(34) التصحيح

جامعة الملك سعود – كلية العلوم . قسم الرياضيات .	الامتحان النهائي للمقرر (425) ريض . الخميس 1437/3/20. هـ .	الفصل الأول 1437/1436. هـ. الزمن : ثلاث ساعات.

السؤال الأول (10) أ) أوجد المعادلة التفاضلية لمجموعة المستويات المماسة والتي لا تتعامد مع المستوي xy للسطح : $9x^2+y^2+z^2=9$.

ب) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية التالية :

$$(z-y)\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}-z\frac{\partial u}{\partial z}=y(x+z)-y^2$$ في المنطقة

$F=\{(x,y,z);y\neq 0,z\neq 0,y\neq z\ ,x+z-y\neq 0\}$.

السؤال الثاني (13) ا) أوجد السطح التكاملي الذي يكون حلاً" للمعادلة التفاضلية :

$$(x+z)\frac{\partial z}{\partial x}+(y+z)\frac{\partial z}{\partial y}=0$$ في المنطقة $R=\{(x,y);x+z\neq 0,y+z\neq 0\}$

والذي يمر من المنحني $\Gamma:x=1-t\ ,y=1+t\ ,z=t$.

ب) باستخدام التحويلات $\xi=\ln x\ ,\eta=\ln y$ أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية :

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}-x\frac{\partial z}{\partial x}=1 .$$

السؤال الثالث (10) أوجد حل المسألة التفاضلية الحدية التالية :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\,;0<x<1,0<y<1.\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y)=0,u(1,y)=4;0<y<1.\\[2mm] u(x,0)=0\,,\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,1)=0;0<x<1.\end{cases}$$

السؤال الرابع (15) باستخدام تحويلات لابلاس أوجد حل المسألة التفاضلية التالية :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,;0<x<1,t>0.\\[2mm] u(0,t)=0\,,\,u(1,t)=0\,;t>0.\\[2mm] u(x,0)=\sin \pi x\ \,,\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0\,;0<x<1.\end{cases} .$$

السؤال الأول 5

أ) لنفرض أن $M=(x_0, y_0, z_0)$ نقطة من السطح

$$9x^2+y^2+z^2=9$$

حيث $z_0 \neq 0$

إن متجه الناظم عند M هو

$$\nabla \vec{F} = (18x_0, 2y_0, 2z_0).$$

وإن معادلة مستوى المماس عند M هي

$$(x-x_0)\,18x_0+(y-y_0)\,2y_0+(z-z_0)\,2z_0=0$$

$$9xx_0+yy_0+zz_0=9x_0^2+y_0^2+z_0^2=9$$

نشتق هذه المعادلة بالنسبة لـ x، ثم بالنسبة لـ y، مع اعتبار أن z دالة في x, y

$$9x_0+z_xz_0=0,\quad y_0+z_yz_0=0$$

إذاً

$$\frac{x_0}{z_0}=-\frac{z_x}{9},\quad \frac{y_0}{z_0}=-z_y$$

$$y_0=-z_yz_0,\quad 9x_0=-z_xz_0$$

$$-xz_xz_0-yz_yz_0+zz_0=9$$

$$-xz_x-yz_y+z=\frac{9}{z_0};\quad z_0\neq 0$$

ولكن $9x_0^2+y_0^2+z_0^2=9$ أو

$$\frac{9}{z_0^2}=9\left(\frac{x_0}{z_0}\right)^2+\left(\frac{y_0}{z_0}\right)^2+1$$

$$\frac{9}{z_0^2}=9\frac{(z_x)^2}{81}+(z_y)^2+1=\frac{(z_x)^2}{9}+(z_y)^2+1$$

لنفرض أن $z_0>0$،

$$\frac{3}{|z_0|}=\sqrt{\frac{(z_x)^2}{9}+(z_y)^2+1}$$

$$\frac{9}{|z_0|}=\frac{9}{z_0}=3\sqrt{\frac{(z_x)^2}{9}+(z_y)^2+1}$$

إذاً المعادلة التفاضلية هي

$$-xz_x-yz_y+z=3\sqrt{\frac{(z_x)^2}{9}+(z_y)^2+1}$$

أو

$$xz_x+yz_y-z=-\sqrt{(z_x)^2+9z_y^2+9}$$

ب) 5

المعادلات لاغرانج لدينا

$$\frac{dx}{z-y}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{-z}=\frac{du}{y(x+z)-y^2}$$

