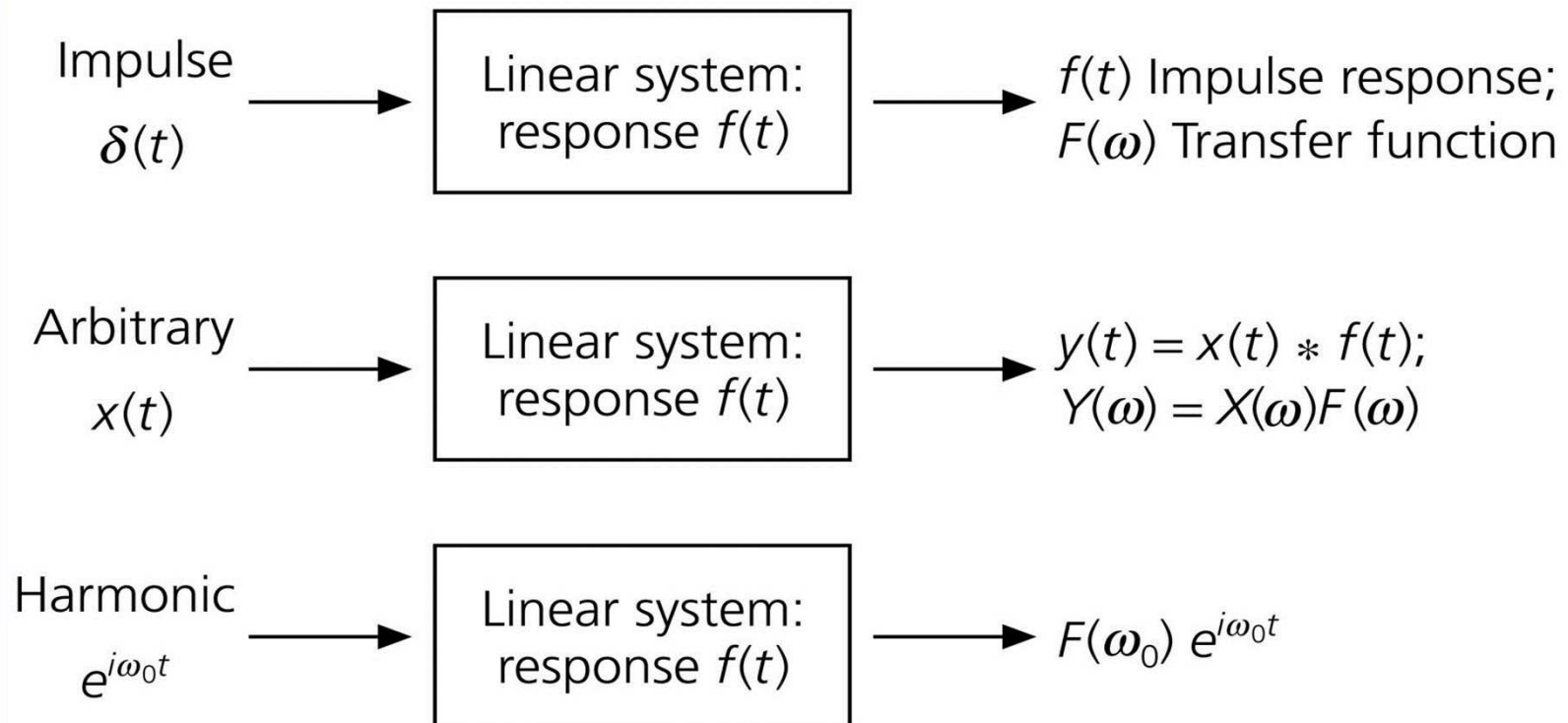
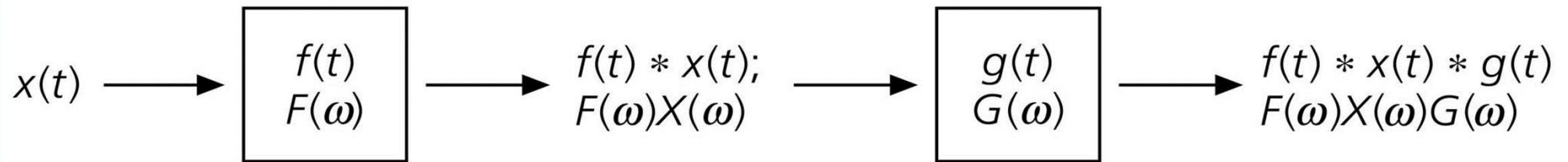


Figure 3.3-29: Seismic section before and after deconvolution.



Convolution theorem

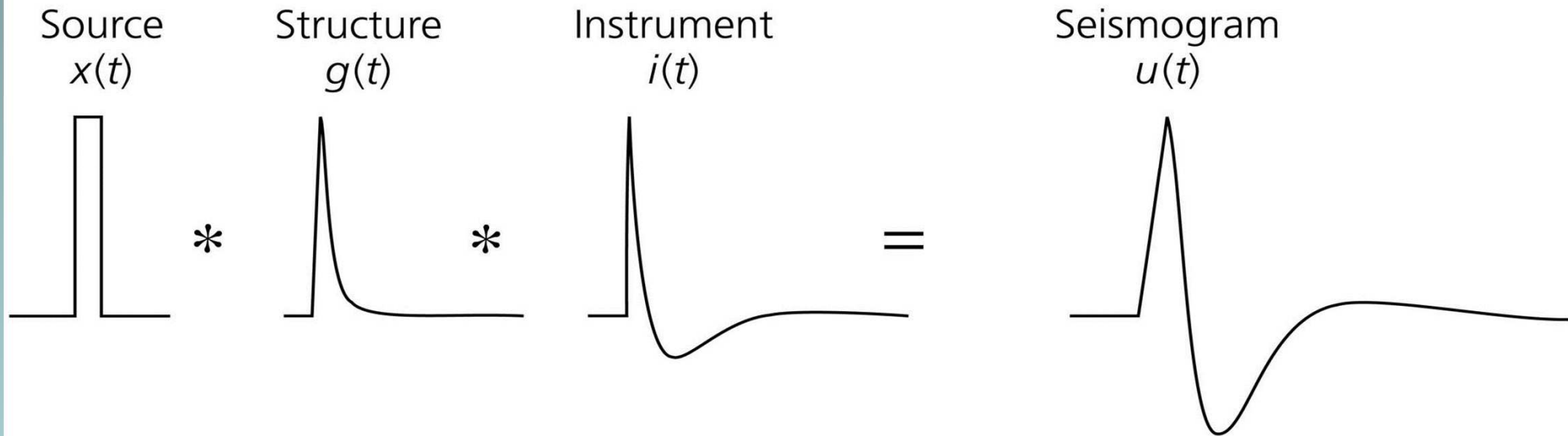
Figure 6.3-4: Two linear systems in succession.



The output of a linear system is the convolution of the input and the impulse response (Green's function)

Example: Seismograms

Figure 6.3-5: Seismogram as the convolution of the source, structure, and instrument signals.



Synthetic Seismic

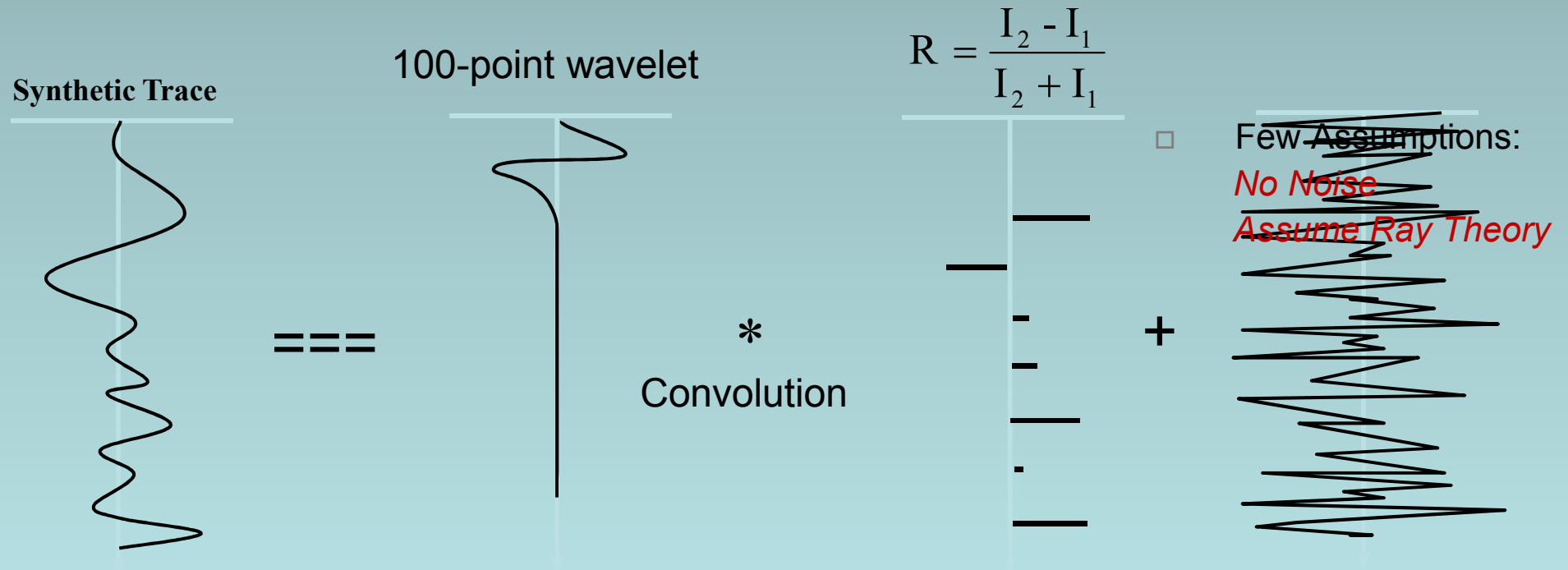
$$X(t) = W(t) * R(t) + N(t)$$

Synthetic Trace

Input and System Wavelet

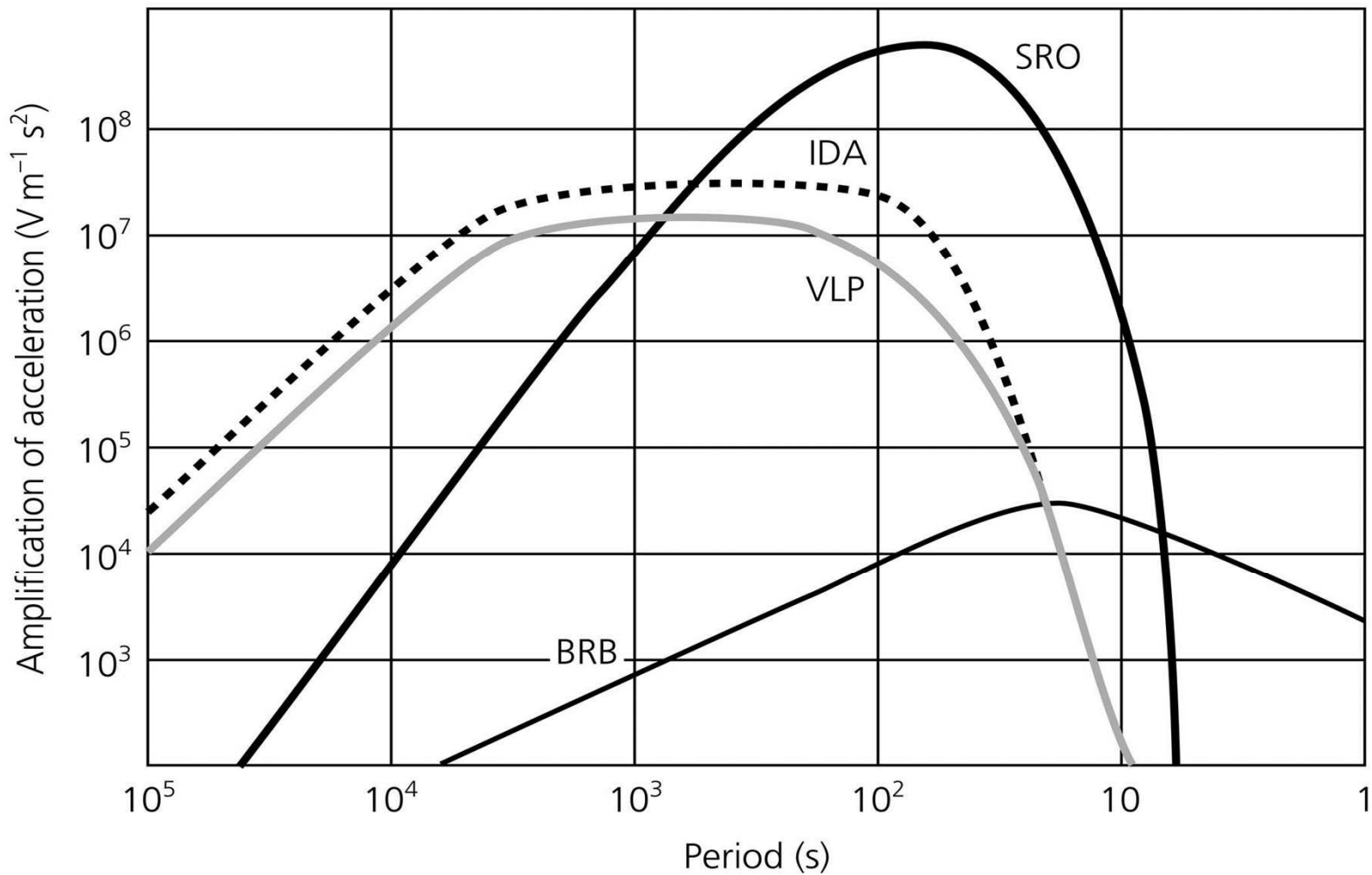
Reflectivity Series

Noise = 0

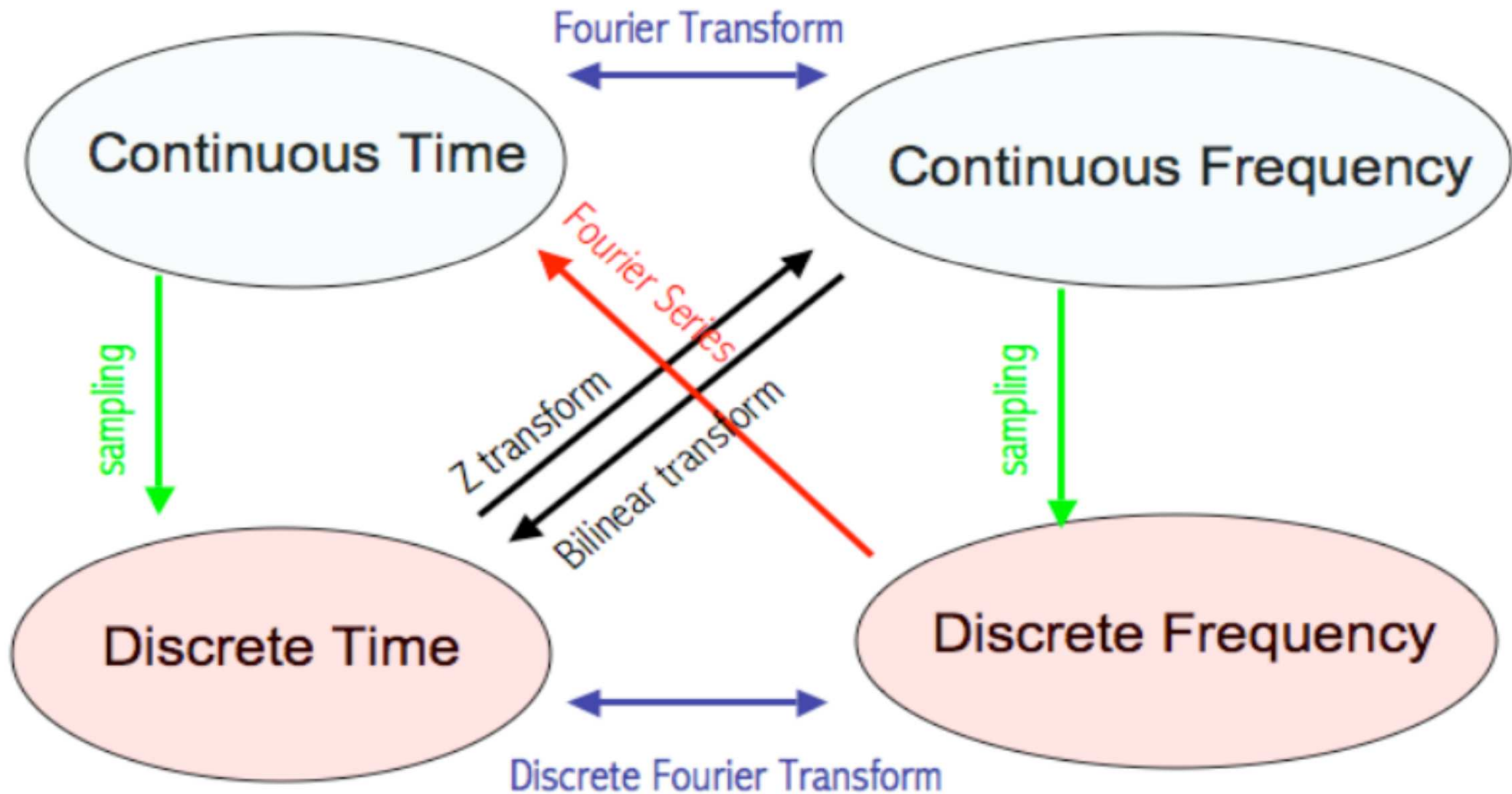


Example: Seismometer

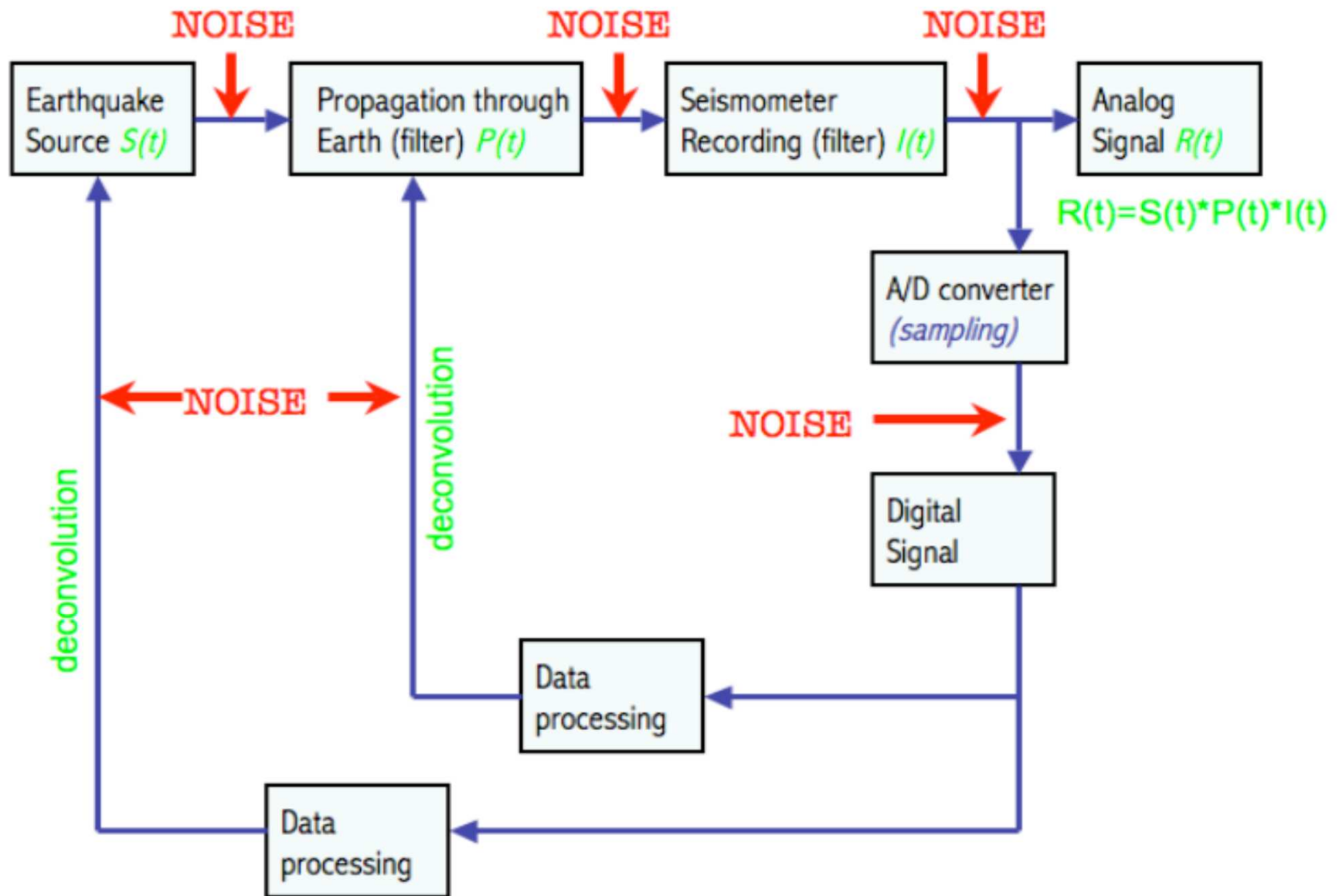
Figure 6.3-6: Transfer functions for various seismometers.



Various spaces and transforms



Earth system as filter



Other transforms

The z-transform

The z-transform is yet another way of transforming a discretized signal into an analytical (differentiable) form, furthermore

- Some mathematical procedures can be more easily carried out on discrete signals
- Digital filters can be easily designed and classified
- The z-transform is to discrete signals

Definition:

$$Z\{x_n\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x_n z^n$$

z is a complex number.

The z-transform

for finite n we get

$$Z\{x_n\} = X(z) = \sum_{n=0}^{n=N} x_n z^n$$

Z-transformed signals do not necessarily converge for all z. One can identify a region in which the function is regular. Convergence is obtained with $r=|z|$ for

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n r^n| \leq c < \infty$$

The z-transform: theorems

let us assume we have two transformed time series

$$X(z) = Z\{x_n\}$$

$$Y(z) = Z\{y_n\}$$

Linearity:

$$ax_n + by_n \Rightarrow aX(z) + bY(z)$$

Advance:

$$x_{n+N} \Rightarrow z^{-N} X(z)$$

Delay:

$$x_{n-N} \Rightarrow z^N X(z)$$

Multiplication:

$$a^n x_n \Rightarrow X(az)$$

Multiplication n:

$$nx_n \Rightarrow z \frac{d}{dz} X(z)$$

The z-transform: theorems

... continued

Time reversal:

$$x_{-n} \Rightarrow X\left(\frac{1}{z}\right)$$

Convolution:

$$x_n * y_n \Rightarrow X(z)Y(z)$$

... haven't we seen this before? What about the inversion, i.e., we know $X(z)$ and we want to get x_n

Inversion

$$x_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{X(z)}{z^{n+1}} dz, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

From the z-transform to the discrete Fourier transform

Let us make a particular choice for the complex variable z

$$z = e^{-i\omega\Delta t}$$

We thus can define a particular z transform as

$$A(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{-i\omega k\Delta t}$$

this simply is a complex Fourier serie. Let us define (Δf being the sampling frequency)

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{T} = \frac{2\pi n}{N\Delta T} = 2\pi n\Delta f$$

From the z-transform to the discrete Fourier transform

This leads us to:

$$A_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{-2\pi i n k / N}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$a_k = \sum_{n=0}^{N-1} A_n e^{2\pi i k n / N}$$

... which is nothing but the discrete Fourier transform. Thus the FT can be considered a special case of the more general z-transform!

Where do these points lie on the z-plane?

Filters ... using transforms ...

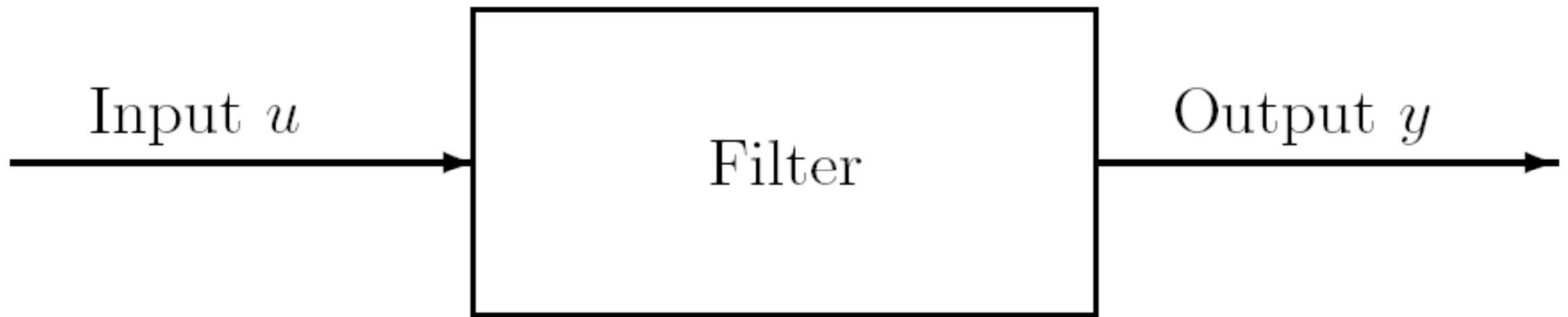


Figure 5.1: Schematic representation of a filter

Further classifications and terms

MA moving average

FIR finite-duration impulse response filters

-> MA = FIR

Non-recursive filters - Recursive filters

AR autoregressive filters

IIR infinite duration response filters

Convolution means several things:

- IS multiplication of a polynomial series
- IS a mathematical process
- IS filtering

Convolution means several things:

- IS multiplication of a polynomial series

$$\mathbf{A} * \mathbf{B} = \mathbf{C}$$

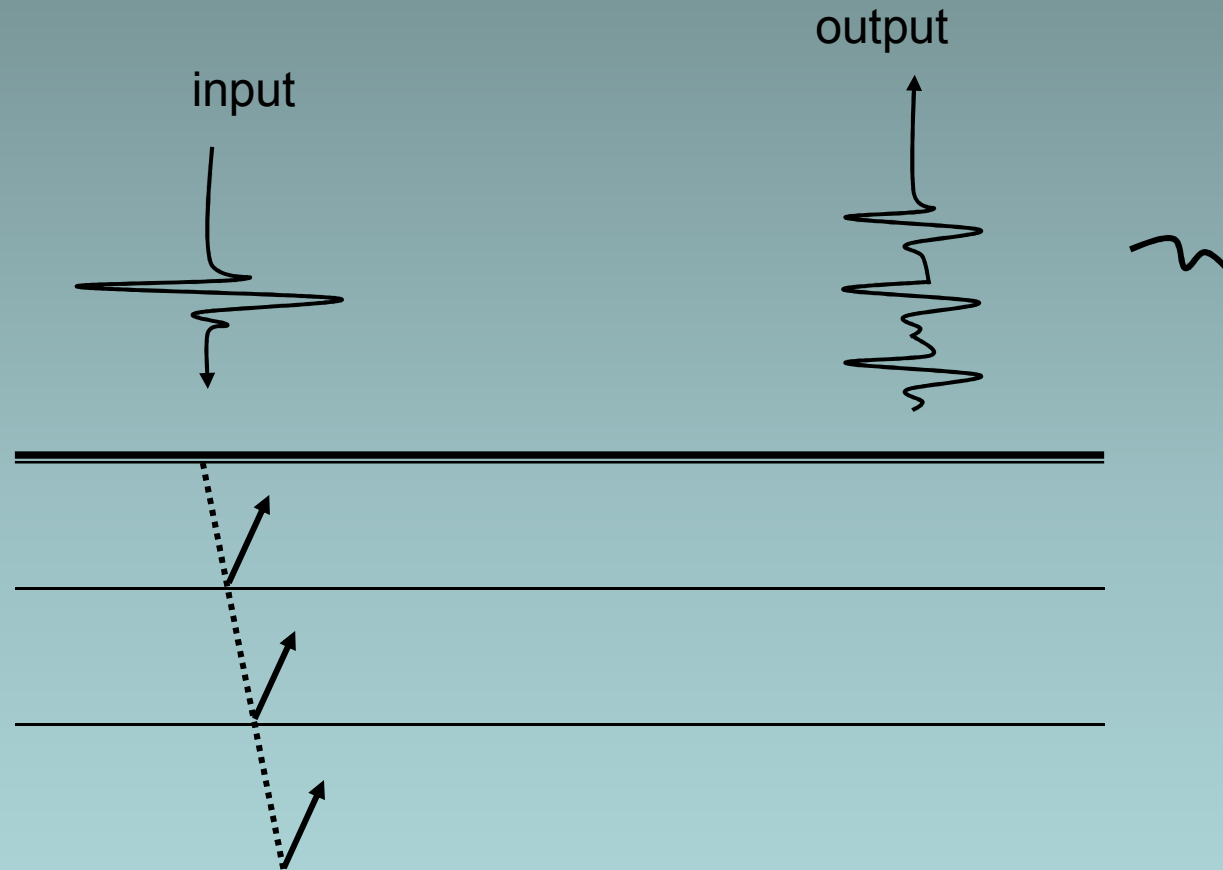
E.g., $A = 0.25 + 0.5z^{-1} - 0.25z^{-2} + 0.75z^{-3}$; $B = [1 \ 2 \ -0.5]$;

$$C = [0.2500 \quad 1.0000 \quad 0.6250 \quad 0 \quad 1.6250 \quad -0.3750]$$

$$A = 0.25z^0 + 0.5z^1 - 0.25z^2 + 0.75z^3$$

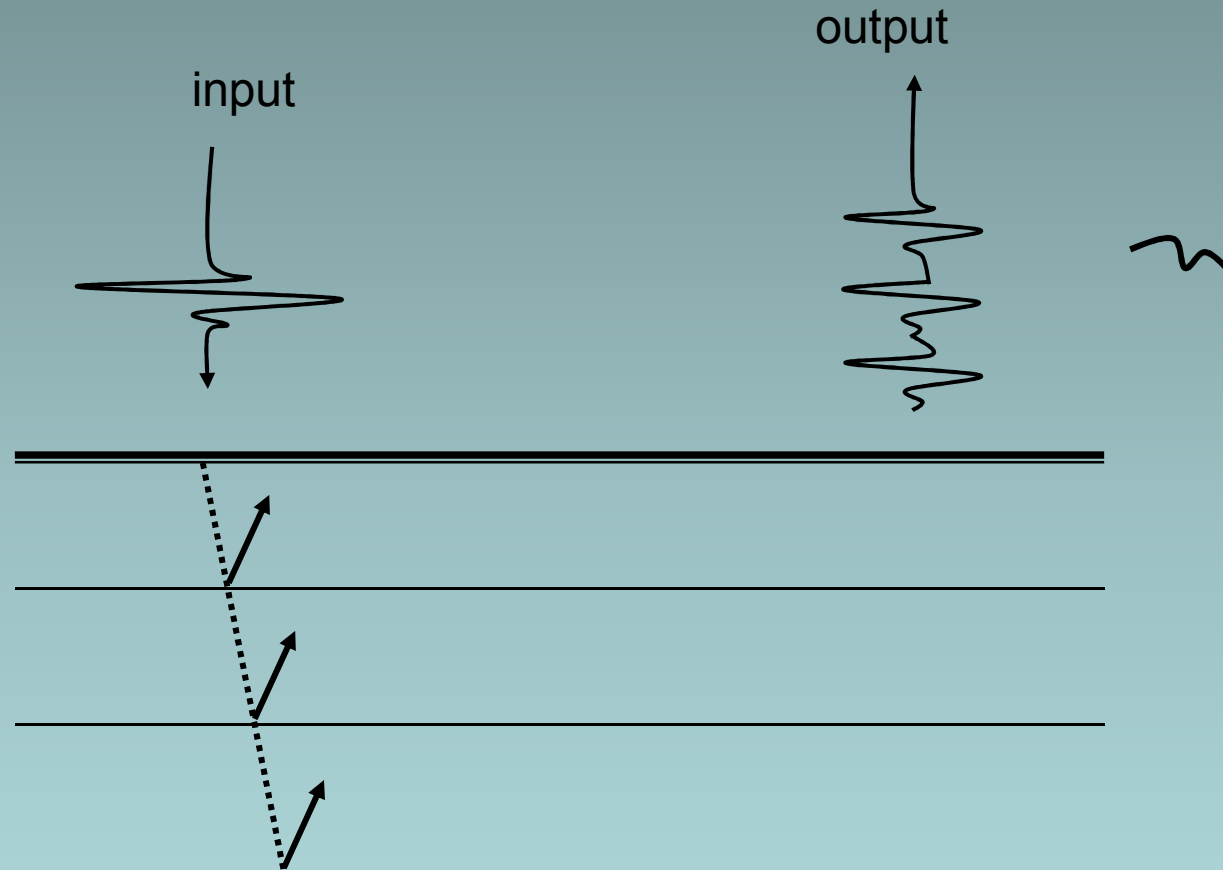
$$B = z^0 + 2z^1 - 0.5z^2$$

Convolutional Model for the Earth



Reflections in the earth are viewed as equivalent to a convolution process between the earth and the input seismic wavelet.

Convolutional Model for the Earth



$$\text{SOURCE} * \text{Reflection Coefficient} = \text{DATA}$$

(input)

(earth)

(output)

where * stands for convolution

Convolutional Model for the Earth

$$\text{SOURCE} * \text{Reflection Coefficient} = \text{DATA}$$

(input) (earth) (output)

where * stands for convolution

(MORE REALISTIC)

$$\text{SOURCE} * \text{Reflection Coefficient} + \text{noise} = \text{DATA}$$

(input) (earth) (output)

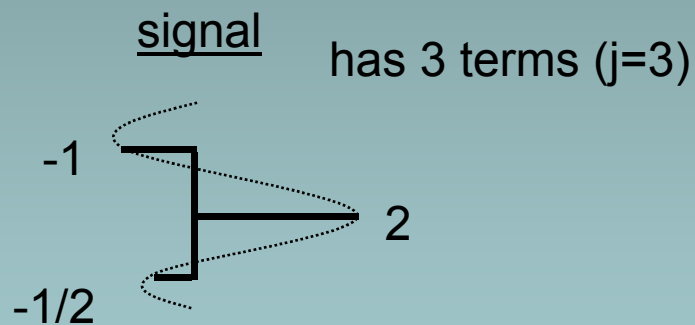
$$s(t) * e(t) + n(t) = d(t)$$

Convolution in the TIME domain is
equivalent to MULTIPLICATION in the
FREQUENCY domain

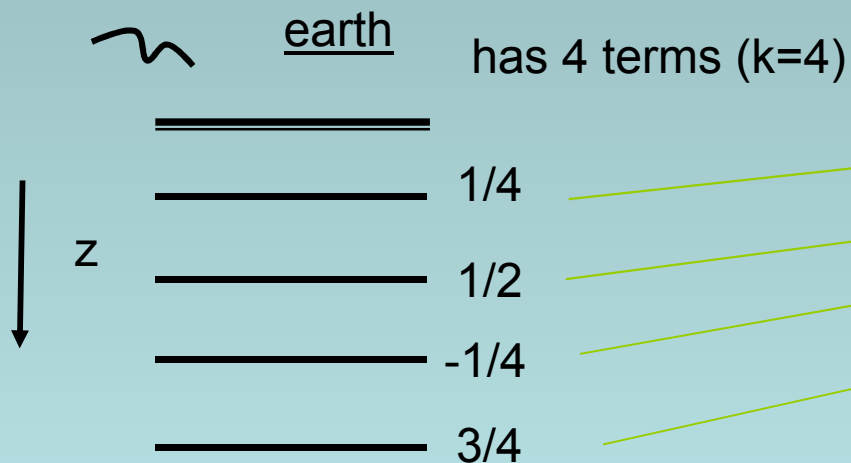
$$\begin{array}{ccccccc} s(t) & * & e(t) & + n(t) & = & d(t) \\ \downarrow \text{FFT} & & \downarrow \text{FFT} & & & \downarrow \text{FFT} \\ s(f, \text{phase}) & \times & e(f, \text{phase}) & + n(f, \text{phase}) & = & d(f, \text{phase}) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \text{Inverse FFT} \\ d(t) \end{array}$$

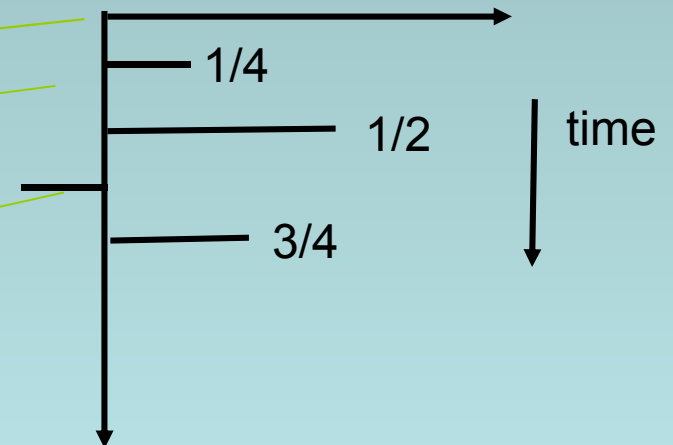
CONVOLUTION as a mathematical operator



$$D_j = \sum_{k=0}^j s_{j-k} e_k$$



Reflection Coefficient



Reflection Coefficients with depth (m)



$$\begin{array}{rclcl} & & 0 & & \\ & & 0 & & \\ & & 0 & & \\ & & -1/2 & & \\ & & 2 & & \\ & & 1 & & \\ 0 & \times & = & 0 & \\ 0 & \times & = & 0 & \\ 0 & \times & = & 0 & + \\ 1/4 & \times & = & 0 & \\ 1/2 & \times & = & 0 & \\ & & \hline & & 0 & & \\ -1/4 & & & & \\ 3/4 & & & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \end{array}$$






$$\begin{array}{rclcl} & & 0 & & \\ & & 0 & & \\ & & -1/2 & & \\ & & 2 & & \\ 0 & \times & & = & 0 \\ 0 & \times & -1 & = & 0 \\ 0 & \times & 0 & = & 0 \\ 1/4 & \times & 0 & = & 0 \\ 1/2 & \times & 0 & = & 0 \\ -1/4 & & 0 & = & 0 \\ & & \hline & & 0 & + & \end{array}$$



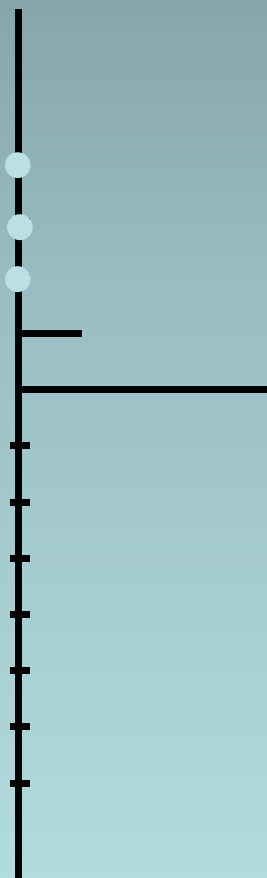


$$\begin{array}{rclcl} & & 0 & & \\ & & 0 & & \\ & & 0 & & \\ 0 & \times & -1/2 & = & 0 \\ 0 & \times & 2 & = & 0 \\ 0 & \times & 1 & = & 0 \quad + \\ 1/4 & \times & 0 & = & 0 \\ 1/2 & \times & 0 & = & 0 \\ -1/4 & \times & 0 & = & 0 \\ 3/4 & \times & 0 & = & 0 \\ & & \hline & & 0 & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \end{array}$$

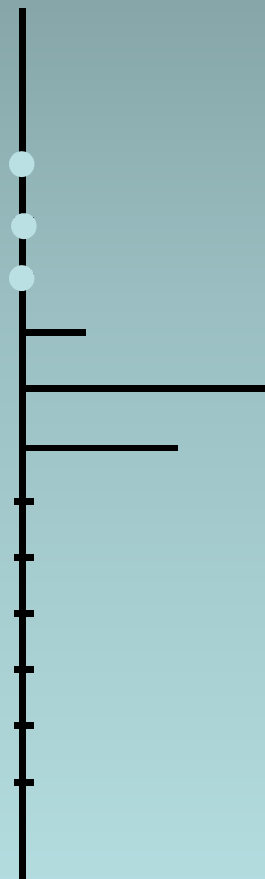


$$\begin{array}{rclcl}
 & & 0 & & \\
 & & 0 & & \\
 \downarrow & 0 & \times 0 & = & 0 \\
 & 0 & \times -1/2 & = & 0 \\
 & 0 & \times 2 & = & 0 & + \\
 & 1/4 & \times 1 & = & 1/4 \\
 & 1/2 & \times 0 & = & 0 \\
 & -1/4 & \times 0 & = & 0 \\
 & 3/4 & \times 0 & = & 0 \\
 & 0 & \times 0 & = & 0 \\
 & 0 & & & 1/4 \text{ ---} \\
 & 0 & & &
 \end{array}$$


$$\begin{array}{rcl}
 & 0 & \\
 0 & \times 0 & = 0 \\
 0 & \times 0 & = 0 \\
 0 & \times -1/2 & = 0 \quad + \\
 1/4 & \times 2 & = 1/2 \\
 1/2 & \times 1 & = 1/2 \\
 -1/4 & \times 0 & = 0 \\
 3/4 & \times 0 & = 0 \\
 0 & \times 0 & = 0 \\
 0 & \times 0 & = 0 \\
 0 & & 1 \text{ —}
 \end{array}$$



$$\begin{array}{rcl}
 0 & \times & 0 = 0 \\
 0 & \times & 0 = 0 \\
 0 & \times & 0 = 0 \quad + \\
 1/4 & \times & -1/2 = -1/8 \\
 1/2 & \times & 2 = 1 \\
 -1/4 & \times & 1 = -1/4 \\
 3/4 & \times & 0 = 0 \\
 0 & \times & 0 = 0 \\
 0 & \times & 0 = 0 \\
 0 & \times & 0 = 0 \\
 & & 5/8 \text{ —}
 \end{array}$$



$$0 \quad x \quad = 0$$

$$0 \quad x \quad 0 \quad = 0$$

$$0 \quad x \quad 0 \quad = 0 \quad +$$

$$1/4 \quad x \quad 0 \quad = 0$$

$$1/2 \quad x \quad -1/2 \quad = -1/4$$

$$-1/4 \quad x \quad 2 \quad = -1/2$$

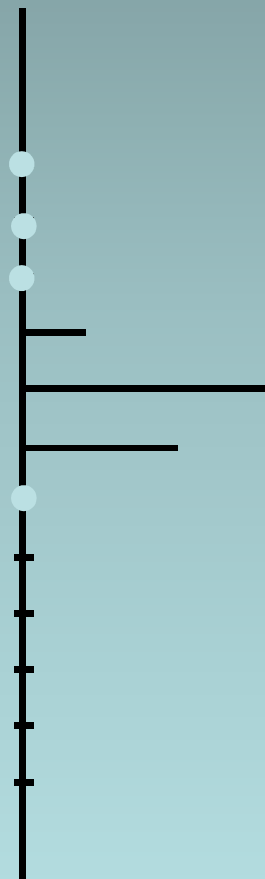
$$3/4 \quad x \quad 1 \quad = 3/4$$

$$0 \quad x \quad 0 \quad = 0$$

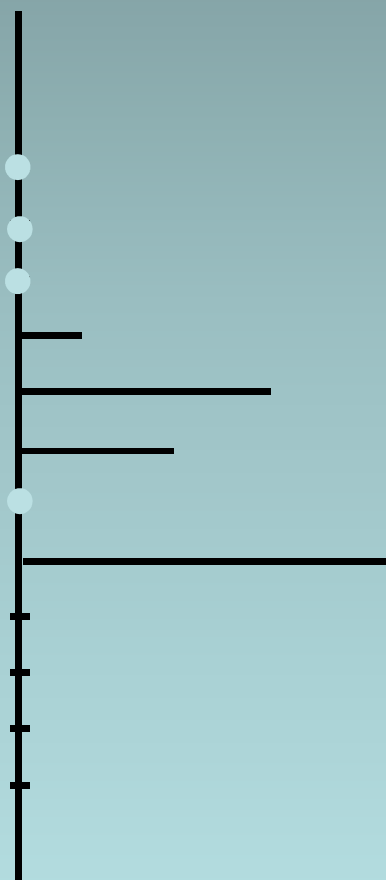
$$0 \quad x \quad 0 \quad = 0$$

$$0 \quad x \quad 0 \quad = 0$$

$$0 \quad 0 \quad = 0$$



$$\begin{array}{rclcl}
 0 & & & & \\
 0 & & & & \\
 0 & \times & 0 & = & 0 & + \\
 1/4 & \times & 0 & = & 0 & \\
 1/2 & \times & 0 & = & 0 & \\
 -1/4 & \times & -1/2 & = & 1/8 & \\
 3/4 & \times & 2 & = & 1 \ 1/2 & \\
 0 & \times & 1 & = & 0 & \\
 0 & \times & 0 & = & 0 & \\
 0 & \times & 0 & = & 0 & \\
 & & & & 1 \ 5/8 & \\
 & & & & \hline
 & & & & 0 & \\
 & & & & 0 &
 \end{array}$$



0

0

0

$$\frac{1}{4}x + 0 = 0$$

$$\frac{1}{2}x + 0 = 0$$

$$-\frac{1}{4}x + 0 = 0$$

$$\frac{3}{4}x - \frac{1}{2} = -\frac{3}{8}$$

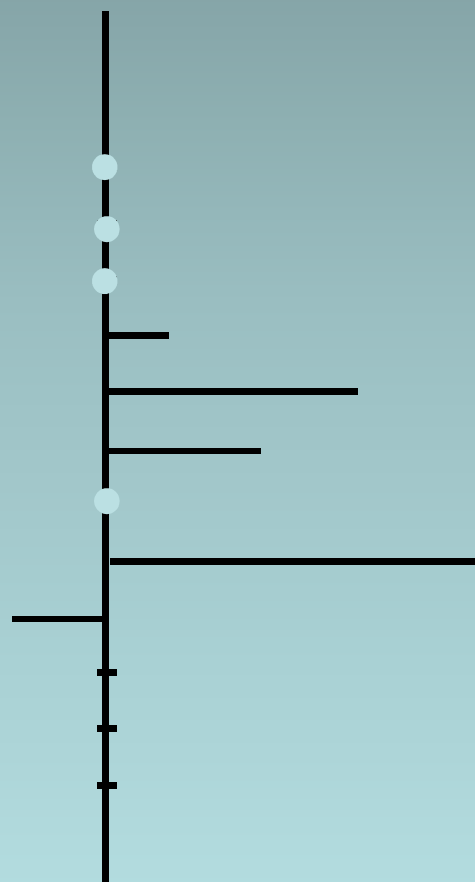
$$0x + 2 = 0$$

$$0x + 1 = 0$$

$$0x + 0 = 0$$

$$-\frac{3}{8}$$

+



0

0

0

1/4

1/2

-1/4

3/4

0

0

0

x

x

x

x

x

x

0

0

0

-1

2

-1/2

0

0

0

=

=

=

=

=

=

0

0

0

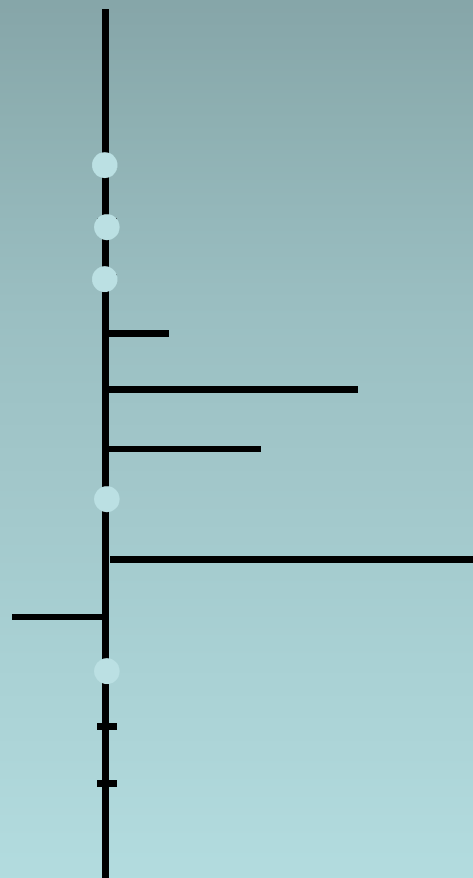
0

0

0

0

+



Cross-Correlation

- **Cross-correlation** is one of the classical tools for solving localization and recognition problems
- **Cross-correlation** (a sliding dot product) is a measure of similarity of two signals

$$(f \boxtimes g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\tau) g(t \oplus \tau)$$

$$(f \boxtimes g)(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{f}(m) g(k + m)$$

Cross-Correlation Computation

- Analogous to the Convolution Theorem, the Fourier transform of the cross-correlation function is equal to the product of the Fourier transform of one of the signals and the complex conjugated Fourier Transform of another signal

$$F(f \boxtimes g) = \overline{F(f)} \cdot F(g)$$

Cross-Correlation Computation

- Following this important property, the cross-correlation function can be easily calculated using the inverse Fourier transform applied to the product of the Fourier transform of one of the signals and the complex conjugated Fourier Transform of another signal

$$f \boxtimes g = F^{-1} \left(F \left(f \boxtimes g \right) \right) = F^{-1} \left(\overline{F}(f) \cdot F(g) \right)$$

Localization and Recognition using Cross-Correlation

- If some signal f is contained in some signal g , then the cross-correlation function takes its maximal value at that coordinate starting from which f is contained in g
- If some image $f(x,y)$ is contained in some image $g(x,y)$, starting from the coordinates (x_0, y_0) then their cross-correlation function has a strong global maximum at (x_0, y_0)

Implementation

- This property is used for localization and recognition of the object f in the image g .
- To find f in g (or to show that it is not there), it is necessary to zero-pad f up to sizes of g and to find their cross-correlation function.
- If it has a strong global maximum, this means that f is located in g starting from the coordinates of this maximum (x_0, y_0)

Crosscorrelation

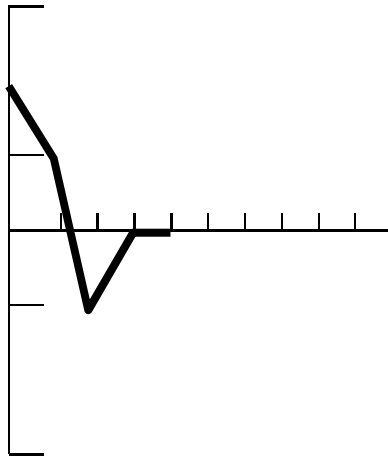
- Crosscorrelation describes the similarity between two time series. For us a trace consists of a series of amplitude values at regular intervals of time or a time series.
- Mathematically, crosscorrelation is like convolution, but where none of the traces are reversed prior to the steps involving shifting, multiplication and addition (See lecture PowerPoint Presentation entitled “CMP”)

Correlation of two traces

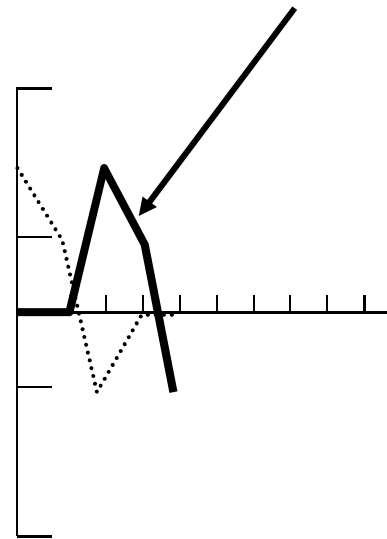
Wavelet 1 has the same shape as wavelet 2.