حيث $y\neq z,\ y\neq 0,\ z\neq 0,\ x+z-y\neq 0$

$$\frac{dx+dy+dz}{-y+z+y-z}=d(x+y+z)=0 \Rightarrow x+y+z=c_1$$

$x+z=c_1-y$

$$\frac{dy}{y}=\frac{du}{y[x+z-y]} \Rightarrow \frac{dy}{1}=\frac{du}{c_1-2y}$$

$$(c_1-2y)\,dy=du$$

$$u=c_1y-y^2+c_2=(x+y+z)y-y^2+c_2$$

ومنه $u=(x+z)y+c_2$

$$u-(x+z)y=c_2$$

لدينا أيضاً

$$\frac{dy}{y}+\frac{dz}{z}=0 \Rightarrow yz=c_3$$

إذاً الحل العام للمعادلة التفاضلية هو

$$u-(x+z)y=f(x+y+z,\ yz)$$

أو

$$u=(x+z)y+f(x+y+z,\ yz)$$

السؤال الثاني : أ (5)
(5) + 8

$$(x+z)z_x + (y+z)z_y = 0$$

$$\Gamma: \; x = 1-t, \quad y = 1+t, \quad z = t$$

$x+z \neq 0$

$y+z \neq 0$

$$\frac{dx}{x+z} = \frac{dy}{y+z} = \frac{dz}{0} \Rightarrow z = c_1 \quad (1)$$

$$\frac{dx}{x+c_1} = \frac{dy}{y+c_1} \Rightarrow \frac{y+c_1}{x+c_1} = c_2 \text{ or } \frac{y+z}{x+z} = c_2 \quad (1)$$

$$z = f\left(\frac{y+z}{x+z}\right)$$

تؤخذ من المعادلة هو

(2)

$$t = f\left(\frac{1+2t}{1}\right)$$

مع المنحنى Γ

نفرض ان $s = 1+2t$ او $\frac{s-1}{2} = t$

$$f(s) = \frac{s-1}{2}$$

تؤخذ

وبالتالي تعريف السطح التكاملي S الذي يمر بالمنحنى Γ هو

(1)

$$z = f\left(\frac{y+z}{x+z}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{y+z}{x+z}\right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{y+z-x-z}{x+z}\right]$$

$$2z = \frac{y-x}{x+z} \quad \text{او} \quad z = \frac{1}{2}\,\frac{y-x}{x+z}$$

ب (8)

$\xi = \ln x$

$\eta = \ln y$

$$(1)\quad x^2 z_{xx} - xyz_{xy} - xz_x = 1$$

لدينا

$$x^2 z_{xx} = z_{\xi\xi} - z_\xi, \quad xyz_{xy} = z_{\xi\eta}, \quad xz_x = z_\xi$$

نعوض

(1) (2) (ع) $\quad z_{\xi\xi} - z_{\eta\xi} - 2z_\xi = 1$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(z_\xi - z_\eta - 2z\right) = 1$$

(1) (2)

$$z_\xi - z_\eta - 2z = \xi + f(\eta)$$

$$\frac{d\xi}{1} = \frac{d\eta}{-1} = \frac{dz}{2z+\xi+f(\eta)}$$

$$d\xi + d\eta = 0 \Rightarrow \xi + \eta = c_1$$

$$\frac{dz}{2z + c_1 - \eta + f(\eta)} = \frac{d\eta}{-1}$$

(3)

معادلة خطية

$$\frac{dz}{d\eta} + 2z = -c_1 + \eta - f(\eta)$$

$$\frac{d}{d\eta}\left(ze^{2\eta}\right) = \left(-c_1 + \eta - f(\eta)\right)e^{2\eta}$$

$$ze^{2\eta} = \int \left(-c_1 + \eta - f(\eta)\right)e^{2\eta}\,d\eta$$

$$ze^{2\eta} = -\frac{1}{2}c_1 e^{2\eta} + \int \eta e^{2\eta} - \int e^{2\eta} f(\eta)\,d\eta$$

(1)