Wavelet 2 is a “time-advanced” version of wavelet 1 by 2 units of time

Wavelet 1: 2,1,-1,0,0

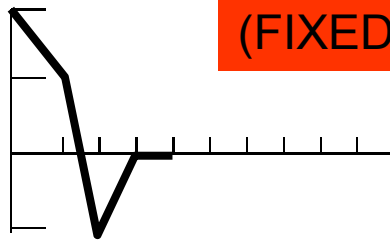


Wavelet 2: 0,0,2,1,-1



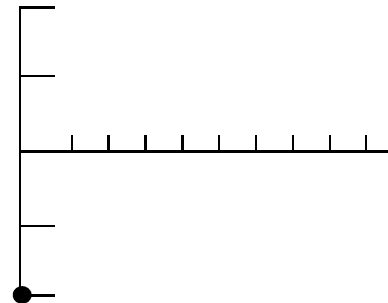
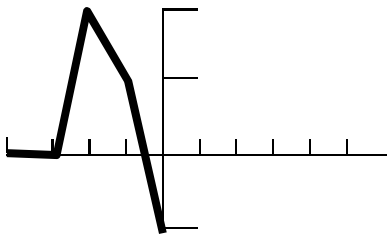
Correlation of Wavelet 1 with 2

Wavelet 1: 2,1,-1,0,0



(FIXED)

TIME=0

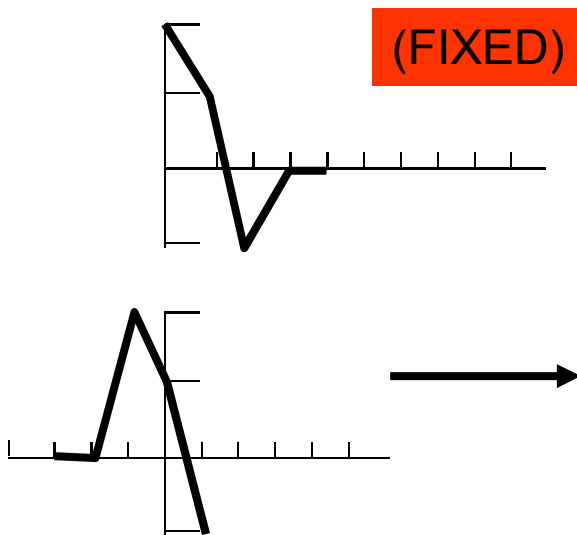


Crosscorrelation

Wavelet 2: 0,0,2,1,-1

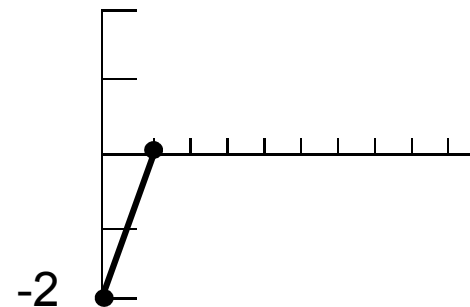
Correlation of Wavelet 1 with 2

Wavelet 1: 2,1,-1,0,0



(FIXED)

TIME=1

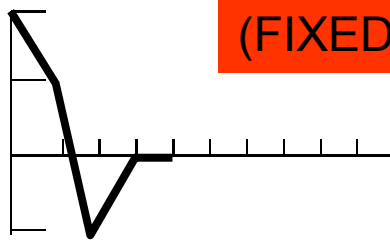


Crosscorrelation

Wavelet 2: 0,0,2,1,-1

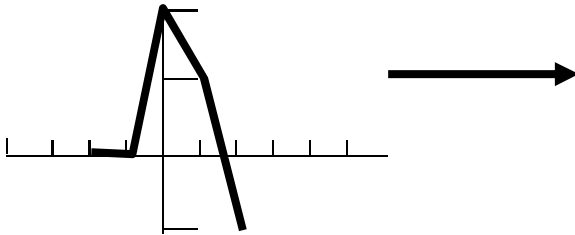
Correlation of Wavelet 1 with 2

Wavelet 1: 2,1,-1,0,0

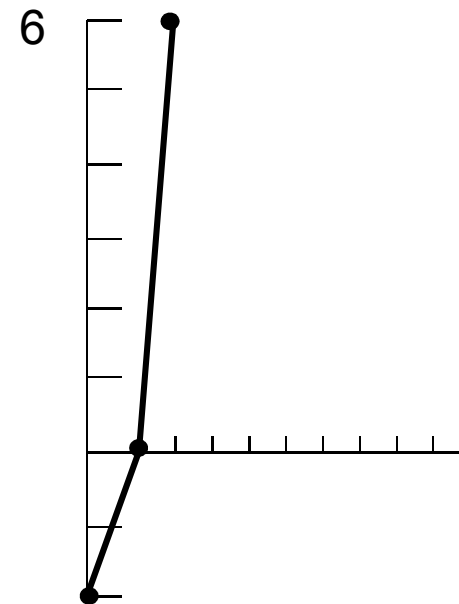


(FIXED)

TIME=2



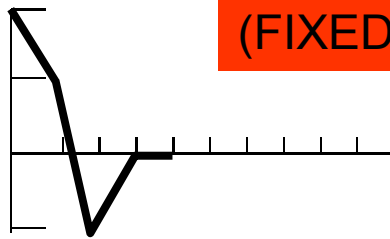
Wavelet 2: 0,0,2,1,-1



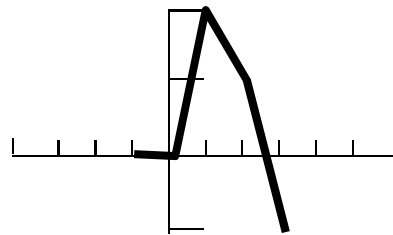
Crosscorrelation

Correlation of Wavelet 1 with 2

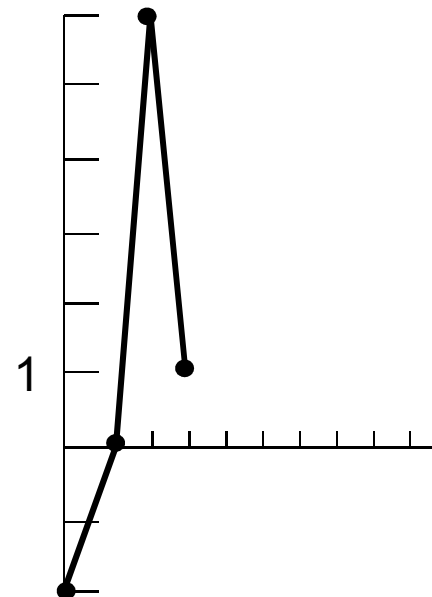
Wavelet 1: 2,1,-1,0,0



TIME=3



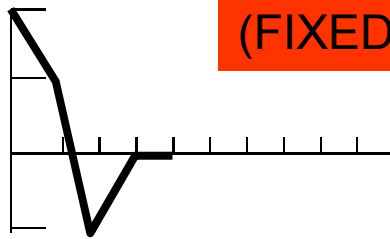
Wavelet 2: 0,0,2,1,-1



Crosscorrelation

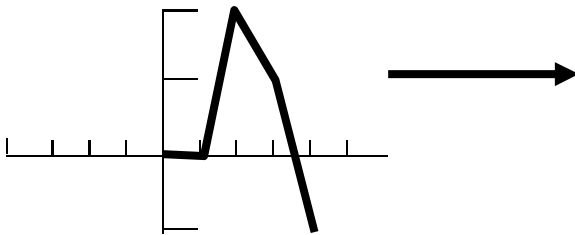
Correlation of Wavelet 1 with 2

Wavelet 1: 2,1,-1,0,0

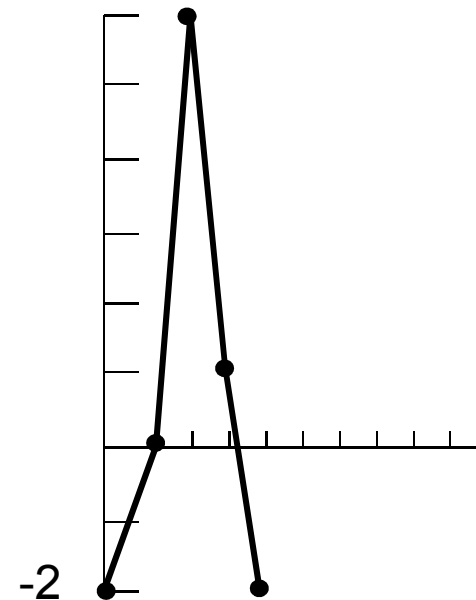


(FIXED)

TIME=4



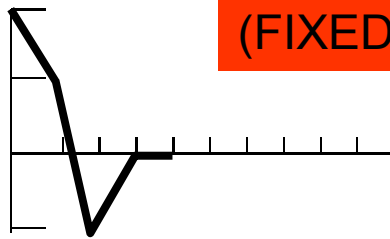
Wavelet 2: 0,0,2,1,-1



Crosscorrelation

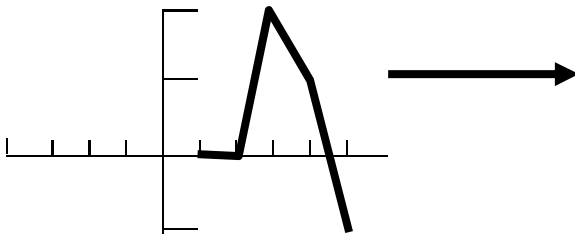
Correlation of Wavelet 1 with 2

Wavelet 1: 2,1,-1,0,0

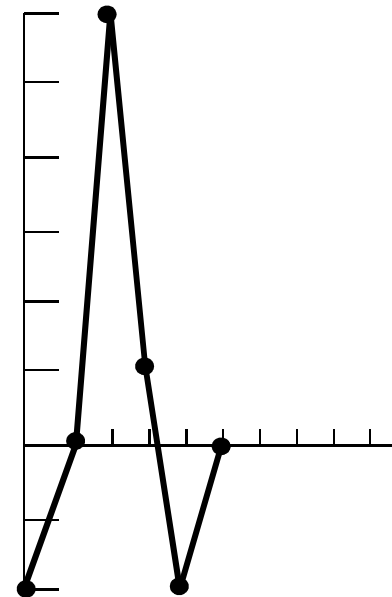


(FIXED)

TIME=5



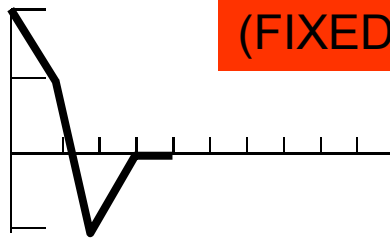
Wavelet 2: 0,0,2,1,-1



Crosscorrelation

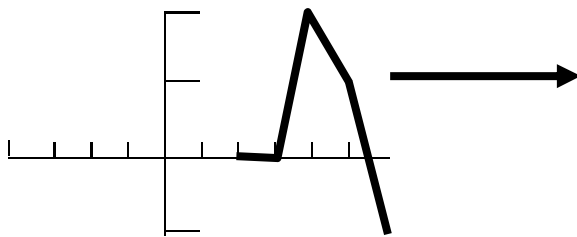
Correlation of Wavelet 1 with 2

Wavelet 1: 2,1,-1,0,0

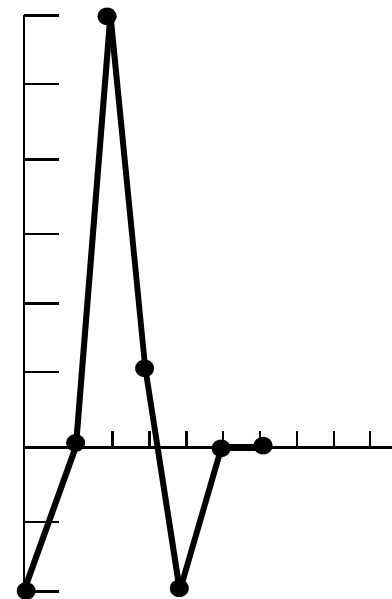


(FIXED)

TIME=6



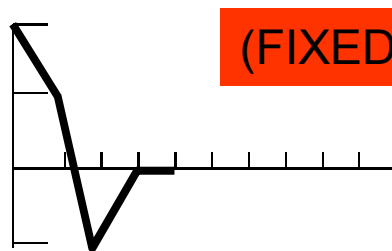
Wavelet 2: 0,0,2,1,-1



Crosscorrelation

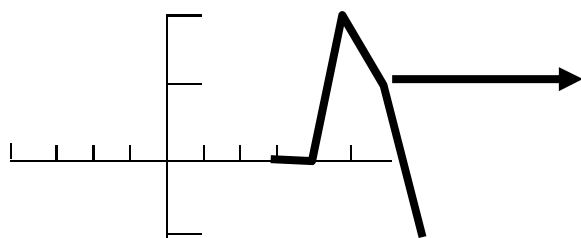
The maximum value of the correlation is 6 at time =2

Wavelet 1: 2,1,-1,0,0

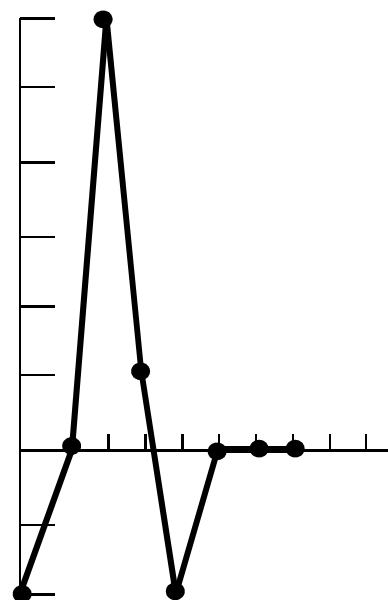


(FIXED)

TIME=7



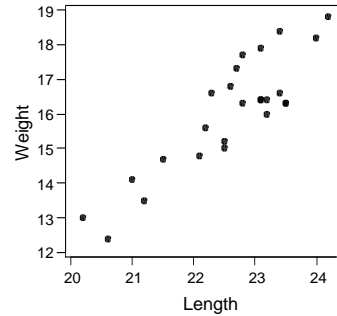
Wavelet 2: 0,0,2,1,-1



Crosscorrelation

Scatter Diagrams

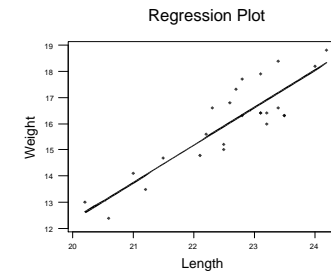
- Scatter diagrams are used to demonstrate **correlation** between two quantitative variables.
- Often, this correlation is **linear**.
- This means that a straight line model can be developed.



Chapter 5 # 1

Correlation Classifications

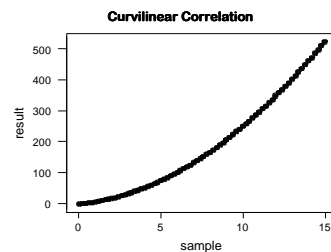
- Correlation can be classified into three basic categories
- Linear
- Nonlinear
- No correlation



Chapter 5 # 2

Correlation Classifications

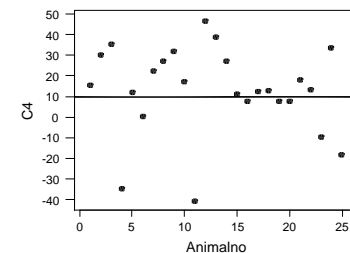
- Two variables may be correlated but not through a linear model.
- This type of model is called non-linear
- The model might be one of a curve.



Chapter 5 # 3

Correlation Classifications

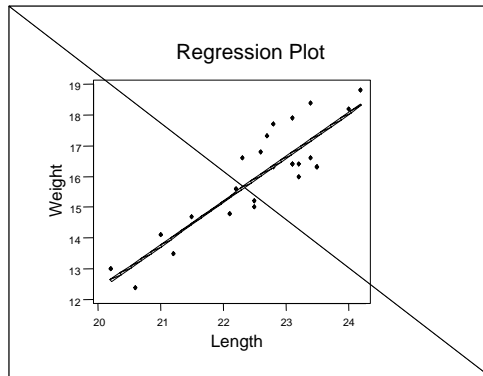
- Two quantitative variables may not be correlated at all



Chapter 5 # 4

Linear Correlation

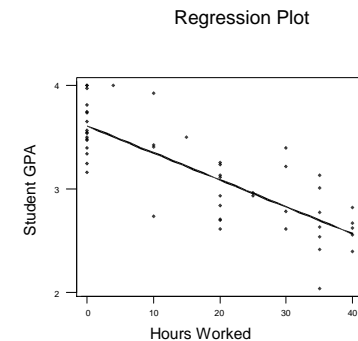
- Variables that are correlated through a linear relationship can display either positive or negative correlation
- Positively correlated variables vary directly.



Chapter 5 # 5

Linear Correlation

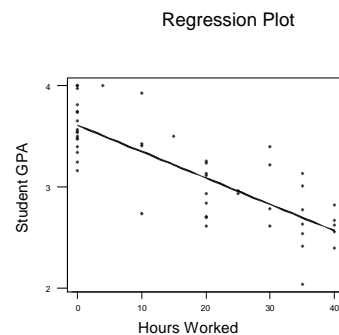
- Negatively correlated variables vary as opposites
- As the value of one variable increases the other decreases



Chapter 5 # 6

Strength of Correlation

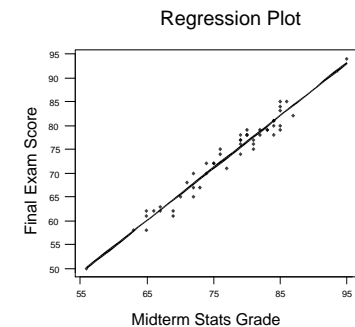
- Correlation may be strong, moderate, or weak.
- You can estimate the strength by observing the variation of the points around the line
- Large variation is **weak** correlation



Chapter 5 # 7

Strength of Correlation

- When the data is distributed quite close to the line the correlation is said to be **strong**
- The correlation type is independent of the strength.



Chapter 5 # 8

The Correlation Coefficient

- The strength of a **linear relationship** is measured by the correlation coefficient
- The sample correlation coefficient is given the symbol “**r**”
- The population correlation coefficient has the symbol “**ρ**”.

Chapter 5 # 9

Interpreting r

- The sign of the correlation coefficient tells us the direction of the linear relationship
 - ⊗ If r is negative (< 0) the correlation is negative. The line **slopes** down
 - ⊗ If r is positive (> 0) the correlation is positive. The line **slopes** up

Chapter 5 # 10

Interpreting r

- The size (magnitude) of the correlation coefficient tells us the strength of a **linear** relationship
 - ⊗ If $|r| \geq 0.90$ implies a strong linear association
 - ⊗ For $0.65 < |r| < 0.90$ implies a moderate linear association
 - ⊗ For $|r| \leq 0.65$ this is a weak linear association

Chapter 5 # 11

Cautions

- The correlation coefficient only gives us an indication about the strength of a **linear relationship**.
- Two variables may have a strong curvilinear relationship, but they could have a “weak” value for r

Chapter 5 # 12

Fundamental Rule of Correlation

- Correlation **DOES NOT** imply causation
 - Just because two variables are highly correlated does not mean that the explanatory variable “**causes**” the response
- Recall the discussion about the correlation between sexual assaults and ice cream cone sales

Chapter 5 # 13

Setting

- A chemical engineer would like to determine if a relationship exists between the extrusion temperature and the strength of a certain formulation of plastic. She oversees the production of 15 batches of plastic at various temperatures and records the strength results.

Chapter 5 # 14

The Study Variables

- The two variables of interest in this study are the strength of the plastic and the extrusion temperature.
- The independent variable is extrusion temp. This is the variable over which the experimenter has control. She can set this at whatever level she sees as appropriate.
- The response variable is strength. The value of “strength” is thought to be “dependent on” temperature.

Chapter 5 # 15

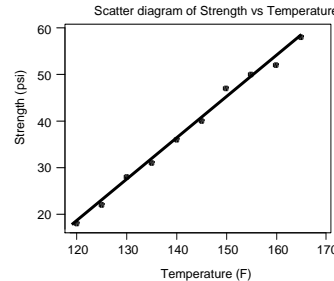
The Experimental Data

Temp	120	125	130	135	140
Str	18	22	28	31	36
Temp	145	150	155	160	165
Str	40	47	50	52	58

Chapter 5 # 16

The Scatter Plot

- The scatter diagram for the temperature versus strength data allows us to deduce the nature of the relationship between these two variables



What can we conclude simply from the scatter diagram?

Chapter 5 # 17

Conclusions by Inspection

- Does there appear to be a relationship between the study variables?
- Classify the relationship as: Linear, curvilinear, no relationship
- Classify the correlation as positive, negative, or no correlation
- Classify the strength of the correlation as strong, moderate, weak, or none

Chapter 5 # 18

Computing r

$$r = \frac{1}{n-1} \sum \left\{ \left(\frac{x - \bar{x}}{s_x} \right) \left(\frac{y - \bar{y}}{s_y} \right) \right\}$$

Diagram illustrating the components of the formula for computing the Pearson correlation coefficient r :

- $n-1$: df (degrees of freedom)
- $\frac{x - \bar{x}}{s_x}$: z-scores for x data
- $\frac{y - \bar{y}}{s_y}$: z-scores for y data

Chapter 5 # 19

Computing r

$$r = \frac{1}{n-1} \sum [(Z_x)(Z_y)]$$

Chapter 5 # 20

Computing r - Example

See example handout for the plastic strength versus extrusion temperature setting

Chapter 5 # 21

Classifying the strength of linear correlation

- The strength of a linear correlation between the response and the explanatory variable can be assigned based on r
- These classifications are discipline dependent

Chapter 5 # 22

Classifying the strength of linear correlation

For this class the following criteria are adopted:

- If $|r| \geq 0.90$ then the correlation is strong
- If $|r| \leq 0.65$ then the correlation is weak
- If $0.65 < |r| < 0.90$ then the correlation is moderate

Chapter 5 # 23

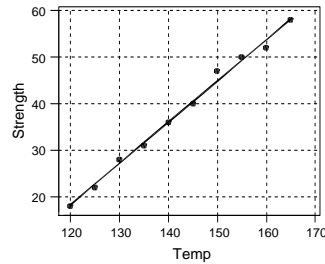
Scatter Diagrams and Statistical Modeling and Regression

- We've already seen that the best graphic for illustrating the relation between two quantitative variables is a scatter diagram. We'd like to take this concept a step farther and, actually develop a mathematical model for the relationship between two quantitative variables

Chapter 5 # 24

The Line of Best Fit Plot

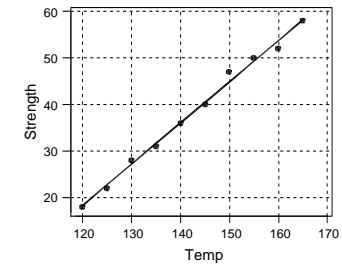
- Since the data appears to be linearly related we can find a straight line model that fits the data better than all other possible straight line models.
- This is the Line of Best Fit (LOBF)



Chapter 5 # 25

Using the Line of Best Fit to Make Predictions

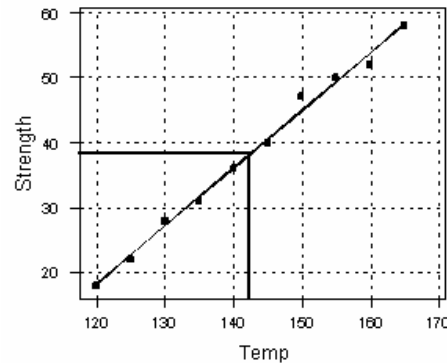
- Based on this graphical model, what is the predicted strength for plastic that has been extruded at 142 degrees?



Chapter 5 # 26

Using the Line of Best Fit to Make Predictions

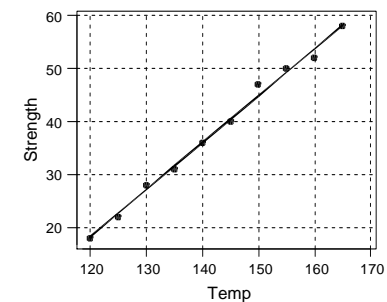
- Given a value for the predictor variable, determine the corresponding value of the dependent variable graphically.
- Based on this model we would predict a strength of appx. 39 psi for plastic extruded at 142 F



Chapter 5 # 27

Using the Line of Best Fit to Make Predictions

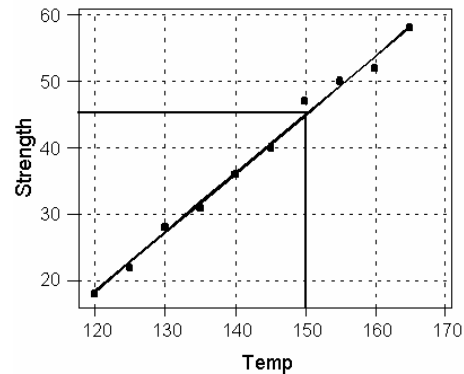
- Based on this graphical model, at what temperature would I need to extrude the plastic in order to achieve a strength of 45 psi?



Chapter 5 # 28

Using the Line of Best Fit to Make Predictions

- Locate 45 on the response axis (y-axis)
- Draw a horizontal line to the LOBF
- Drop a vertical line down to the independent axis
- The intercepted value is the temp. required to achieve a strength of 45 psi



Chapter 5 # 29

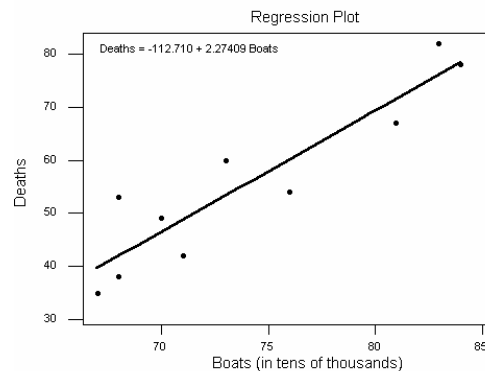
Computing the LSR model

- Given a LSR line for bivariate data, we can use that line to make predictions.
- How do we come up with the best linear model from all possible models?

Chapter 5 # 30

Bivariate data and the sample linear regression model

- For example, look at the fitted line plot of powerboat registrations and the number of manatees killed.
- It appears that a linear model would be a good one.



$$\hat{y} = b_0 + b_1 x$$

Chapter 5 # 31

The straight line model

- Any straight line is completely defined by two parameters:
 - ⊗ The slope – steepness either positive or negative
 - ⊗ The y-intercept – this is where the graph crosses the vertical axis

Chapter 5 # 32

The Parameter Estimators

- In our model “ b_0 ” is the estimator for the intercept. The true value for this parameter is β_0
- “ b_1 ” estimates the slope. The true value for this parameter is β_1

Chapter 5 # 33

Calculating the Parameter Estimators

- The equation for the LOBF is:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x$$

Chapter 5 # 34

Calculating the Parameter Estimators

- To get the slope estimator we use:

$$b_1 = \frac{n \sum (x y) - \sum x \cdot \sum y}{n \sum (x^2) - (\sum x)^2}$$

or

$$b_1 = r \left(\frac{s_y}{s_x} \right)$$

Chapter 5 # 35

Computing the Intercept Estimator

- The intercept estimator is computed from the variable means and the slope:

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}$$

- Realize that both the slope and intercept estimated in these last two slides are really point estimates for the true slope and y-intercept

Chapter 5 # 36

Revisit the manatee example

Look at the summary statistics and correlation coefficient data from the manatee example

Variable	N	Mean	SEMean	StDev
Boats	10	74.10	2.06	6.51
Deaths	10	55.80	5.08	16.05

Minitab correlation coefficient output

Correlations: Boats, Deaths

Pearson correlation of Boats and Deaths = 0.921

P-Value = 0.000

Chapter 5 # 37

Computing the estimators

So the slope is:

$$b_1 = r \left(\frac{s_y}{s_x} \right)$$

$$b_1 = 0.921 \left(\frac{16.05}{6.51} \right) = 2.27$$

Chapter 5 # 38

Computing the estimators

And the intercept is calculated using the slope information along with the variable means:

$$\begin{aligned} b_0 &= \bar{y} - b_1 \bar{x} \\ &= 55.8 - 2.27(74.1) \\ &= -112.4 \end{aligned}$$

Chapter 5 # 39

Put it together

- In general terms any old linear regression equation is:
response = intercept + slope(predictor)
- Specifically for the manatee example the sample regression equation is:
Deaths = -112.7 + 2.27(boats)

Chapter 5 # 40

The slope estimate

- b_1 is the estimated slope of the line
- The interpretation of the slope is, “The amount of change in the response for every one unit change in the independent variable.”

Chapter 5 # 41

The slope estimate

- In our example the estimated slope is 2.27
- This is interpreted as, “For each additional 10,000 boats registered, an additional 2.27 more manatees are killed

Chapter 5 # 42

The intercept estimate

- Recall the sample regression model:
“ b_0 ” is the estimated y- intercept

$$\hat{y} = b_0 + b_1x$$

The interpretation of the y-intercept is, “The value of the response when the control (or independent) variable has a value of 0.”

Chapter 5 # 43

The intercept Estimate

- Sometimes this value is meaningful. For example resting metabolic rate versus ambient temperature in Centigrade (°C)
- Sometimes it's not meaningful at all.
- This is an example where the y-intercept just serves to make the model fit better. There can be no such thing as a -112.7 manatees killed

Chapter 5 # 44

Regression Output

Use the minitab regression output for the manatee example to predict the expected number of manatees killed when the number of power boat registrations is 750,000 ($x = 75$)

Chapter 5 # 45

Regression Output

- The sample regression equation is:
 $\text{ManateesKilled} = -112.7 + 2.27(\text{boats})$
- So:
 $\text{ManateesKilled} = -112.7 + 2.27(75) = 57.6$
- This means that we expect between 57 and 58 manatees killed in a year where 750,000 power boats are registered.

Chapter 5 # 46

Regression Output

Use the minitab regression output for the manatee example to predict the expected number of manatees killed when the number of power boat registrations is 850,000 ($x = 85$)

Chapter 5 # 47

Regression Output

- The sample regression equation is:
 $\text{ManateesKilled} = -112.7 + 2.27(\text{boats})$
- So:
 $\text{ManateesKilled} = -112.7 + 2.27(85) = 80.25$
- This means that we expect between 80 and 81 manatees killed in a year where 750,000 power boats are registered.

Chapter 5 # 48

Regression Output

**STOP!! YOU HAVE VIOLATED
THE CARDINAL RULE OF REGRESSION**



Chapter 5 # 49

Cardinal Rule of Regression

- **NEVER NEVER NEVER NEVER NEVER NEVER predict a response value from a predictor value that is outside of the experimental range.**
- The only predictions we can make (statistically) are predictions for responses where powerboat registrations are between 670,000 and 840,000.
- This means that our prediction for the year when 850,000 powerboats were registered is garbage

Chapter 5 # 50

Regression Estimates The coefficient of determination

- r^2 is called the **coefficient of determination**.
- r^2 is a proportion, so it is a number between 0 and 1 inclusive.
- r^2 quantifies the amount of variation in the response that is due to the variability in the predictor variable.
- r^2 values close to 0 mean that our estimated model is a poor one while values close to 1 imply that our model does a great job explaining the variation

Chapter 5 # 51

The r^2 Value

- If r^2 is, say, 0.857 we can conclude that 85.7% of the variability in the response is explained by the variability in the independent variable.
- This leaves $100 - 85.7 = 14.3\%$ left unexplained. It's only the unexplained variation that is incorporated into the "uncertainty"

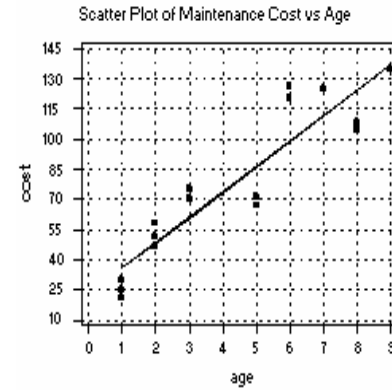
Chapter 5 # 52

r^2 and the correlation coefficient

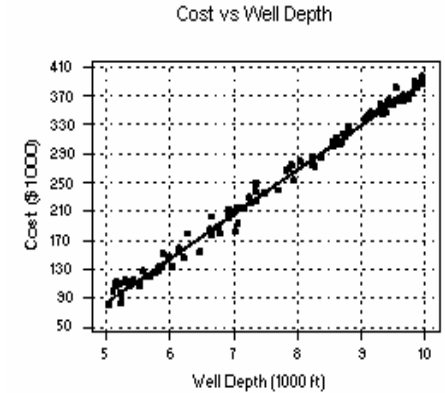
- r^2 is related to the correlation coefficient
- It's just the square of r
- The interpretation as the proportion of variation in the response that is explained by the variation in the predictor variable makes it an important statistic

Chapter 5 # 53

Scatter of Points and r^2



$$r^2 = 0.848$$



$$r^2 = 0.992$$

Chapter 5 # 54

Simple Linear Regression

Linear Regression Analysis...

Regression analysis is used to predict the value of one variable (the *dependent variable*) on the basis of other variables (the *independent variables*).

Dependent variable: denoted **Y**

Independent variables: denoted **X_1, X_2, \dots, X_k**

If we only have ONE independent variable, the model is

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$$

which is referred to as simple linear regression. We would be interested in estimating β_0 and β_1 from the data we collect.

Linear Regression Analysis

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$$

Variables:

X = Independent Variable (we provide this)

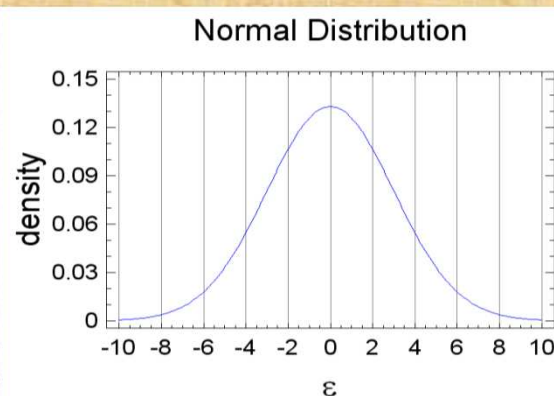
Y = Dependent Variable (we observe this)

Parameters:

β_0 = Y-Intercept

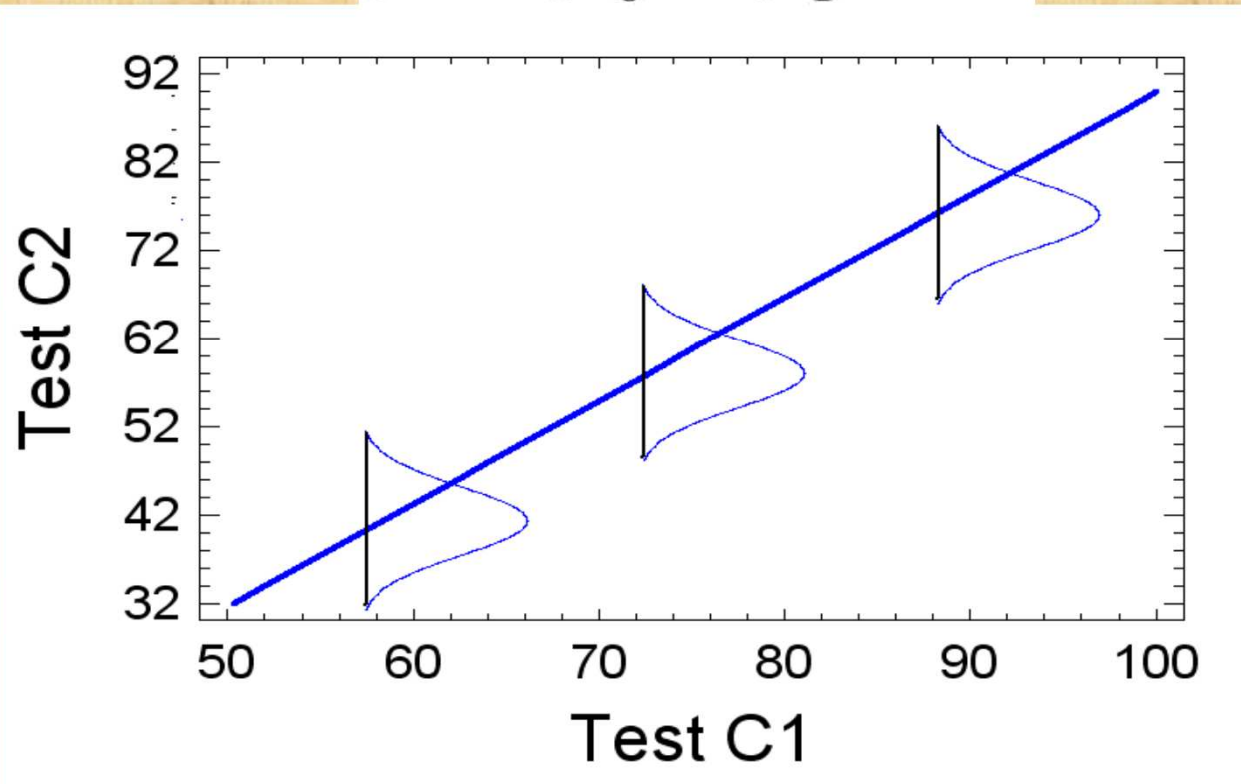
β_1 = Slope

$\varepsilon \sim$ Normal Random Variable ($\mu_\varepsilon = 0$, $\sigma_\varepsilon = ???$) [Noise]



Theoretical Linear Model

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$$

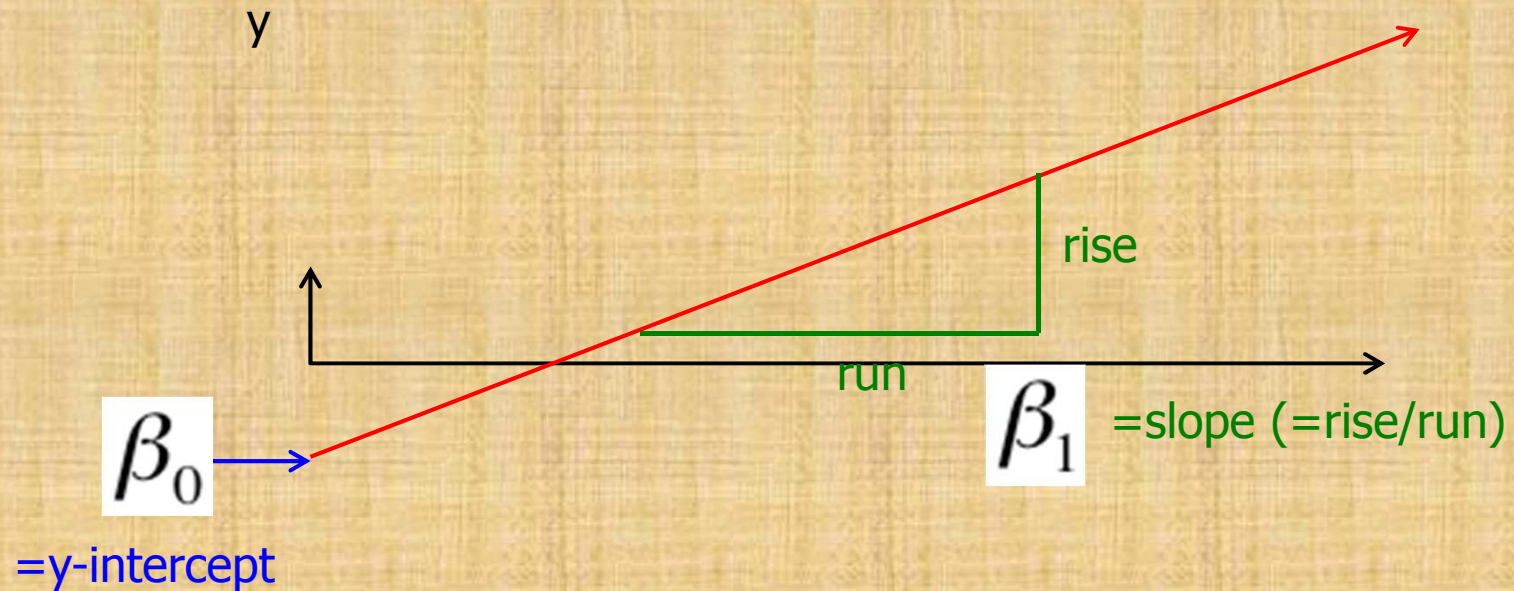


Simple Linear Regression Model...

Meaning of β_0 and β_1

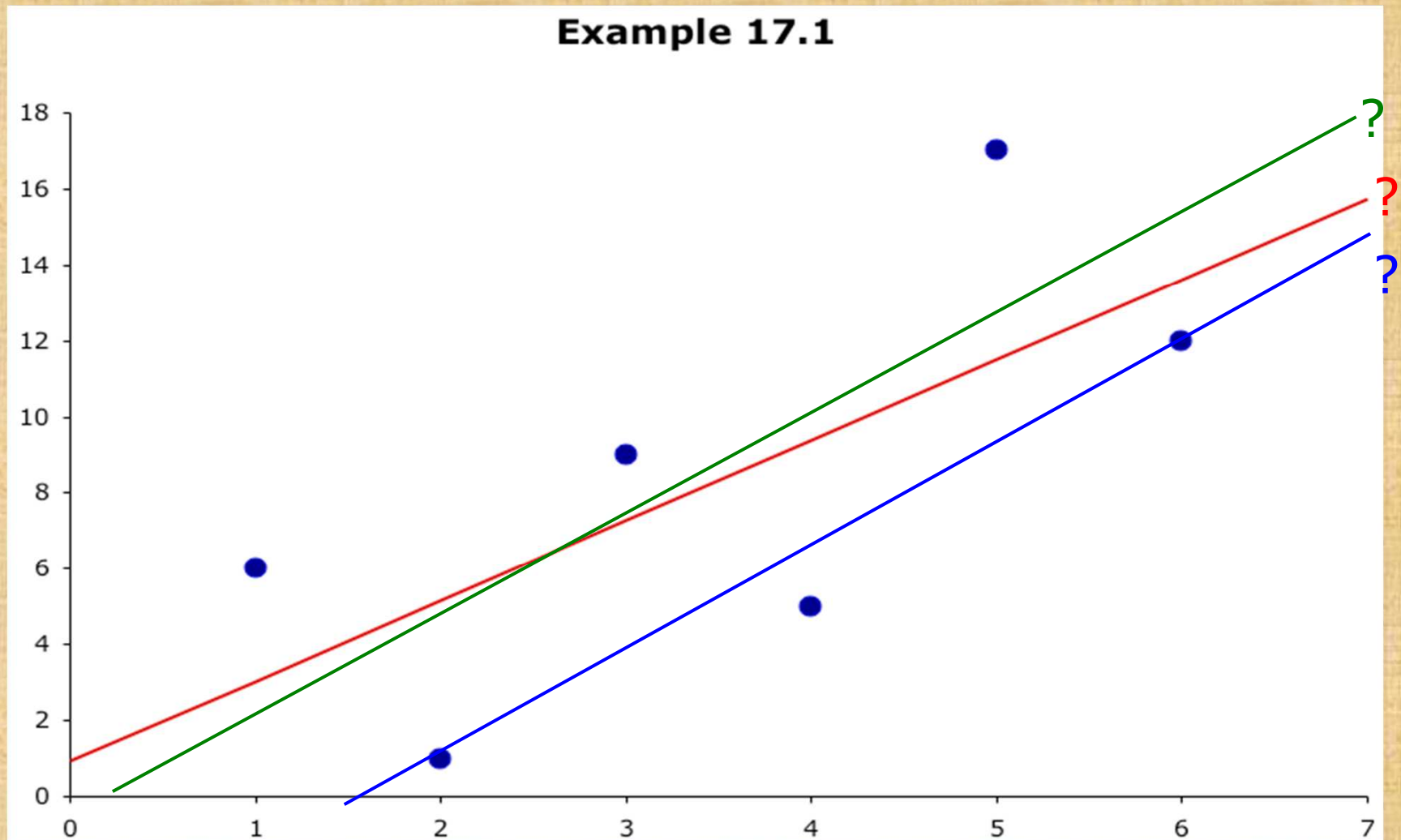
$\beta_1 > 0$ [positive slope]

$\beta_1 < 0$ [negative slope]



$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$$

Which line has the best “fit” to the data?



Estimating the Coefficients...

In much the same way we base estimates of μ , \bar{x} we estimate with b_0 and β_0 with b_1 , the β_1 -intercept and slope (respectively) of the *least squares* or *regression line* given by:

$$\hat{y} = b_0 + b_1x$$

$$y = \beta_0 + \beta_1x$$

(This is an application of the least squares method and it produces a straight line that *minimizes* the sum of the squared differences between the points and the line)

Least Squares Line...

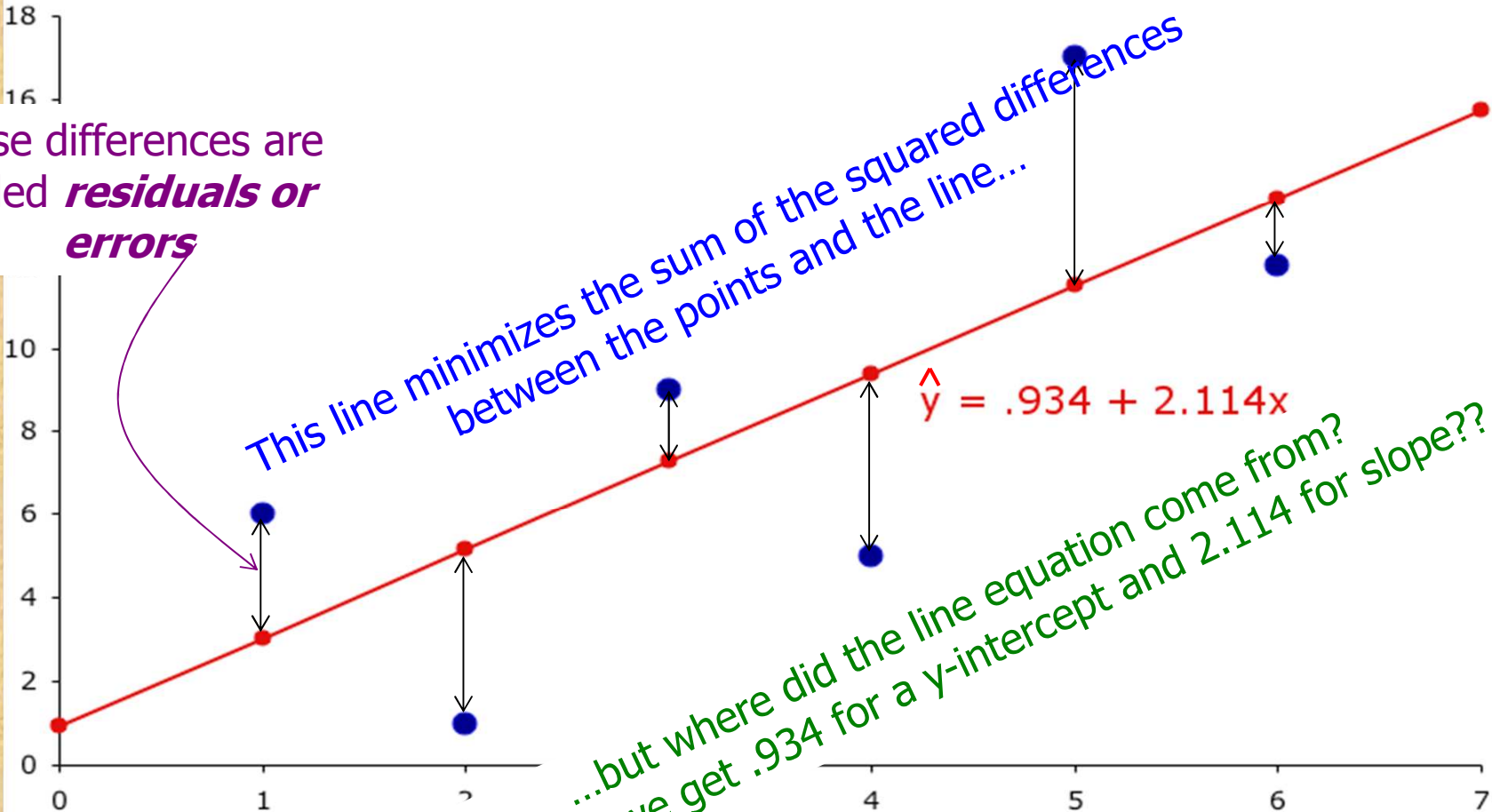
Example 17.1

these differences are called **residuals or errors**

This line minimizes the sum of the squared differences between the points and the line...

$$\hat{y} = .934 + 2.114x$$

...but where did the line equation come from?
How did we get .934 for a y-intercept and 2.114 for slope??



Least Squares Line...[sure glad we have computers now!]

The coefficients b_1 and b_0 for the least squares line...

$$\hat{y} = b_0 + b_1x$$

...are calculated as:

$$s_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n - 1}$$

$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

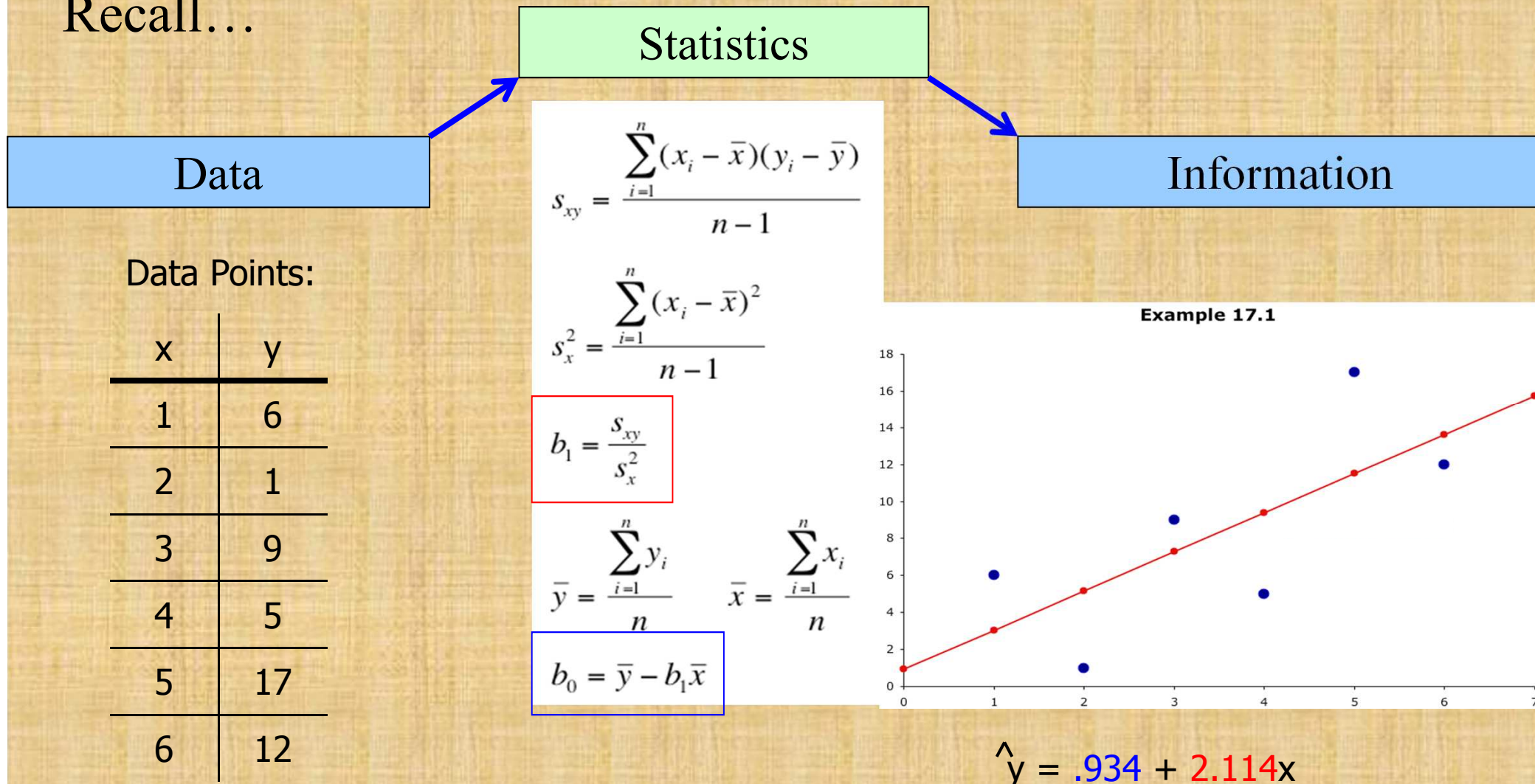
$$b_1 = \frac{s_{xy}}{s_x^2}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x}$$

Least Squares Line... See if you can estimate Y-intercept and slope from this data

Recall...



Least Squares Line... See if you can estimate Y-intercept and slope from this data

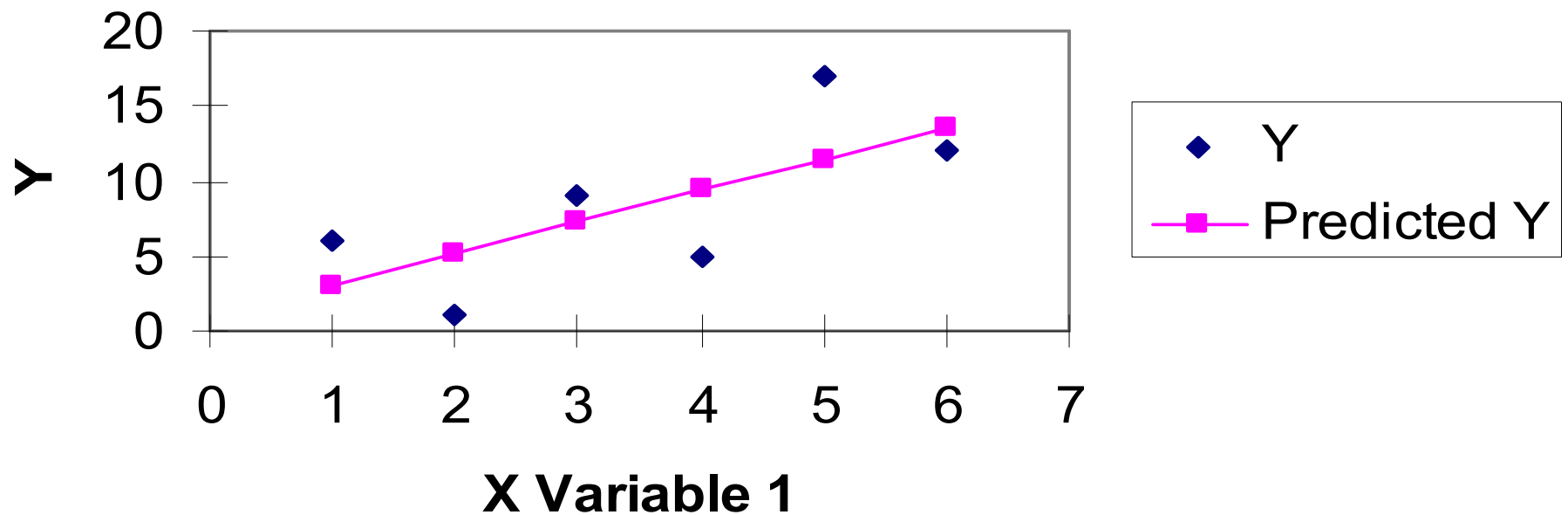
Sum =

X	Y	X - Xbar	Y - Ybar	(X-Xbar)*(Y-Ybar)	(X - Xbar) ²
1	6	-2.500	-2.333	5.833	6.250
2	1	-1.500	-7.333	11.000	2.250
3	9	-0.500	0.667	-0.333	0.250
4	5	0.500	-3.333	-1.667	0.250
5	17	1.500	8.667	13.000	2.250
6	12	2.500	3.667	9.167	6.250
21	50	0.000	0.000	37.000	17.500

Xbar =	3.500	
Ybar =	8.333	
s_{xy} =	7.400	37.00/(6-1)
s_x² =	3.500	17.5/(6-1)
b₁ =	2.114	7.4/3.5
b₀ =	0.933	8.33 - 2.114*3.50

Excel: Plotted Regression Model – You will need to play around with this to get the plot to look “Good”

X Variable 1 Line Fit Plot

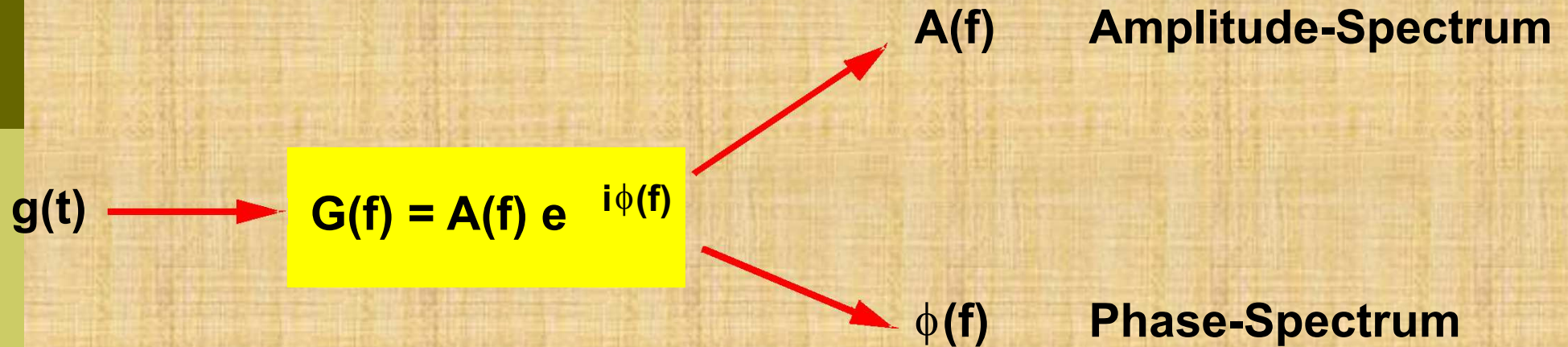


Required Conditions...

For these regression methods **to be valid** the following four conditions for the error variable (ϵ) must be met:

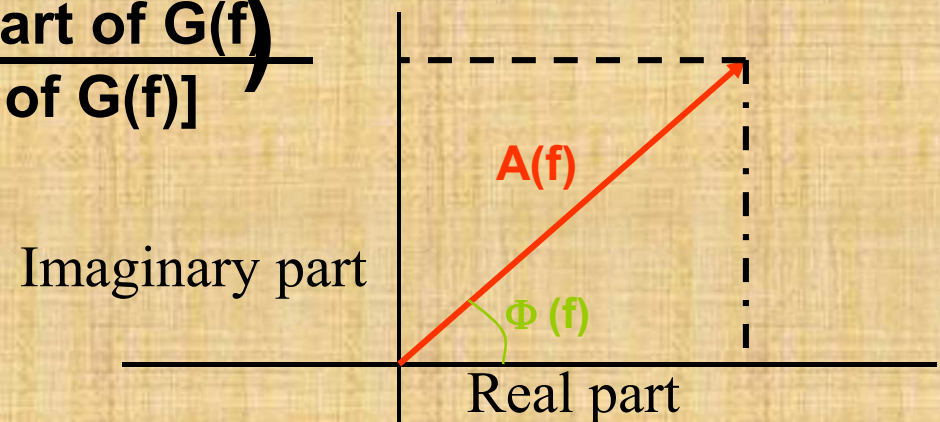
- The probability distribution of ϵ **is normal**.
- The mean of the distribution is 0; that is, $E(\epsilon) = 0$.
- The standard deviation of ϵ **is σ_ϵ , which is a constant** regardless of the value of x.
- The value of ϵ associated with any particular value of y **is independent** of ϵ associated with any other value of y.