$\xi + \eta = c_1$

$\xi = c_1 - \eta$

$-\xi = \eta - c_1$

$$ze^{2\eta} = -\frac{1}{2}c_1 e^{2\eta} + \eta\frac{e^{2\eta}}{2} - \frac{1}{4}e^{2\eta} + g_1(\eta) + c_2$$

$$ze^{2\eta} = \frac{1}{2}e^{2\eta}(\eta - c_1) - \frac{1}{4}e^{2\eta} + g_1(\eta) + c_2$$

تابع السؤال الثاني ب)

$$ze^{2\eta} = -\frac{1}{2}\xi e^{2\eta} - \frac{1}{4} e^{2\eta} + g_1(\eta) + c_2$$

$$ze^{2\eta} + \frac{1}{2}\xi e^{2\eta} + \frac{1}{4} e^{2\eta} - g_1(\eta) = c_2$$

بالاعتماد على المعادلة ③ نجد

② $$ze^{2\eta} + \frac{1}{2}\xi e^{2\eta} + \frac{1}{4} e^{2\eta} - g_1(\eta) = f_1(\eta + \xi)$$

$$z = -\frac{1}{2}\xi - \frac{1}{4} + e^{-2\eta} g_1(\eta) + e^{-2\eta} f_1(\eta + \xi)$$

وبالتعويض في المعادلة ① نجد

$$z = -\frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{4} + e^{-2\ln y} g(\ln y) + e^{-2\ln y} f_1(\ln(xy))$$

$$z = -\frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{4} \frac{1}{y^2}(g \circ \ln)(y) + \frac{1}{y^2}(f_1 \circ \ln)(xy)$$

$$z = -\frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{4} + \frac{1}{y^2} g_1(y) + \frac{1}{y^2} f_2(xy)$$

$f_2 = f_1 \circ \ln$ ، $g \circ \ln = g_1$

السؤال الرابع: أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية (باستخدام تحويلات لابلاس)

10

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} & 0<x<1, \quad t>0 \\ u(0,t)=0, & u(1,t)=0 \\ u(x,0)=\sin \pi x & u_t(x,0)=0 \end{cases}$$

نوجد تحويلات لابلاس للمعادلة التفاضلية بالنسبة لـ t

$\mathcal{L}(u(x,t)) = v(x,s)$

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \mathcal{L}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)$$

$$\frac{d^2 v(x,s)}{dx^2} = s^2 v(x,s) - s\,u(x,0) - u_t(x,0)$$

3

$$\boxed{\frac{d^2 v}{dx^2} - s^2 v = -s \sin(\pi x)}$$

$$v_c(x,s) = c_1 e^{sx} + c_2 e^{-sx}$$

$$v_p = A \sin \pi x + B \cos(\pi x)$$

$$v_p' = \pi A \cos \pi x - \pi B \sin \pi x$$

$$v_p'' = -\pi^2 A \sin \pi x - \pi^2 B \cos \pi x$$

4

$$v_p'' - s^2 v = -\pi^2 A \sin \pi x - \pi^2 B \cos \pi x - s^2 A \sin \pi x - s^2 B \cos \pi x = -s \sin \pi x$$

$$-(\pi^2+s^2) A \sin \pi x = -s \sin \pi x$$
$$-(\pi^2+s^2) B \cos \pi x = 0 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{s}{\pi^2+s^2}$$

$$v = v_c + v_p = c_1 e^{sx} + c_2 e^{-sx} + \frac{s}{s^2+\pi^2} \sin \pi x$$

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}(u(0,t)) &= v(0,s)=0 \\ \mathcal{L}(u(1,t)) &= v(1,s)=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} c_1+c_2+0 &= 0 \\ c_1 e^{s} + c_2 e^{-s} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$$

2

$$v(x,s) = \frac{s}{s^2+\pi^2} \sin(\pi x)$$

$$u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}(v(x,s)) = \sin \pi x \; \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+\pi^2}\right)$$

1 وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية $u(x,t) = \sin \pi x \cos \pi t$

السؤال الثاني: أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية:

10

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \begin{matrix} 0<x<1 \\ 0<y<1 \end{matrix}$$

$$u_x(0,y)=0, \quad u(1,y)=4, \quad 0<y<1$$

$$u(x,0)=0, \quad u_y(x,1)=0, \quad 0<x<1$$

نستخدم طريقة فصل المتغيرات

$$u(x,y) = X(x)\,Y(y)$$

$0<x<1$, $X \neq 0$ حيث، $X''Y + Y''X = 0 \Rightarrow \dfrac{X''}{X} = -\dfrac{Y''}{Y} = \lambda$