Fourier transformation



where $A(f) = \{[\text{Real part of } G(f)]^2 + [\text{Imaginary part of } G(f)]^2\}^{1/2}$

$$\Phi(f) = \tan^{-1} \left(\frac{\text{imaginary part of } G(f)}{\text{real part of } G(f)} \right)$$

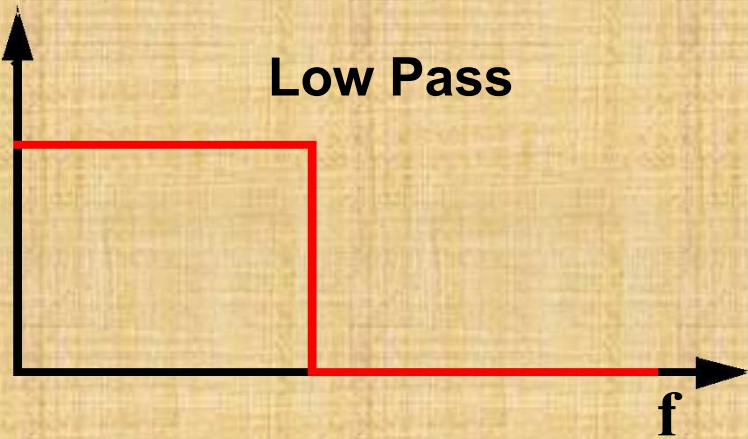


Filtering

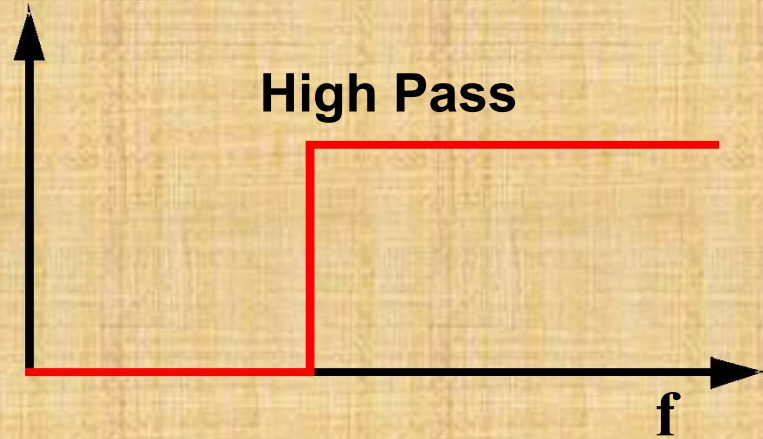
- Consider a noisy 1D signal $f(x)$
- Basic operation: smooth the signal
 - Output = new function $h(x)$
 - Want properties: linearity, shift invariance
- Linear Shift-Invariant Filters
 - If you double input, double output
 - If you shift input, shift output

Frequency filter

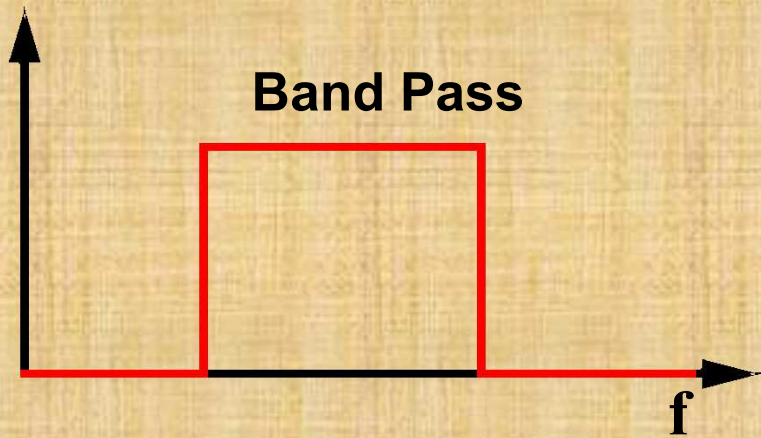
Low Pass



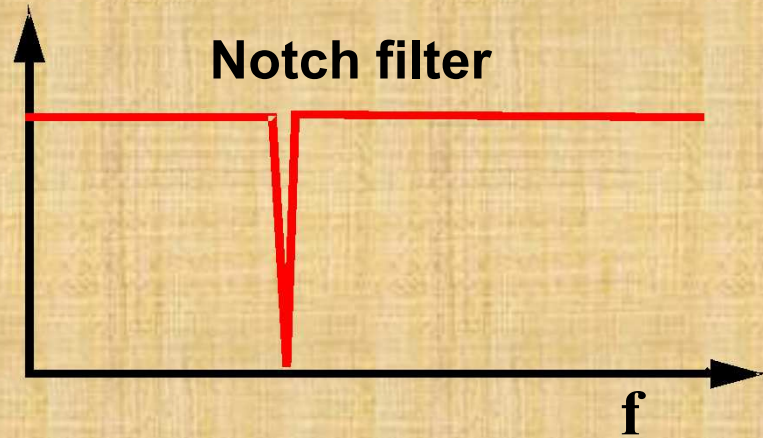
High Pass



Band Pass



Notch filter

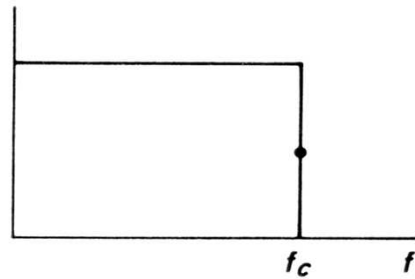


Tapering

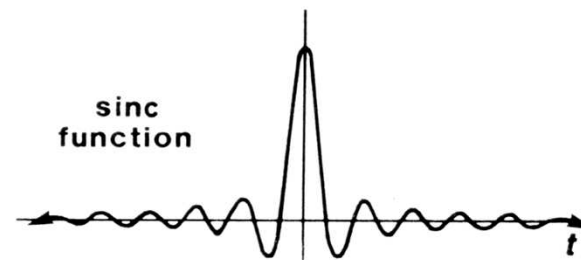
FREQUENCY DOMAIN

TIME DOMAIN

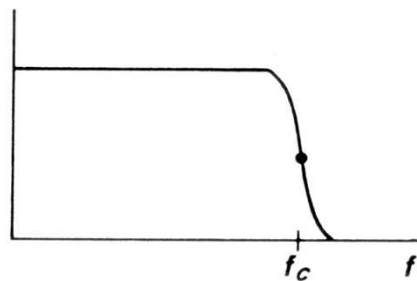
(a)



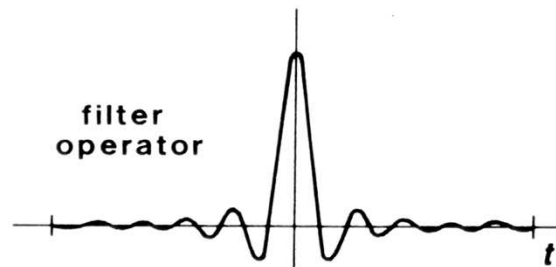
(b)



(c)



(d)



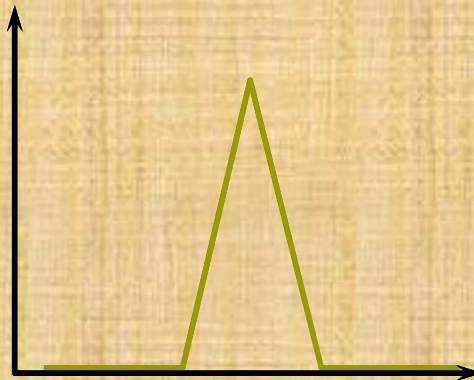
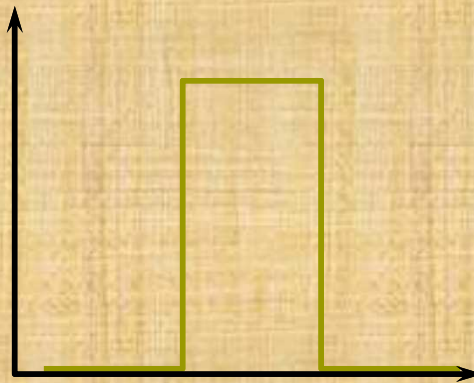
Tapering of filters

- Butterworth
- Hanning
- Ormsby

Amplitude and phase characteristics.

Filter Choices

- ▣ Simple filters: box, triangle

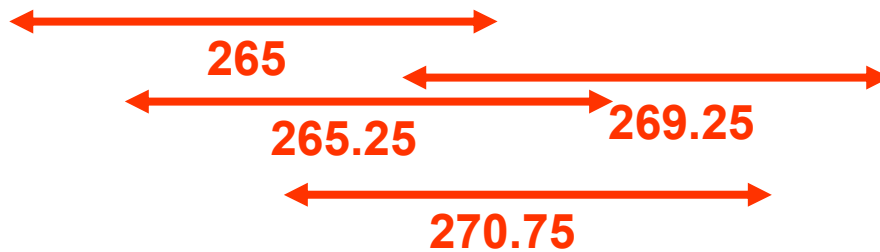


Moving Averages

Why use them?

- Moving Averages, when graphed, allow us to see any **trends** in data that are **cyclical**
- By calculating the average of 2 or more items in the data, any peaks and troughs are smoothed out.

Year	1996				1997				1998			
Quarter	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
Sales	189	244	365	262	190	266	359	250	201	259	401	265



4 Period Moving Average

Year	1996				1997				1998			
Quarter	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
Sales	189	244	365	262	190	266	359	250	201	259	401	265

4 period Moving Average

Quarters	1-4	2-5	3-6	4-7	5-8	6-9	7-10	8-11	9-12
Moving Average	265	265.25	270.75	269.25	266.25	269	267.25	277.75	281.5

• Suppose we have a quarterly time series $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$

The first value that can be calculated for this series by a 4-period MA process would use observations X_1, X_2, X_3 , and X_4 . Notice that our first 4-period average has a center between quarter 2 and quarter 3. Hence we will designate it $X^*_{2.5}$. Thus we have:

$$X^*_{2.5} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4}{4}$$

The next value is:

$$X^*_{3.5} = \frac{X_2 + X_3 + X_4 + X_5}{4}$$

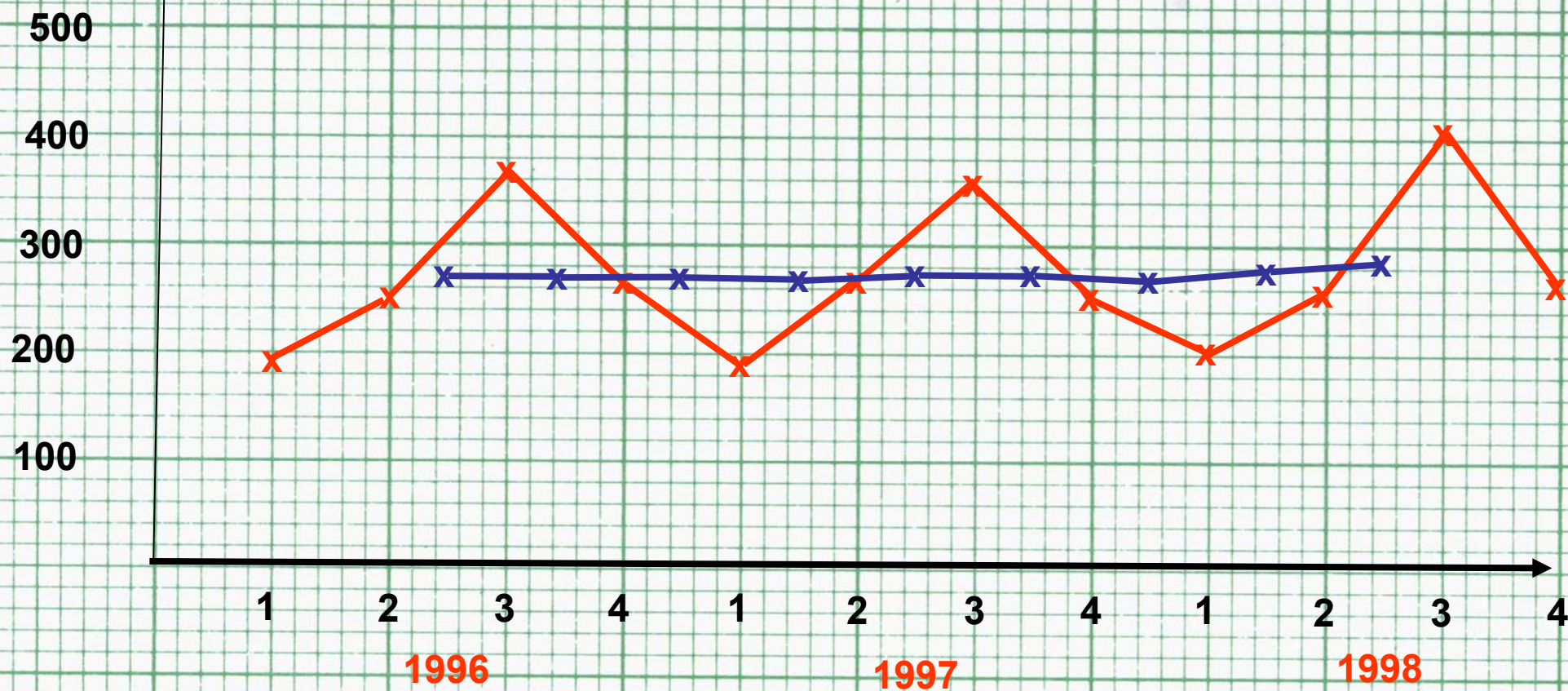
For the series $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$, the formula is¹ :

$$X *_{t+.5} = \frac{X_{t-1} + X_t + X_{t+1} + X_{t+2}}{4} \quad (1)$$

This algorithm gives us a series that is free of seasonality. Alas, the location of the values of this series *do not correspond to the original series.*

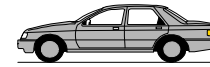


Quarters	1-4	2-5	3-6	4-7	5-8	6-9	7-10	8-11	9-12
Moving Average	265	265.25	270.75	269.25	266.25	269	267.25	277.75	281.5



Moving Averages

Moving averages are used to **level out the large fluctuations** that can occur in a set of data that **varies** over time. They are an important tool in the financial/retail sectors as they can help identify **trend** within the data.



Week	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Cars Sold	5	7	3	8	7	0	14	7	3	5	13	6

In order to have a clearer picture of **trend** we will calculate a **3 point** moving average.

Mean for weeks 1-3 $(5 + 7 + 3)/3 = 5$

2-4 $(7 + 3 + 8)/3 = 6$

3-5 $(3 + 8 + 7)/3 = 6$

4-6 $(8 + 7 + 0)/3 = 5$

5-7 $(7 + 0 + 14)/3 = 7$

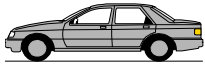
Mean for weeks 6-8 $(0 + 14 + 7)/3 = 7$

7-9 $(14 + 7 + 3)/3 = 8$

8-10 $(7 + 3 + 5)/3 = 5$

9-11 $(3 + 5 + 13)/3 = 7$

10-12 $(5 + 13 + 6)/3 = 8$



Moving Averages

Week	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Cars Sold	5	7	3	8	7	0	14	7	3	5	13	6

Mean for weeks 1-3 $(5 + 7 + 3)/3 = 5$

2-4 $(7 + 3 + 8)/3 = 6$

3-5 $(3 + 8 + 7)/3 = 6$

4-6 $(8 + 7 + 0)/3 = 5$

5-7 $(7 + 0 + 14)/3 = 7$

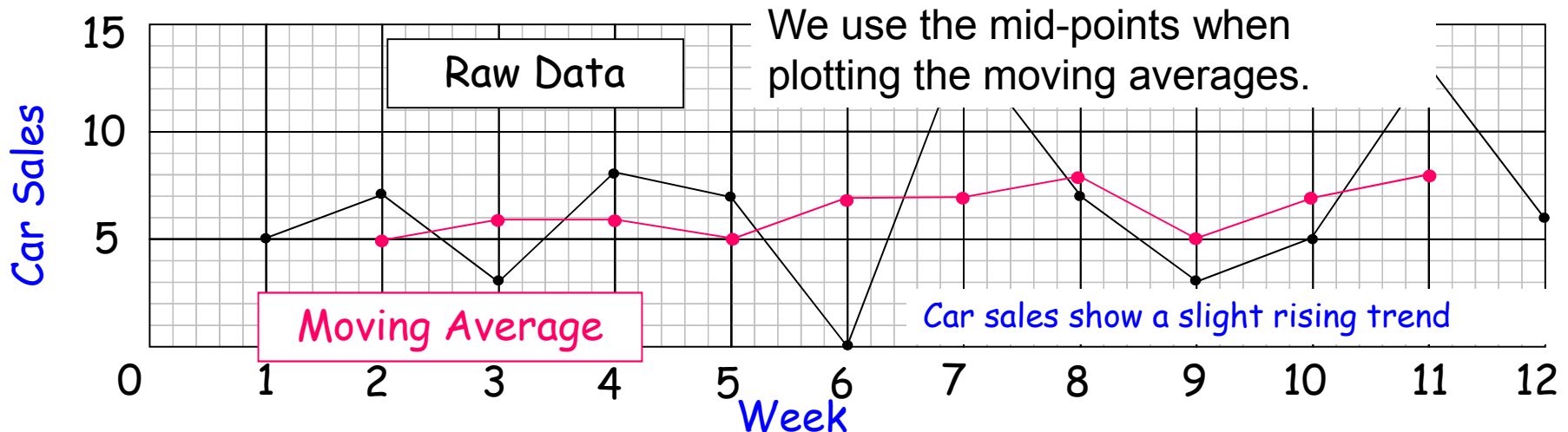
Mean for weeks 6-8 $(0 + 14 + 7)/3 = 7$

7-9 $(14 + 7 + 3)/3 = 8$

8-10 $(7 + 3 + 5)/3 = 5$

9-11 $(3 + 5 + 13)/3 = 7$

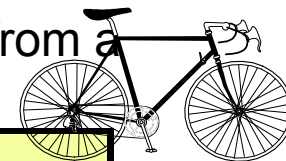
10-12 $(5 + 13 + 6)/3 = 8$



Moving Averages

Moving averages are used to **level out the large fluctuations** that can occur in a set of data that **varies** over time. They are an important tool in the financial/retail sectors as they can help identify **trend** within the data.

Example 2: The data in the table below gives information on cycle sales from a cycle shop over a 12 week period last autumn.



Week	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Bikes Sold	7	14	6	5	3	10	10	1	3	6	6	5

In order to have a clearer idea of **trend** we will calculate a **4 point** moving average.

Mean for weeks:

$$1-4 \quad (7 + 14 + 6 + 5)/4 = 8$$

$$2-5 \quad (14 + 6 + 5 + 3)/4 = 7$$

$$3-6 \quad (6 + 5 + 3 + 10)/4 = 6$$

$$4-7 \quad (5 + 3 + 10 + 10)/4 = 7$$

$$5-8 \quad (3 + 10 + 10 + 1)/4 = 6$$

Mean for weeks:

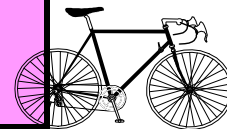
$$6-9 \quad (10 + 10 + 1 + 3)/4 = 6$$

$$7-10 \quad (10 + 1 + 3 + 6)/4 = 5$$

$$8-11 \quad (1 + 3 + 6 + 6)/4 = 4$$

$$9-12 \quad (3 + 6 + 6 + 5)/4 = 5$$

Week	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Bikes Sold	7	14	6	5	3	10	10	1	3	6	6	5



Mean for weeks:

$$1-4 \quad (7 + 14 + 6 + 5)/4 = 8$$

$$2-5 \quad (14 + 6 + 5 + 3)/4 = 7$$

$$3-6 \quad (6 + 5 + 3 + 10)/4 = 6$$

$$4-7 \quad (5 + 3 + 10 + 10)/4 = 7$$

$$5-8 \quad (3 + 10 + 10 + 1)/4 = 6$$

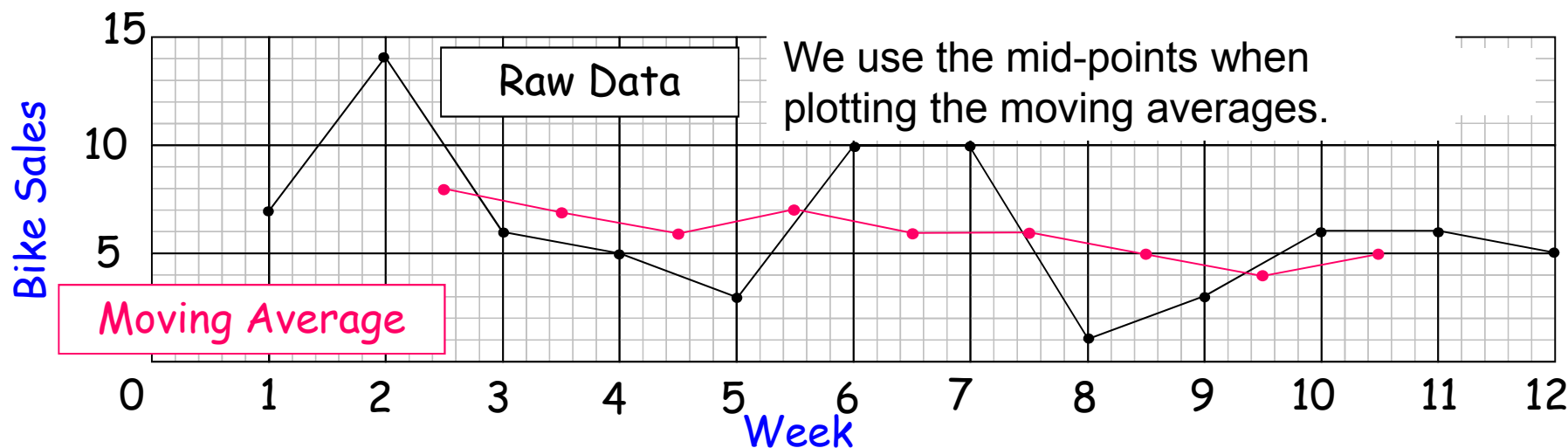
Mean for weeks:

$$6-9 \quad (10 + 10 + 1 + 3)/4 = 6$$

$$7-10 \quad (10 + 1 + 3 + 6)/4 = 5$$

$$8-11 \quad (1 + 3 + 6 + 6)/4 = 4$$

$$9-12 \quad (3 + 6 + 6 + 5)/4 = 5$$



Introduction To Analog Filters

Filters

Background:

- Filters may be classified as either digital or analog.
- Digital filters are implemented using a digital computer or special purpose digital hardware.
- Analog filters may be classified as either passive or active and are usually implemented with R, L, and C components and operational amplifiers.

Filters

Background:

- An active filter is one that, along with R, L, and C components, also contains an energy source, such as that derived from an operational amplifier.
- A passive filter is one that contains only R, L, and C components. It is not necessary that all three be present. L is often omitted (on purpose) from passive filter design because of the size and cost of inductors – and they also carry along an R that must be included in the design.

Filters

Background:

- The analysis of analog filters is well described in filter text books. The most popular include Butterworth, Chebyshev and elliptic methods.
- The synthesis (realization) of analog filters, that is, the way one builds (topological layout) the filters, received significant attention during 1940 thru 1960. Leading the work were Cauer and Tuttle. Since that time, very little effort has been directed to analog filter realization.

Filters

Background:

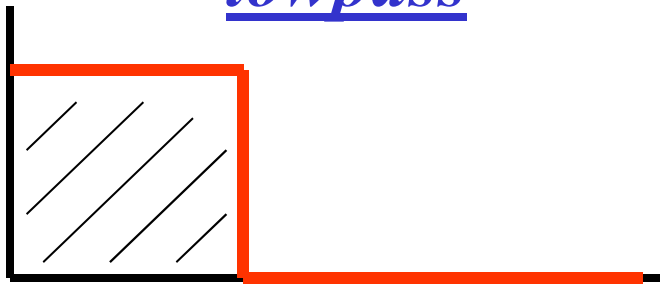
- Generally speaking, digital filters have become the focus of attention in the last 40 years. The interest in digital filters started with the advent of the digital computer, especially the affordable PC and special purpose signal processing boards. People who led the way in the work (the analysis part) were Kaiser, Gold and Radar.
- A digital filter is simply the implementation of an equation(s) in computer software. There are no R, L, C components as such. However, digital filters can also be built directly into special purpose computers in hardware form. But the execution is still in software.

Passive Analog Filters

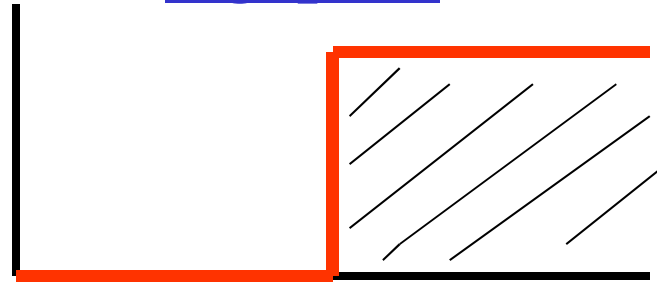
Background:

Four types of filters - “Ideal”

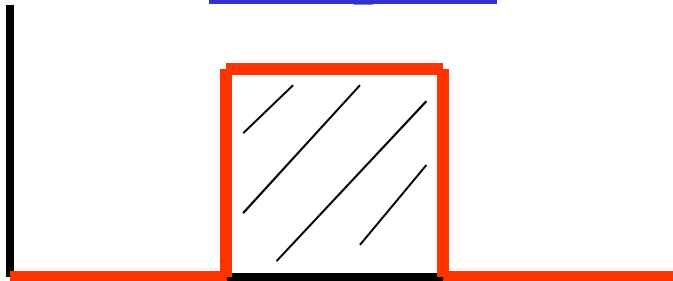
lowpass



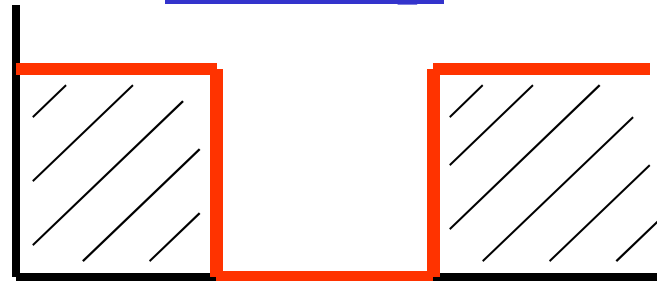
highpass



bandpass



bandstop

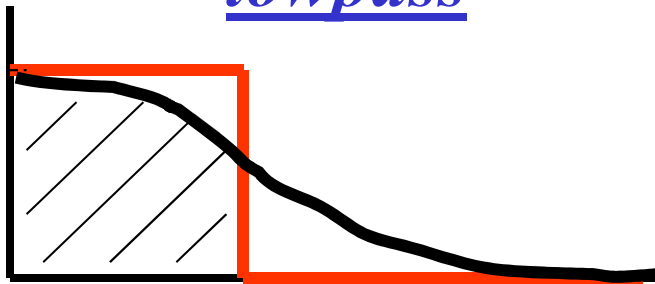


Passive Analog Filters

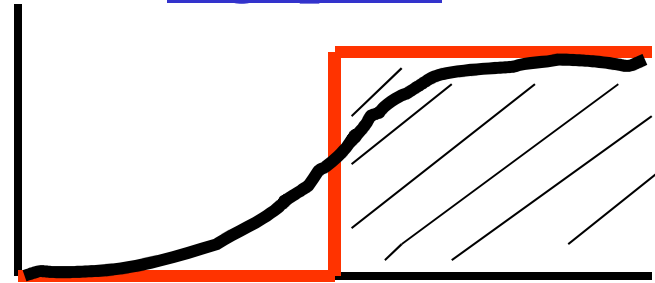
Background:

Realistic Filters: —

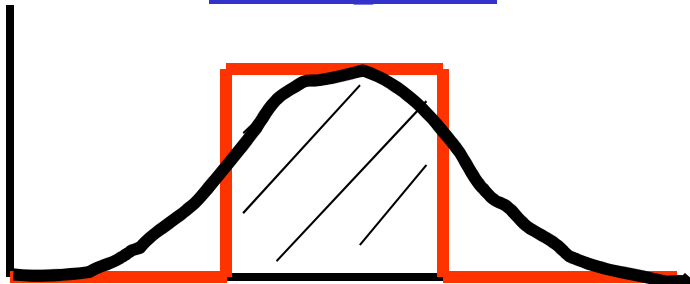
lowpass



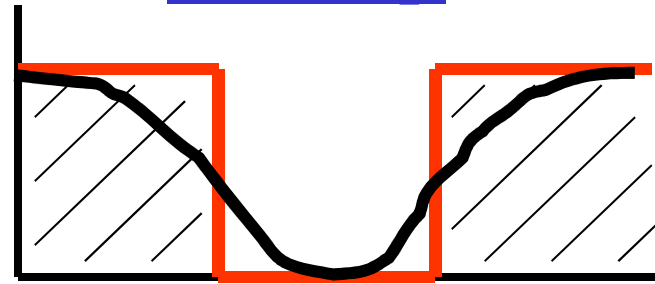
highpass



bandpass



bandstop



Passive Analog Filters

Background:

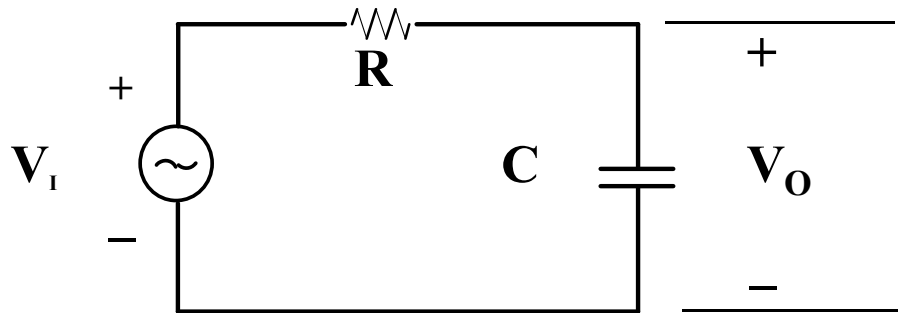
It will be shown later that the ideal filter, sometimes called a “brickwall” filter, can be approached by making the order of the filter higher and higher.

The order here refers to the order of the polynomial(s) that are used to define the filter.

Passive Analog Filters

Low Pass Filter

Consider the circuit below.

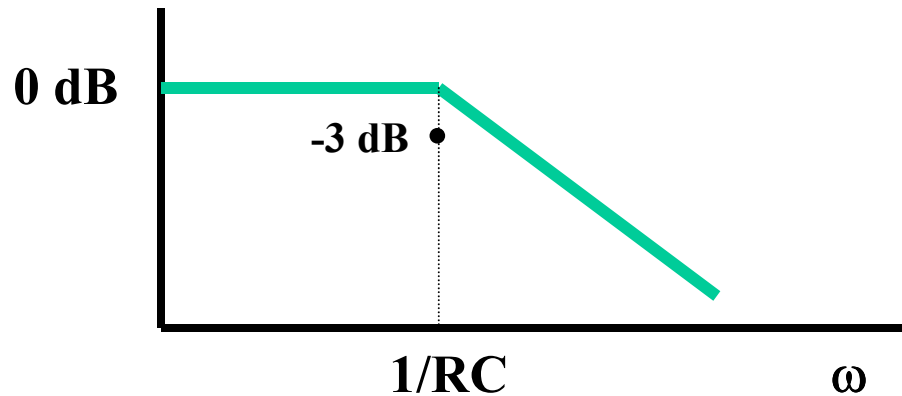


Low pass filter circuit

$$\frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

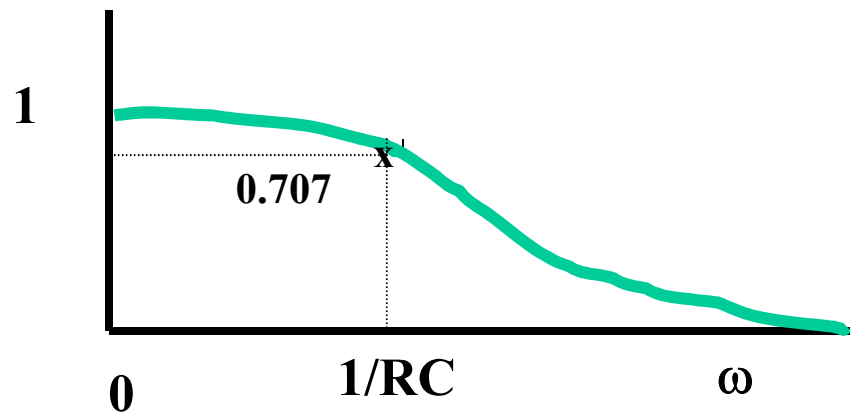
Passive Analog Filters

Low Pass Filter



Bode

Passes low frequencies
Attenuates high frequencies

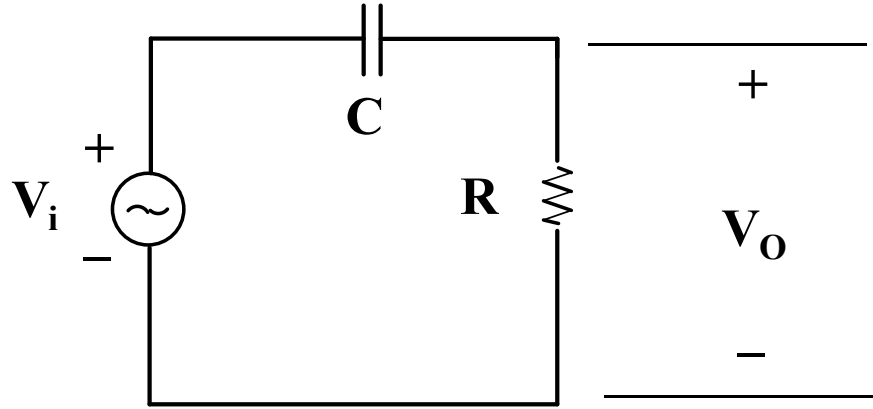


Linear Plot

Passive Analog Filters

High Pass Filter

Consider the circuit below.



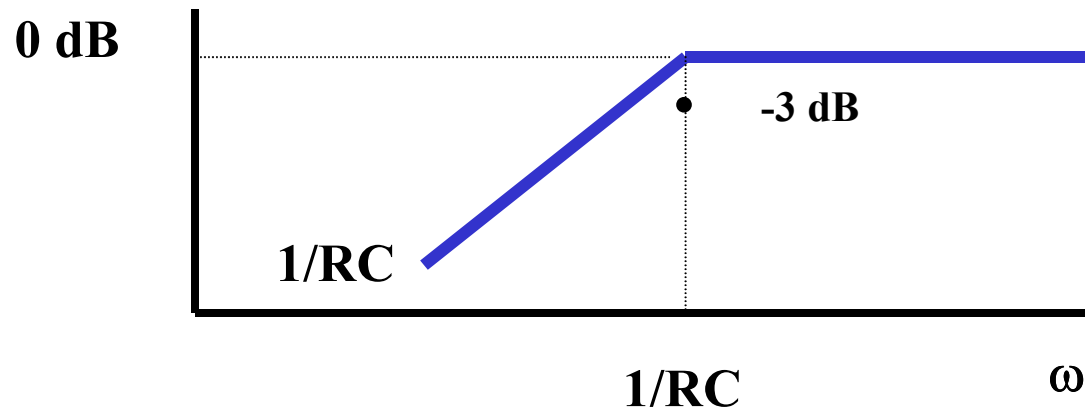
High Pass Filter

$$\frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

Passive Analog Filters

High Pass Filter

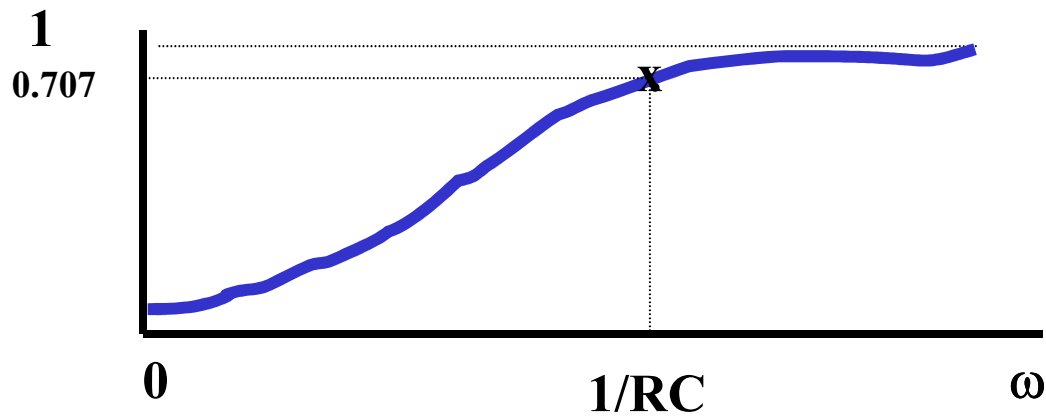
Bode



Passes high frequencies

Attenuates low frequencies

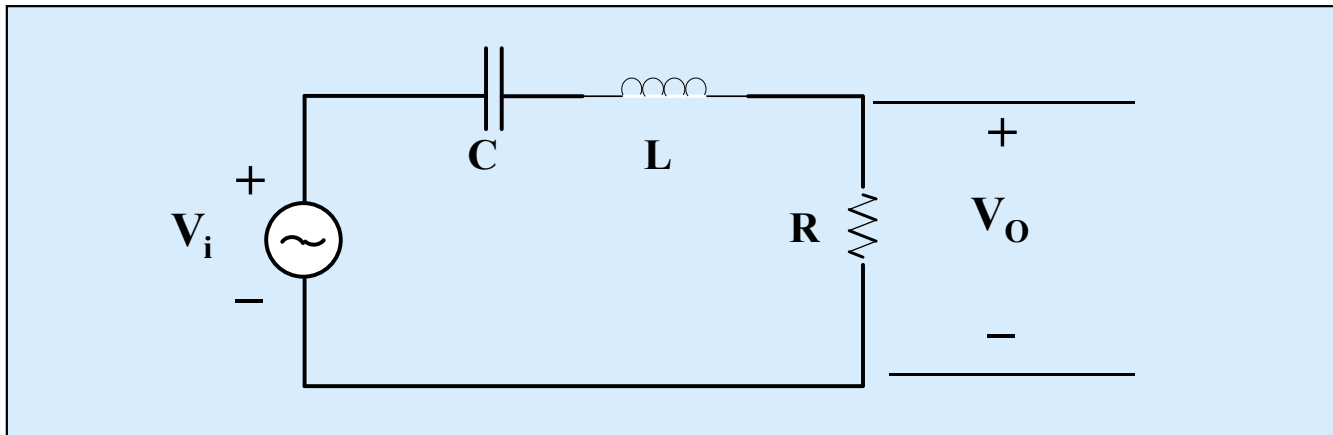
Linear



Passive Analog Filters

Bandpass Pass Filter

Consider the circuit shown below:



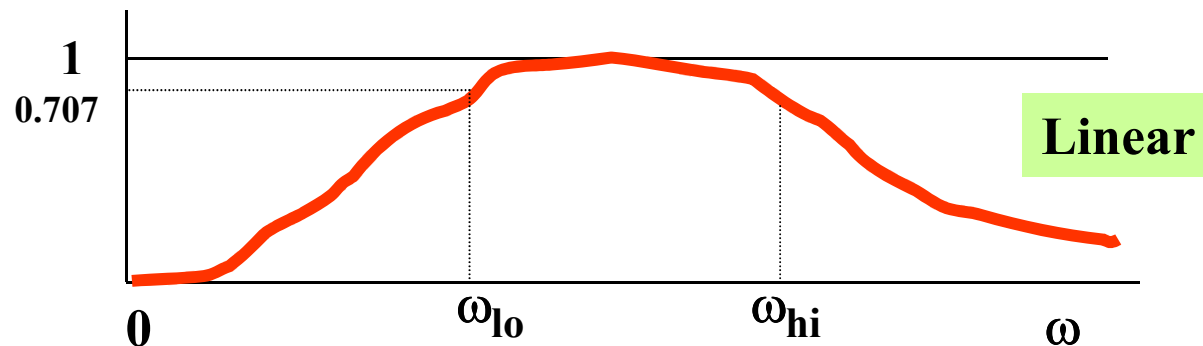
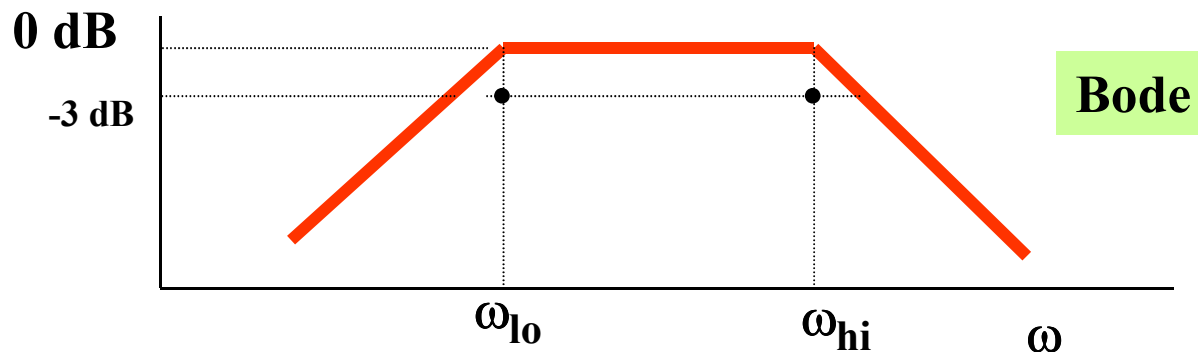
When studying series resonant circuit we showed that;

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{R}{L}s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

Passive Analog Filters

Bandpass Pass Filter

We can make a bandpass from the previous equation and select the poles where we like. In a typical case we have the following shapes.



A Bandpass Digital Filter

Perhaps going in the direction to stimulate your interest in taking a course on filtering, a 10 order analog bandpass butterworth filter will be simulated using Matlab. The program is given below.

```
N = 10;          %10th order butterworth analog prototype

[ZB, PB, KB] = buttap(N);
numzb = poly([ZB]);
denpb = poly([PB]);

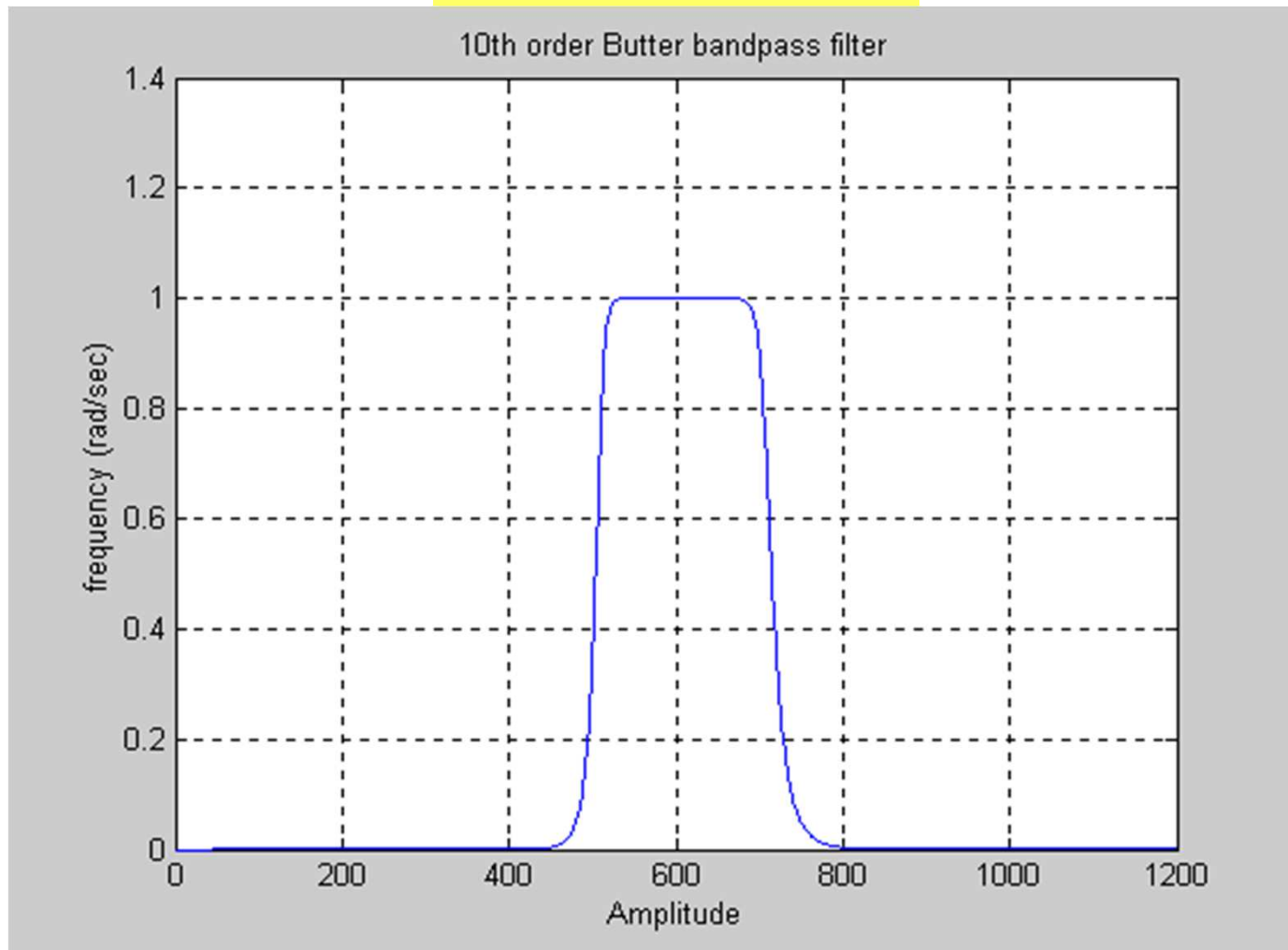
wo = 600;  bw = 200;      % wo is the center freq
                        % bw is the bandwidth
[numbbs,denbbs] = lp2bs(numzb,denpb,wo,bw);

w = 1:1:1200;

Hbbs = freqs(numbbs,denbbs,w);
Hb = abs(Hbbs);

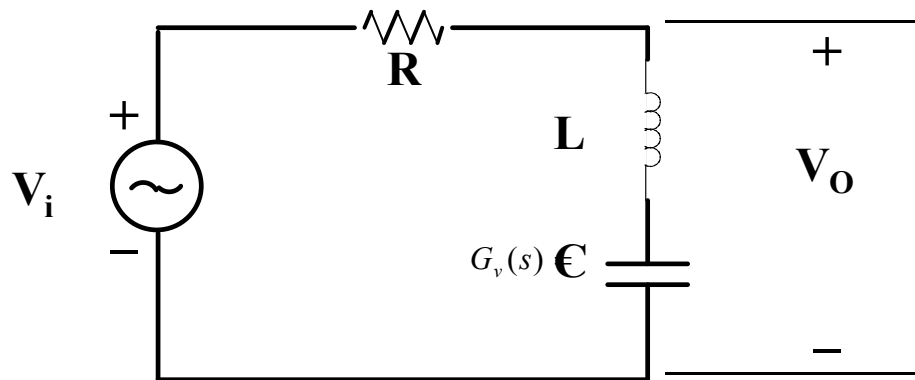
plot(w,Hb)
grid
xlabel('Amplitude')
ylabel('frequency (rad/sec)')
title('10th order Butterworth filter')
```

A Bandpass Filter



RLC Band stop Filter

Consider the circuit below:



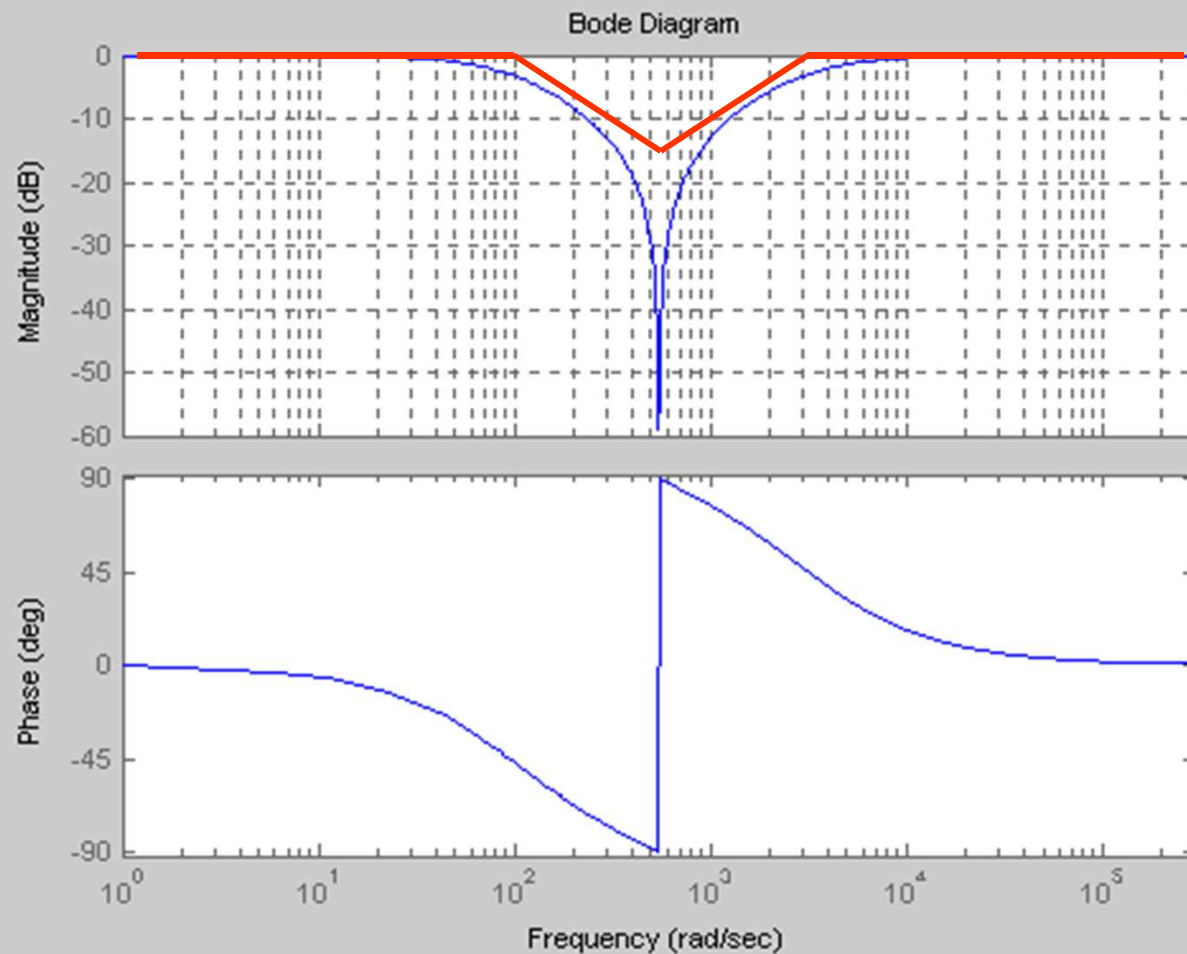
The transfer function for V_o/V_i can be expressed as follows:

$$G_v(s) = \frac{s^2 + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

RLC Band Stop Filter

Example

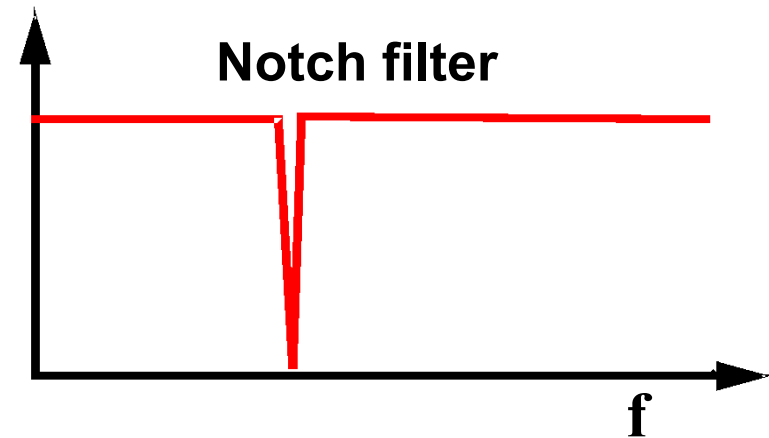
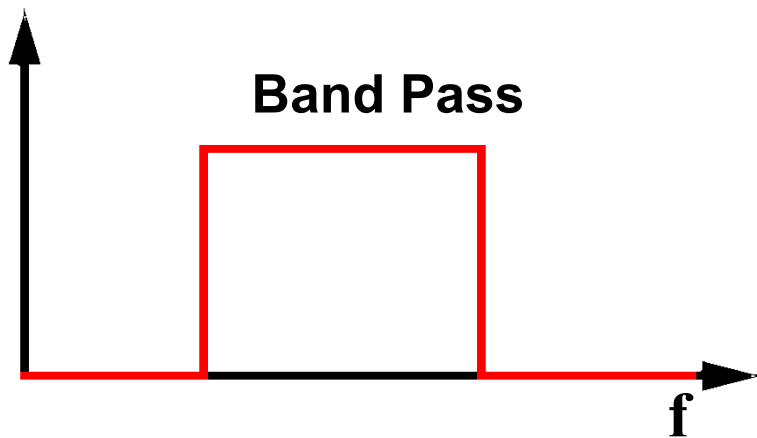
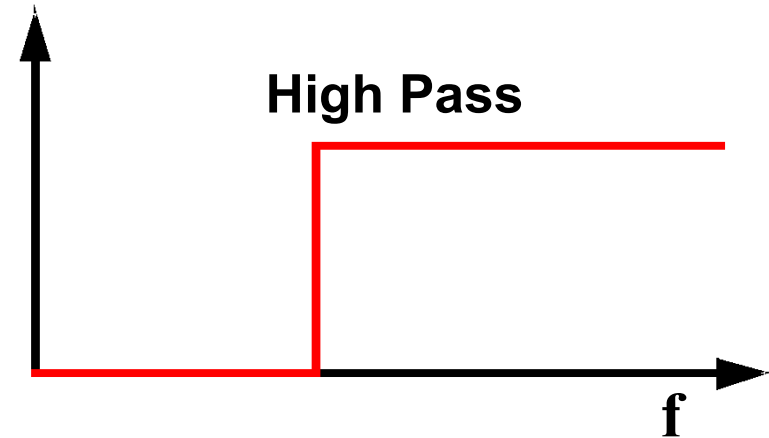
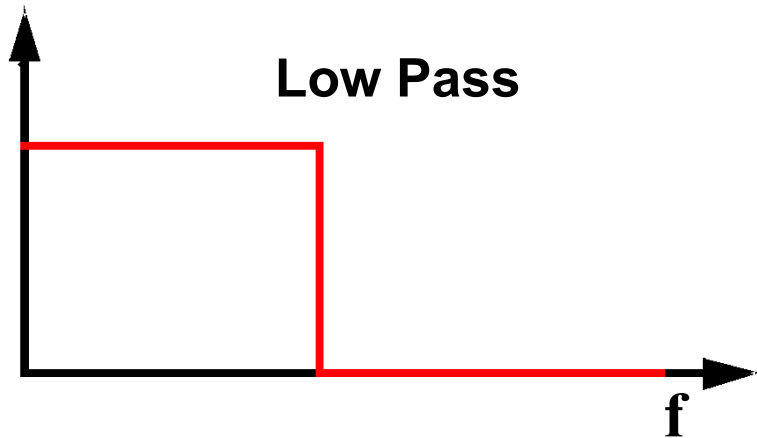
— Bode
— Matlab



Filtering

- Consider a noisy 1D signal $f(x)$
- Basic operation: smooth the signal
 - Output = new function $h(x)$
 - Want properties: linearity, shift invariance
- Linear Shift-Invariant Filters
 - If you double input, double output
 - If you shift input, shift output

Frequency filter

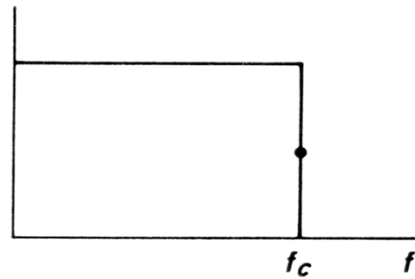


Tapering

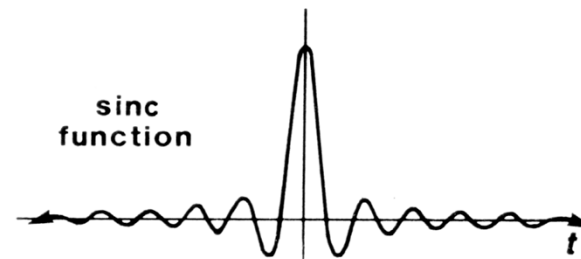
FREQUENCY DOMAIN

TIME DOMAIN

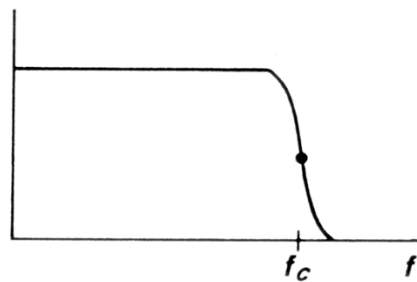
(a)



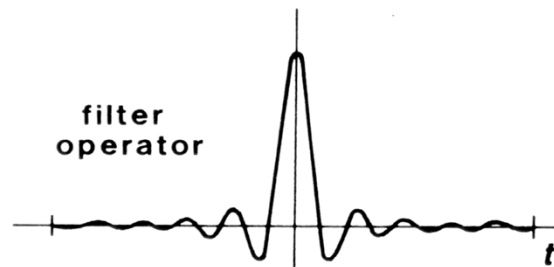
(b)



(c)



(d)



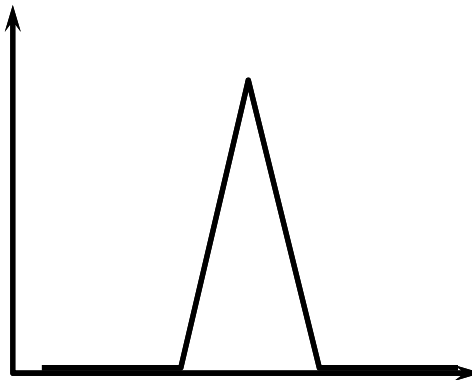
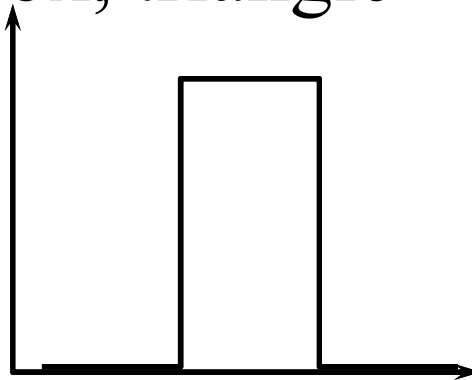
Tapering of filters

- Butterworth
- Hanning
- Ormsby

Amplitude and phase characteristics.

Filter Choices

- Simple filters: box, triangle



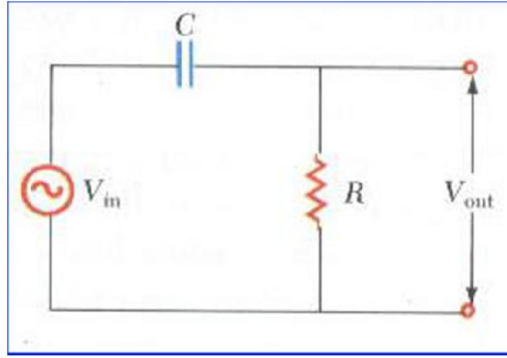
المرشحات

بصفة عامة تستخدم المرشحات في الدوائر الكهربائية مثل دوائر الاستقبال في الراديو للتخلص من الترددات التي قد تشوش على الإشارة المراد التقاطها وتكبيرها ، وتتكون المرشحات الكهربائية من مقاومة ومكثف موصلين على التوالي ، ويمكن ترشيح الترددات العالية أو الترددات المنخفضة وذلك من خلال طريق توصيل المقاومة والمكثف

1. مرشح الترددات العالية

مرشح التردد العالي

هو مرشح يعمل على رفض أو توهين الترددات المنخفضة و تمرير الترددات العالية
أبسط أشكال مرشحات التردد العالي هو دائرة الكترونية تتكون من مكثف و مقاومة



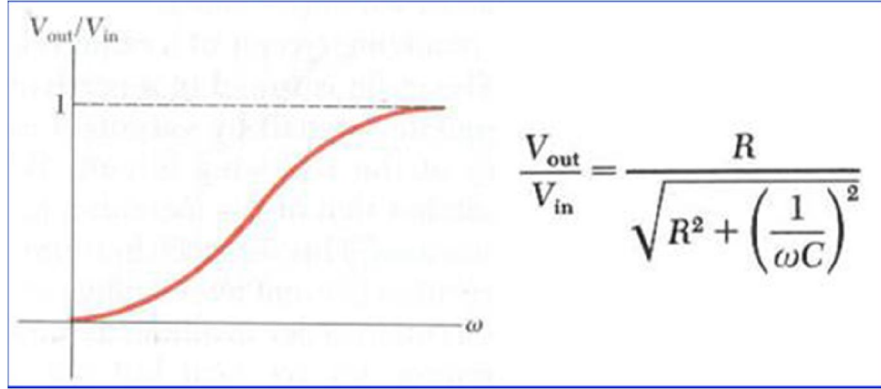
توضح الدائرة الكهربائية في الشكل السابق فكرة عمل مرشح الترددات العالية ، حيث أن المصدر متصل مع المكثف والمقاومة على التوالي ويكوّن الجهد الناتج على طرفي المقاومة
تعطى بالعلاقة V_{in} القيمة العظمى للجهد

$$V_{in} = I_m Z = I_m \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

وقيمة الجهد الناتج على طرفي المقاومة يعطى من خلال قانون اوم

$$V_{out} = I_m R$$

بقسمة المعادلتين نحصل على المعادلة التالية :



من المعادلة نلاحظ أن عند الترددات المنخفضة تكون قيمة الجهد V_{out} اقل بكثير من V_{in} وعند الترددات المرتفعة تكون قيمتي الجهد متساويتين $V_{in}=V_{out}$

وهذا يعني أن الدائرة تمرر فقط الترددات المرتفعة ولذلك سميت-High pass filter بينما الترددات المنخفضة توقف ولا تمرر.

2. مرشح الترددات المنخفضة

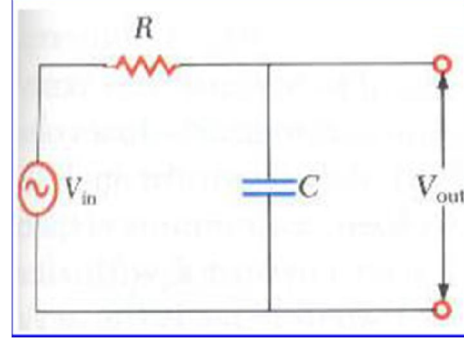
مرشح الترددات المنخفضة

هو مرشح يقوم بتمرير الإشارات ذات الترددات المنخفضة ، ويقوم بإضعاف (تقليل شدة) الإشارات ذات الترددات الأعلى من تردد الإيقاف

نظرية مرشح الترددات المنخفضة تتمثل في الكثير من التطبيقات مثل الدوائر الالكترونية والخوارزميات الرقمية والموانع الصوتية... الخ

مرشحات الترددات المنخفضة تلعب أيضا دورا هاما في مجال معالجة الإشارة. من أنواعه :

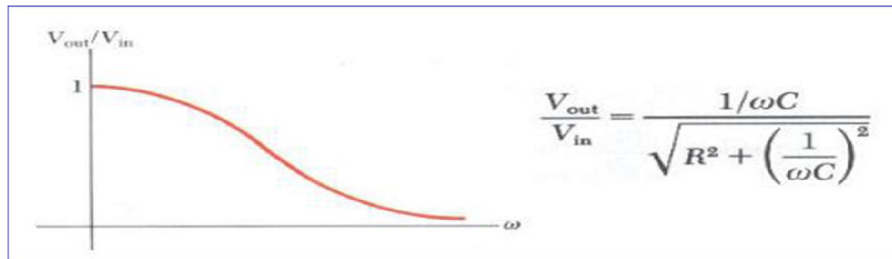
مرشح ترددات منخفضة سلبي: يتألف من مقاومة ومكثف عادة
مرشح ترددات منخفضة إيجابي: يعتمد على مكبر عمليات الكتروني
بالإضافة للسابق.



من الشكل نلاحظ أنه في حالة توصيل المخرج على طرفي المكثف بدلا من المقاومة يصبح عمل المرشح هو تمرير الترددات المنخفضة وحجب الترددات العالية ، وقيمة الجهد الناتج على طرفي المكثف يعطى كالتالي :

$$V_{out} = I_m X_C = \frac{I_m}{\omega C}$$

بقسمة المعادلتين نحصل على المعادلة التالية:



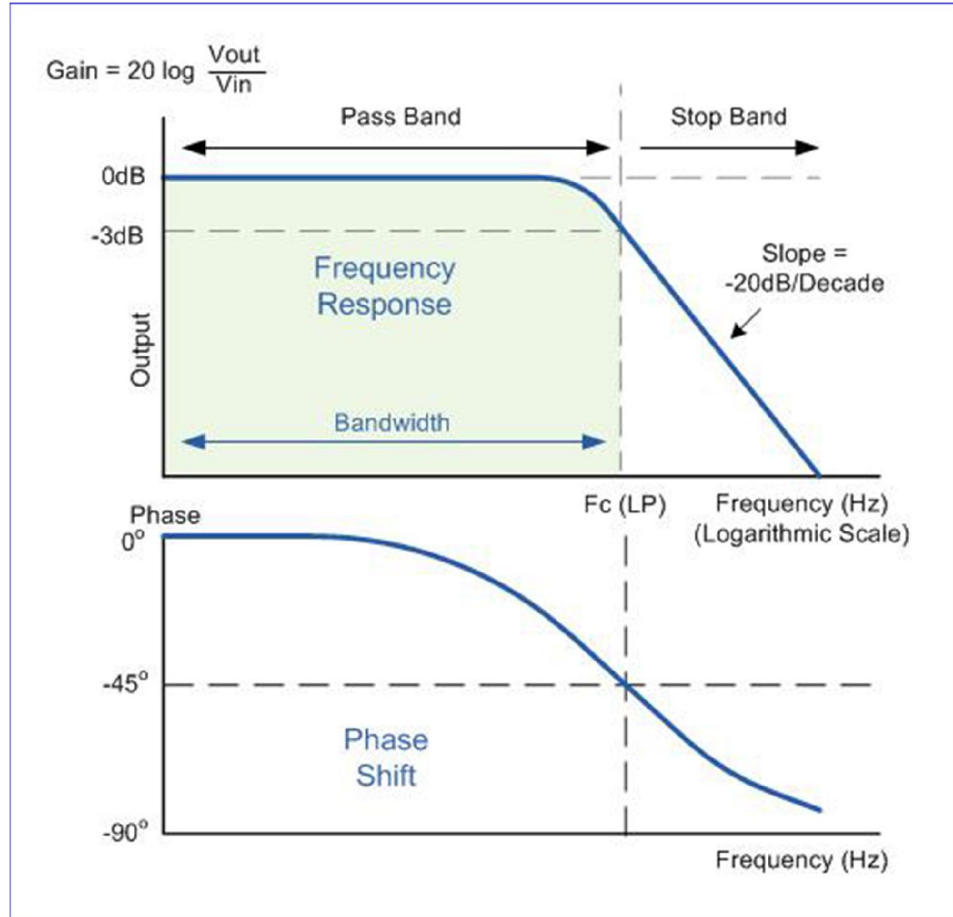
من المعادلة نلاحظ أن عند الترددات المنخفضة تكون قيمتي الجهد V_{out} و V_{in} متساويتين بينما عند الترددات المرتفعة قيمة الجهد V_{out} أقل بكثير من V_{in} وهذا يعني أن الدائرة تمرر فقط الترددات المنخفضة ولذلك سميت Low-pass filter بينما الترددات المرتفعة توقف ولا تمرر.

كما يمكن استخدام مقاومة وملف RL Filters للحصول على مرشح يعمل بنفس الفكرة. كما يمكن تصميم مرشح يمرر حزمة من

الترددات Band-pass filter.

.Band-pass

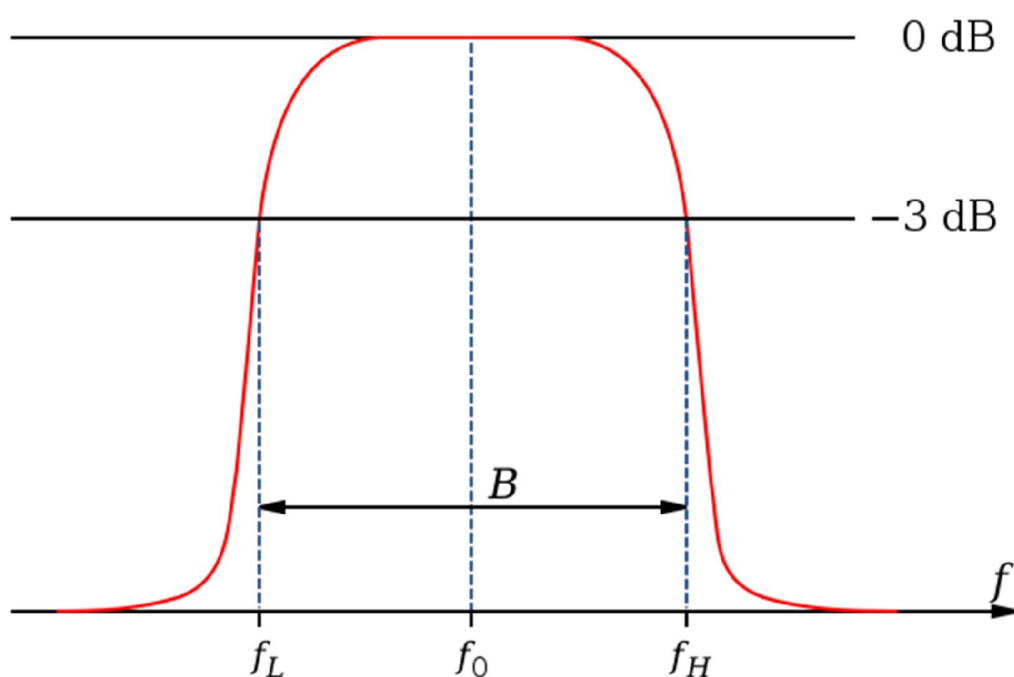
الترددات filter



3. مرشح تمرير النطاق

مرشح تمرير النطاق

عبارة عن جهاز لتمرير الترددات في نطاق معين ويمنع أو يوهن الترددات التي لا تنتمي إلى هذا النطاق.

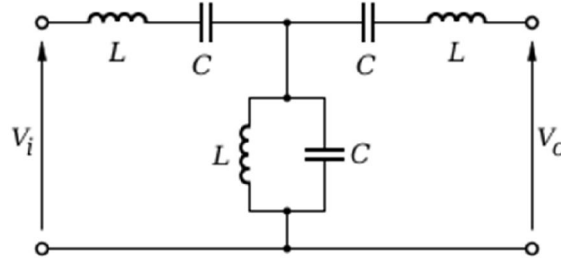


أنواعه :

يتم تقسيم مرشح تمرير النطاق على أساسين هامين في علم الإلكترونيات والاتصالات :

أ- مرشح تمرير النطاق السلبي أو العادي:

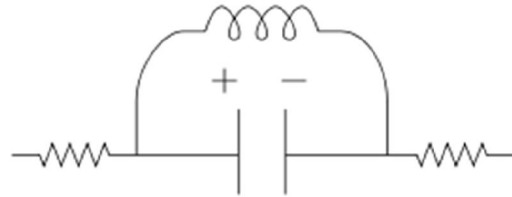
يُعتبر الأساس في تكوين المرشحات ويتألف من ثلاث عناصر كهربائية أساسية هي الملف، المكثف، والمقاومة بتركيب معين يحقق شرط الترشيح.



مثال لمرشح تمرير النطاق في وسط معقد

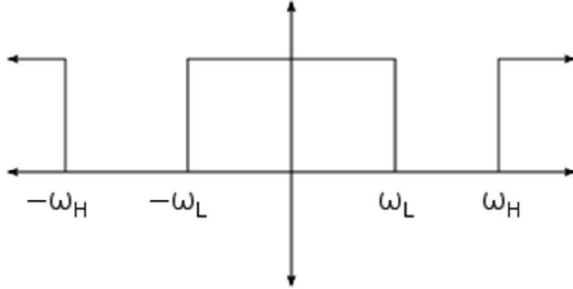
ب- مرشح تمرير النطاق الفعال:

تدخل في تركيبه عناصر إلكترونية تحتاج لطاقة أو تغذية راجعة مثل مكبر العمليات. يُعتبر هذا النوع من المرشحات أكثر كفاءة من المرشح العادي.



مخطط يبين مرشح تمرير النطاق على شكل كيلوري.

4. مرشح إيقاف النطاق



مرشح إيقاف النطاق (band-stop filter) :

هو مرشح يعمل تماما عكس ما يعمل مرشح تمرير النطاق إذ يقوم برفض أو توهين الترددات الواقعة ضمن نطاق معين ويمرر ما دونها.

5. مرشح رقمي

المرشح الرقمي أو المصفوفة الرقمية (بالإنجليزية: digital filter) هي النظرير المتقطع للمصفوفة المتصلة. يتم استعمالها في العديد من المجالات التي تحتاج لرشح وتعمل على حاسوب مثل استخراج إشارة معينة من إشارة أخرى أو الحد من الضجيج أو ما شابه ذلك من التطبيقات. يمكن تقسيم المرشحات على عدة أسس إلا أن أشهر تقسيم يقوم على التمييز بين استجابة المرشح بالتصنيف إلى مرشحات ذات استجابة محدودة finite response filter أو اختصارا FIR و مرشحات ذات استجابة غير محدودة infinite response filter.

6. مرشح إلكتروني

مرشح إلكتروني هو دائرة إلكترونية بالإنجليزية electronic filter يعمل علي فصل الترددات والإشارات المرغوب فيها في الأجهزة الإلكترونية مثل الراديو ن وكنتم الترددات الغير مرغوب فيها أو المشوشة.

الاستخدامات

- في البث و الإذاعة بغرض اختيار تردد محدد للموجات الكهرومغناطيسية من أجل استقبال نفس تردد الموجات بأجهزة الراديو . جميع الترددات الأخرى تُرشف وتُكنتم ،
- تنقية وعزل الترددات المختلفة إلى ترددات عالية، أو ترددات متوسطة ، أو منخفضة ، وتوزيعها على مكبرات للصوت مناسبة للحصول على صوت وأنغام قريبة من الحقيقة ،
- تنقية المصدر الكهربائي في البيوت والمؤسسات ، من شوشرة قد يحدثها فتح أو قفل النور أو الأجهزة الكهربائية الأخرى مثل الفرن الكهربائي والثلاجة والجرس ، وما تحمله الشبكة الكهربائية من شوشرة أخر





DIGITAL FILTERS



Introduction

- ◆ Frequency-selective **filters** pass only certain frequencies
- ◆ Any discrete-time system that modifies certain frequencies is called a **filter**.
- ◆ We concentrate on design of causal
Frequency-selective **filters**



Smoothing Frequency Domain Filters

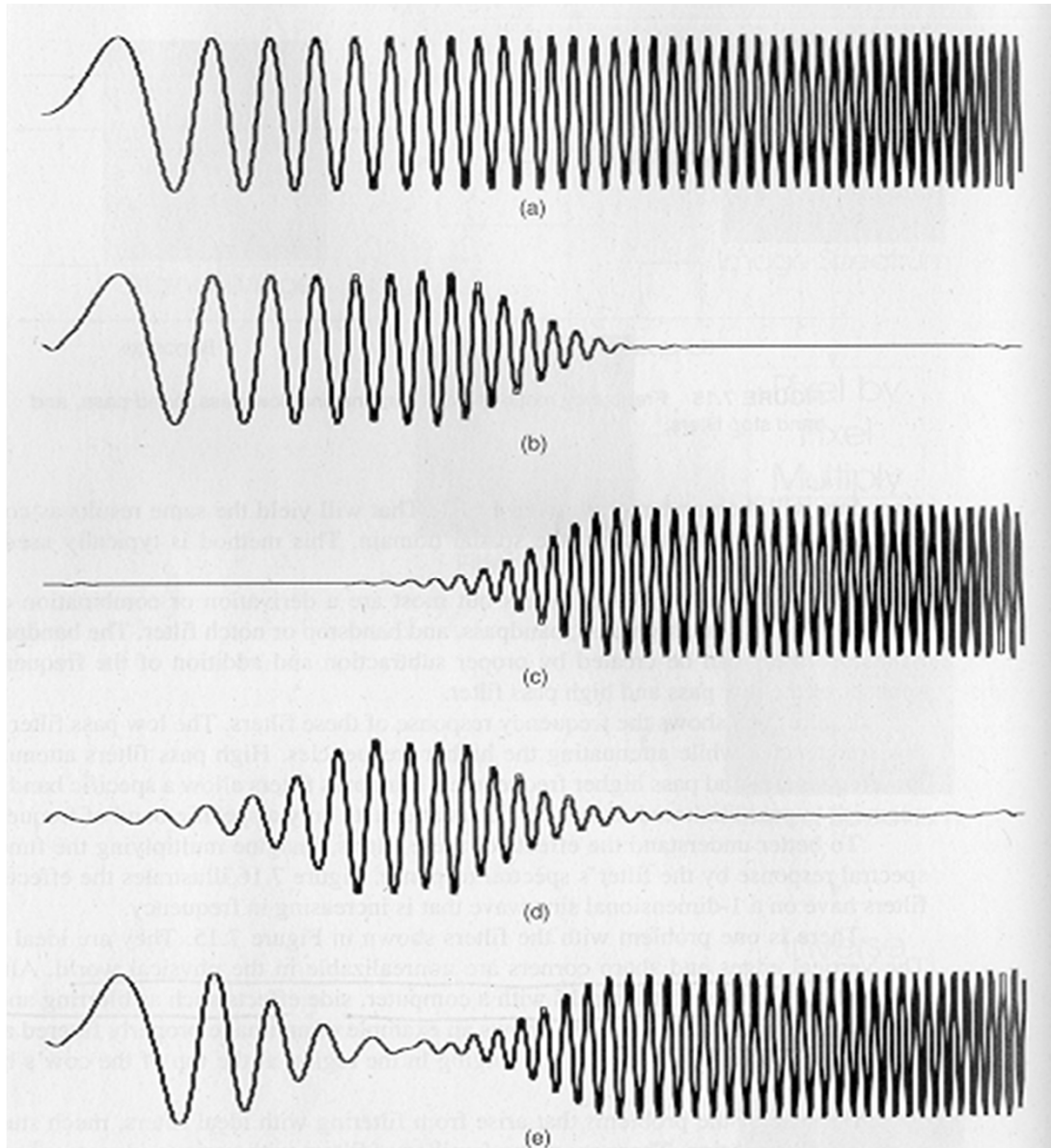
Smoothing is achieved in the frequency domain by dropping out the high frequency components

The basic model for filtering is:

$$G(u,v) = H(u,v)F(u,v)$$

where $F(u,v)$ is the Fourier transform of the signal being filtered and $H(u,v)$ is the filter transform function

Example



Original signal

Low-pass filtered

High-pass filtered

Band-pass filtered

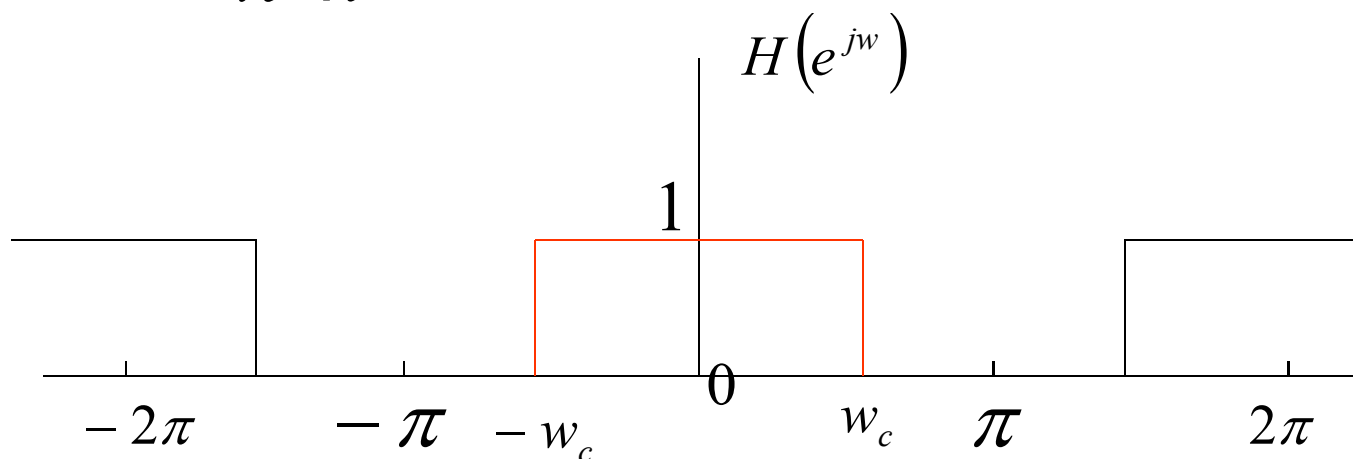
Band-stop filtered

Frequency-Selective Filters

♦ Ideal lowpass filter

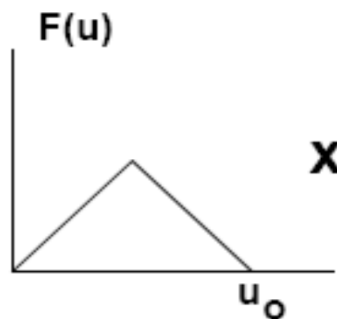
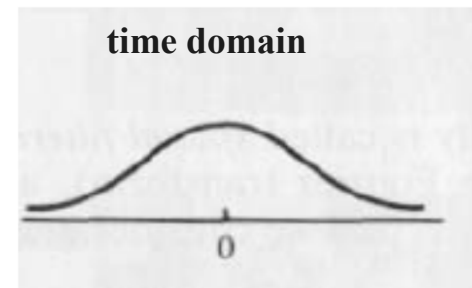
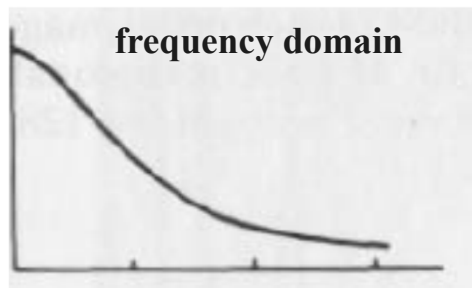
$$H_{lp}(e^{jw}) = \begin{cases} 1, & |w| < w_c \\ 0, & w_c < |w| < \pi \end{cases}$$

$$h_{lp}(n) = \frac{\sin w_c n}{\pi n}, \quad -\infty < n < \infty$$

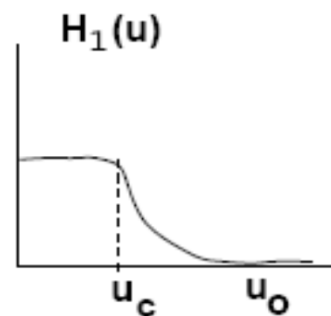


Low-pass filters (i.e., smoothing filters)

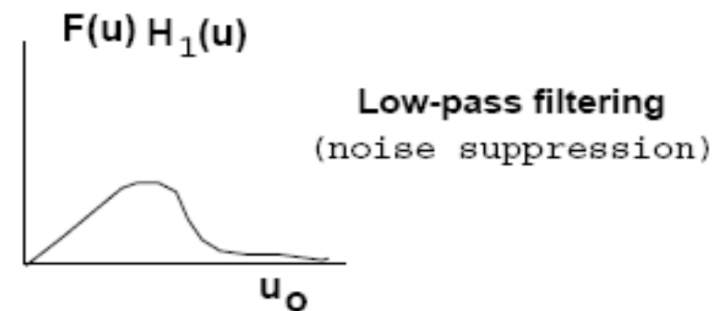
- ◆ Preserve low frequencies - useful for noise suppression



X



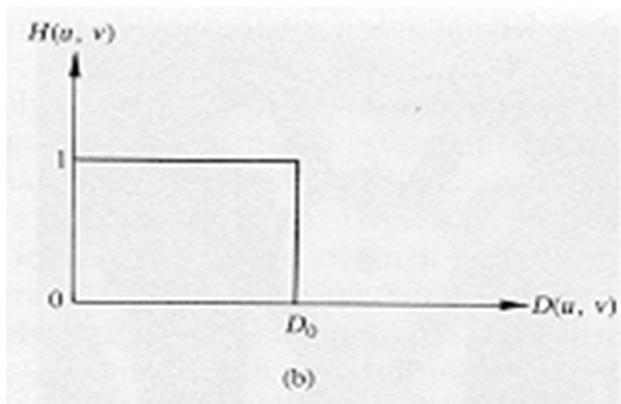
=



Low-pass (LP) filtering

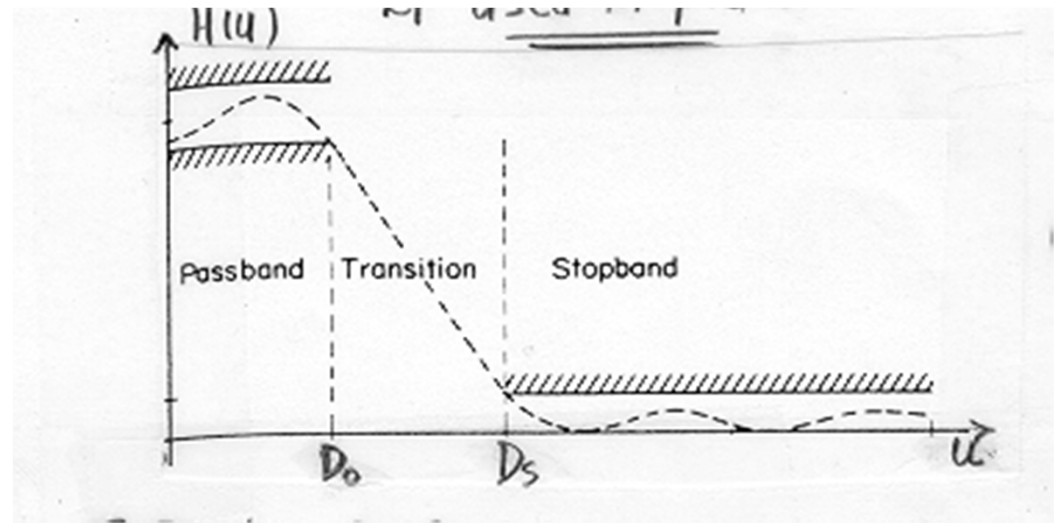
- ◆ Preserves low frequencies, attenuates high frequencies.

ideal



$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq u \leq D_0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

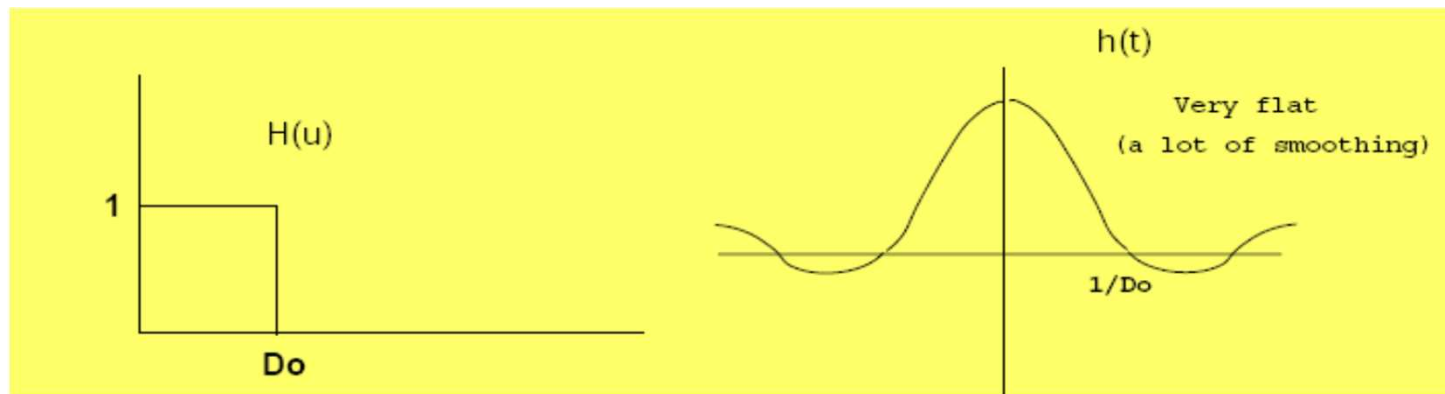
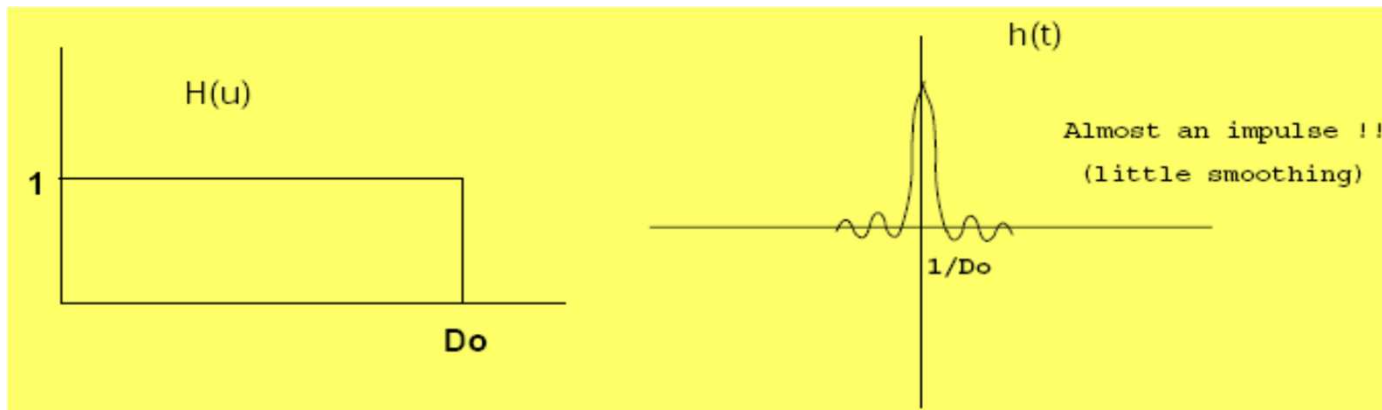
in practice



D_0 : cut-off frequency

D_0 control smoothing

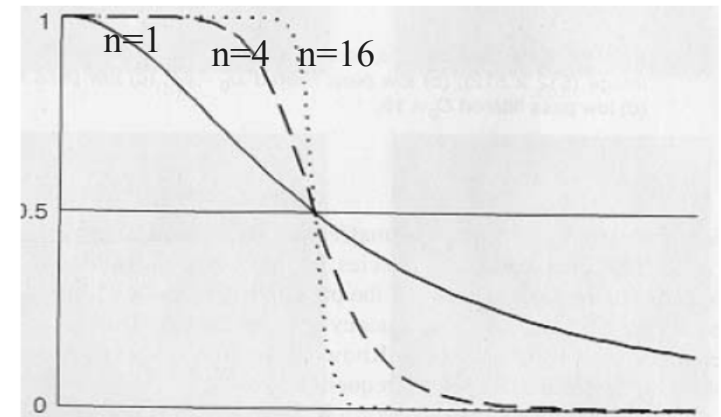
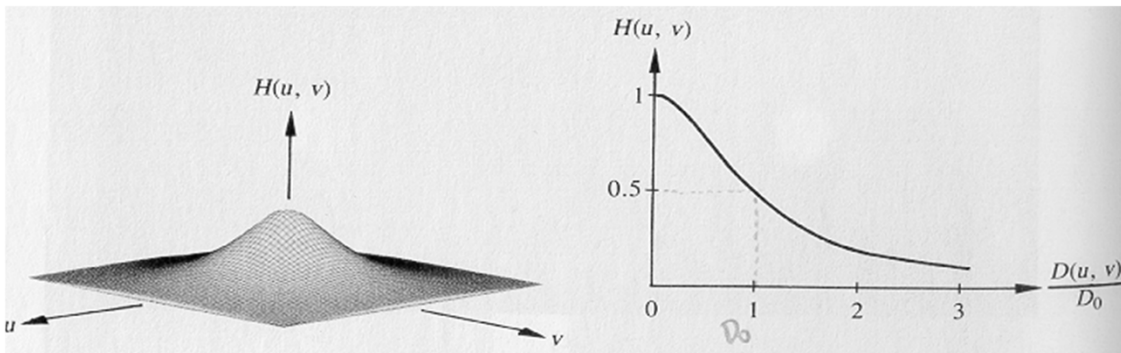
◆ Blurring is controlled by D_0



Butterworth LP filter (BLPF)

- ◆ In practice, we use filters that attenuate high frequencies smoothly (e.g., **Butterworth** LP filter)

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [\sqrt{u^2 + v^2}/D_0]^{2n}}$$

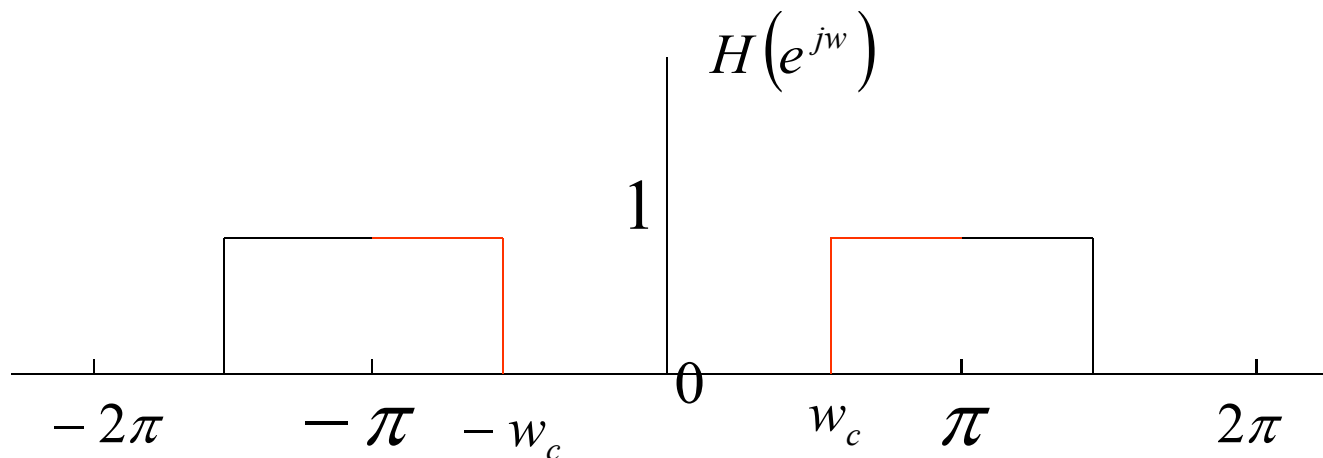


Frequency-Selective Filters

♦ Ideal highpass filter

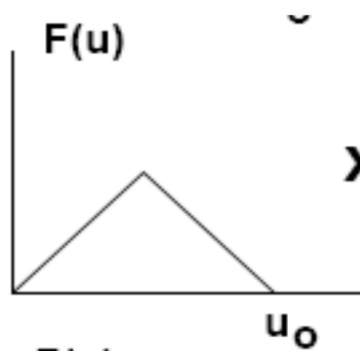
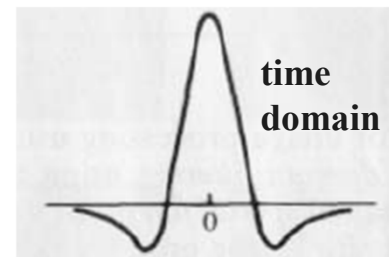
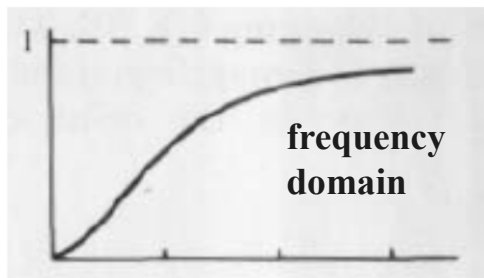
$$H_{hp}(e^{jw}) = \begin{cases} 0, & |w| < w_c \\ 1, & w_c < |w| < \pi \end{cases}$$

$$h_{hp}(n) = \delta[n] - \frac{\sin w_c n}{\pi n}, \quad -\infty < n < \infty$$

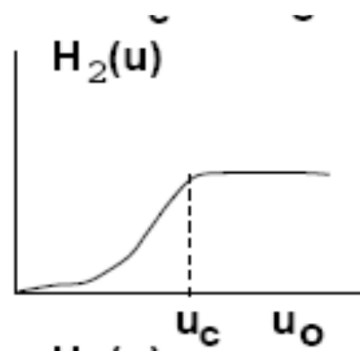


high-pass filters (i.e., sharpening filters)

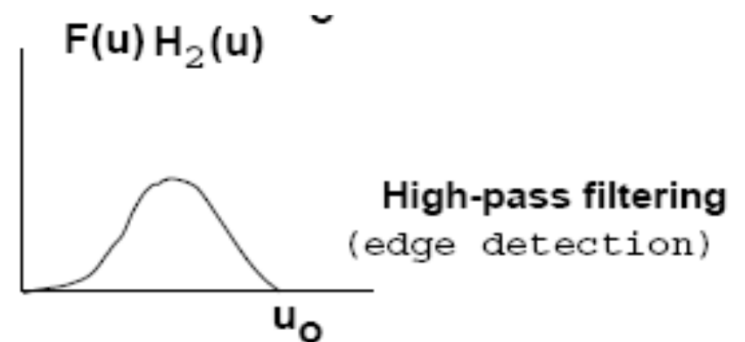
- ◆ Preserves high frequencies - useful for edge detection



X



=





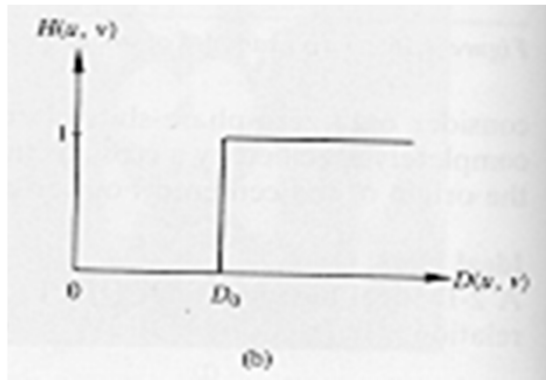
High-Pass filtering

- A high-pass filter can be obtained from a low-pass filter using:

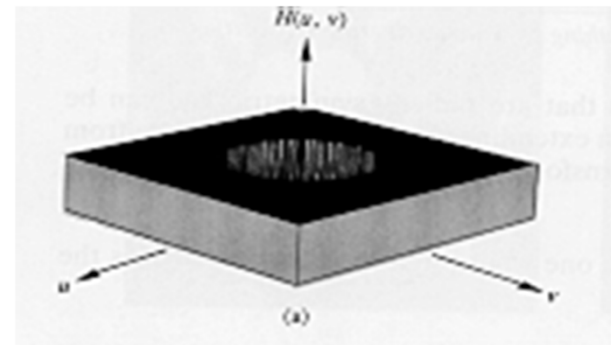
$$H_{HP}(u, v) = 1 - H_{LP}(u, v)$$

High-pass filtering (cont'd)

- ◆ Preserves high frequencies, attenuates low frequencies.



$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{if } u \geq D_0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

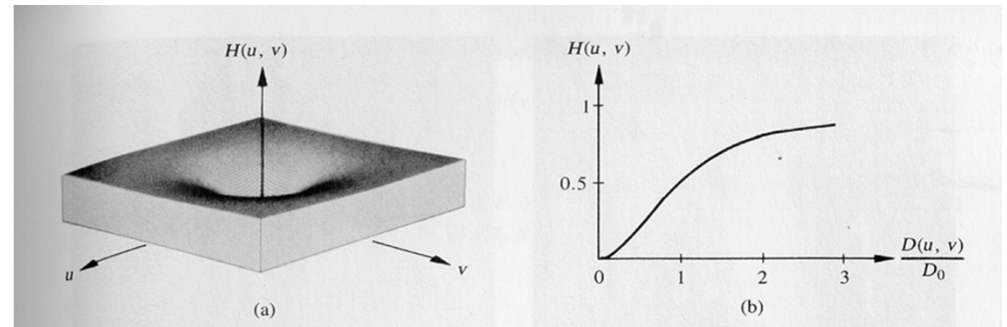


$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{if } u^2 + v^2 \geq D_0^2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Butterworth high pass filter (BHPF)

- ◆ In practice, we use filters that attenuate low frequencies smoothly (e.g., **Butterworth** HP filter)

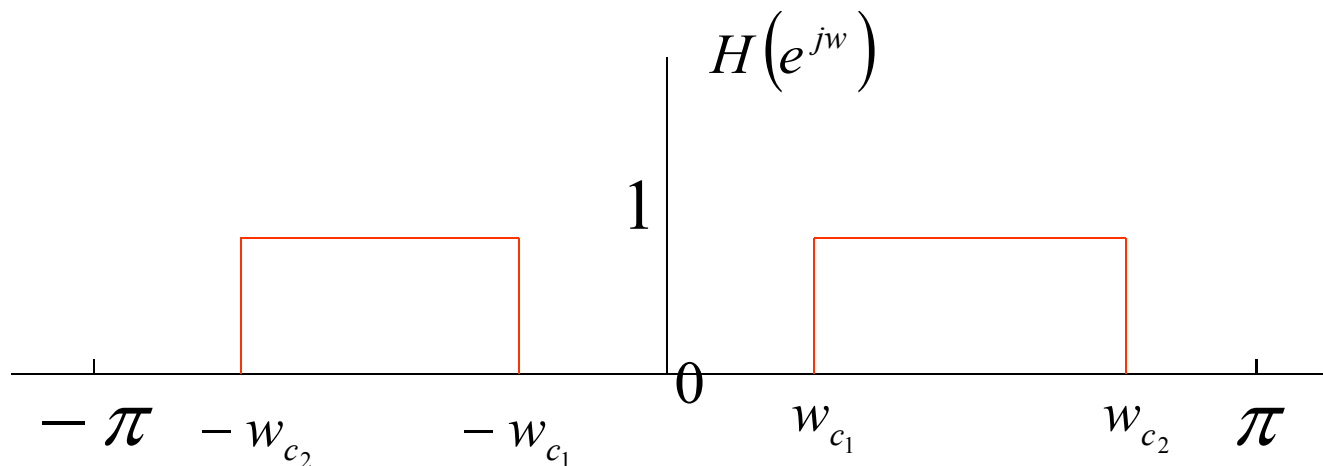
$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D_0/\sqrt{u^2 + v^2}]^{2n}}$$



Frequency-Selective Filters

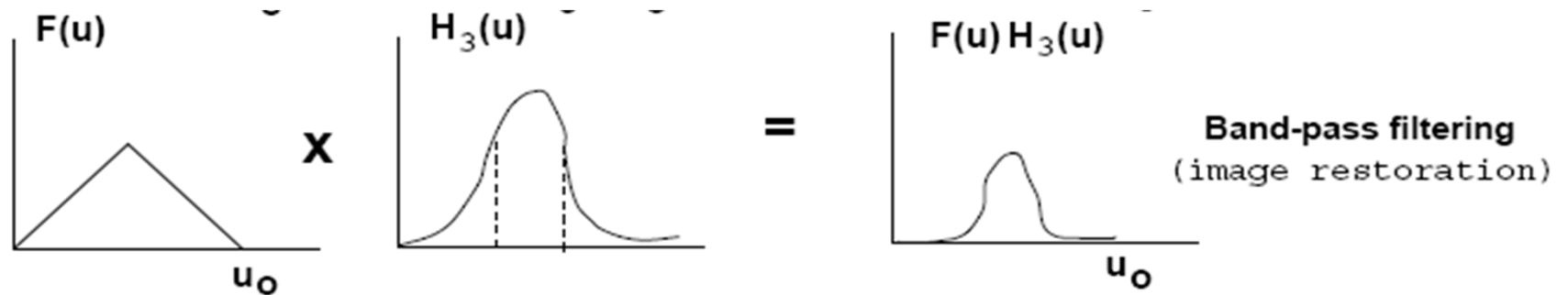
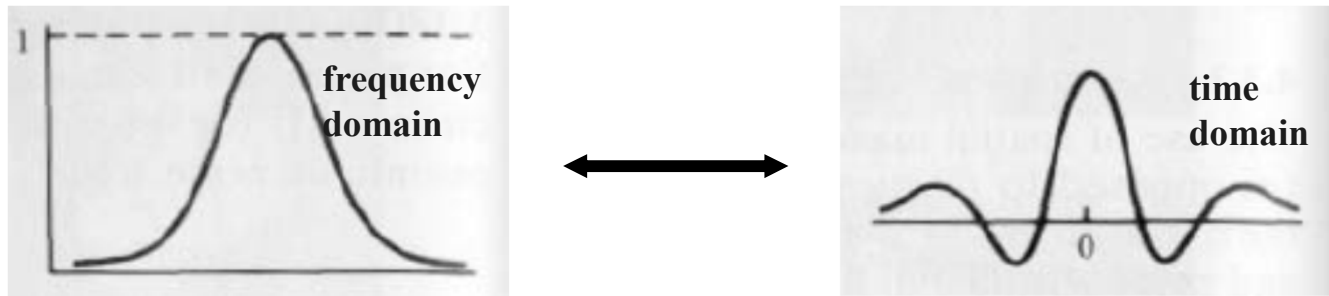
♦ Ideal bandpass filter

$$H_{bp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \omega_{c_1} < \omega < \omega_{c_2} \\ 0, & \text{others} \end{cases}$$



Band-pass filters

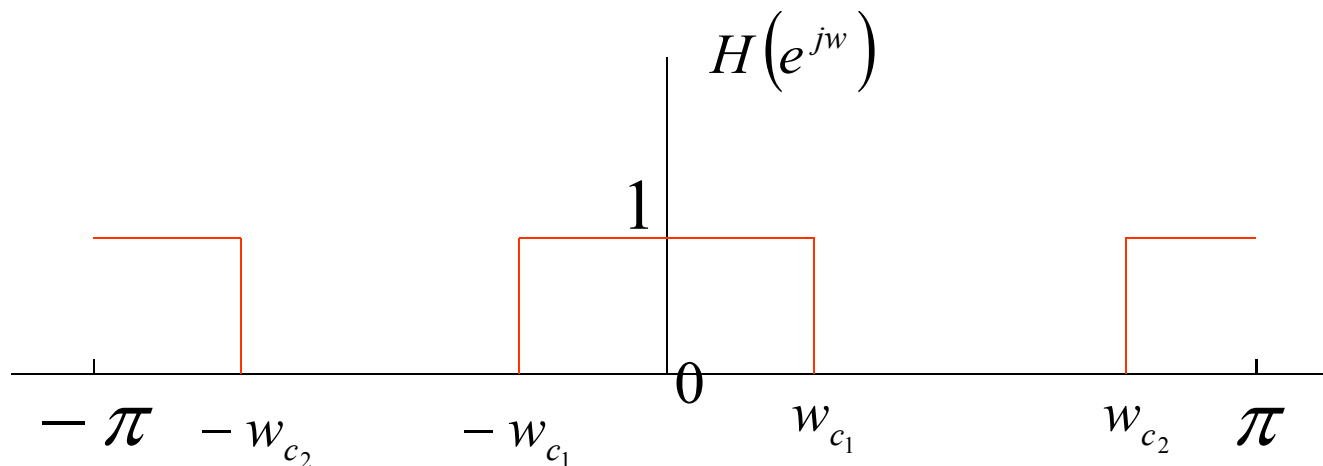
- ◆ Preserves frequencies within a certain band



Frequency-Selective Filters

♦ Ideal bandstop filter

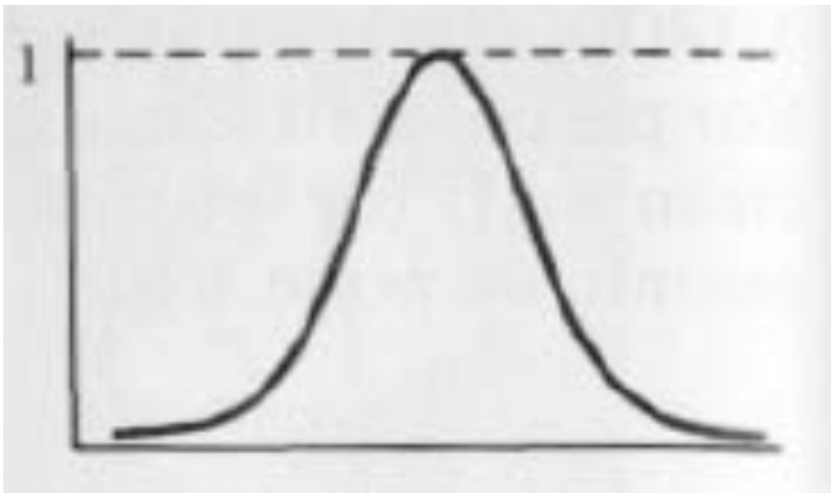
$$H_{bs}(e^{jw}) = \begin{cases} 0, & w_{c_1} |w| < w_{c_2} \\ 1, & \text{others} \end{cases}$$



Band-stop filters

◆ How do they look like?

Band-pass



Band-stop