$0<y<1$, $Y \neq 0$

1) نفرض أن $\lambda = 0 \Leftarrow$

$$X'' = 0 \Rightarrow X = Ax + B$$
$$Y'' = 0 \Rightarrow Y = Cy + D$$

$1\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} u(x,0) = X(x)Y(0) = 0 \Rightarrow Y(0) = 0 \\ u_y(x,y) = X Y' \Rightarrow u_y(x,1) = X(x)Y'(1) = 0 \Rightarrow Y'(1) = 0 \\ Y(0) = 0 \Rightarrow D = 0,\ Y = Cy,\ Y'(1) = C = 0 \Rightarrow Y = 0 \end{cases}$$

وهذا غير مقبول

---

2) نفرض الآن $\lambda = -\alpha^2$, $\alpha > 0$, إذاً

$1\frac{1}{2}$

$$-\frac{Y''}{Y} = -\alpha^2 \Rightarrow Y'' - \alpha^2 Y = 0$$

$$Y = c_1 e^{\alpha y} + c_2 e^{-\alpha y}.$$

$$Y(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0 ,\quad Y'(y) = \alpha c_1 e^{\alpha y} - \alpha c_2 e^{-\alpha y}$$

$$-c_2 = +c_1 \qquad Y'(1) = \alpha c_1 e^{\alpha} - \alpha c_2 e^{-\alpha}$$

$$= \alpha c_1 (e^{\alpha} + e^{-\alpha}) = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$$

إذاً $Y = 0$ غير مقبول

---

3) نفرض الآن $\lambda = \alpha^2$, $\alpha > 0$, إذاً

$$X'' - \alpha^2 X = 0$$

$$Y'' + \alpha^2 Y = 0$$

$$\begin{cases} X(x) = c_1 \cosh \alpha x + c_2 \sinh(\alpha x) \\ Y(y) = c_3 \cos \alpha y + c_4 \sin(\alpha y) \end{cases}$$

$$u_x(x,y) = X'(x)Y ,\quad u_x(0,y) = X'(0)Y(y) = 0 \Rightarrow X'(0) = 0$$

$$X' = \alpha c_1 \sinh \alpha x + \alpha c_2 \cosh(\alpha x)$$

$$X'(0) = \alpha c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$\boxed{X = c_1 \cosh \alpha x}$$

(4)

$$Y(0) = 0 \Rightarrow c_3 = 0 \qquad \boxed{Y = c_4 \sin \alpha y}$$

$$Y'(y) = \alpha c_4 \cos(\alpha y),\quad Y'(1) = \alpha c_4 \cos \alpha = 0 \quad \alpha = \frac{2n-1}{2}\pi$$

$$u_n(x,y) = c_n \cosh\left(\frac{2n-1}{2}\pi x\right) \sin\left(\frac{2n-1}{2}\pi y\right)$$ إذاً

---

(1)

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cosh\left(\frac{2n-1}{2}\pi x\right) \sin\left(\frac{2n-1}{2}\pi y\right)$$

$$u(1,y) = 4 = \sum_{1}^{\infty} c_n \cosh\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right) \sin\left(\frac{2n-1}{2}\pi y\right)$$

$[0,1]$ $\left\{\sin\left(\frac{2n-1}{2}\pi y\right)\right\}$ بتعامد الدوال

$$\int_0^1 4 \sin\left(\frac{2n-1}{2}\pi y\right) dy \quad c_n \cosh\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right) \int_0^1 \sin^2\left(\frac{2n-1}{2}\pi y\right) dy$$

$$\frac{-4}{\frac{2n-1}{2}\pi}\left[\cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi y\right)\right]_0^1 = c_n \cosh\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right) \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1 - \cos((2n-1)\pi y)\right) dy$$

$$\frac{8}{(2n-1)\pi}$$

$$\frac{-8}{(2n-1)\pi}(0-1) = C_n \cosh\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$C_n = \frac{\frac{8}{(2n-1)\pi}}{\frac{1}{2}\cosh\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)}$$

2

$$C_n = \frac{16}{(2n-1)\pi\cosh\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)}$$

[illegible]

✓ $$u(x,t) = \sum_{1}^{\infty} \frac{16}{(2n-1)\pi\cosh\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)} \cosh\left(\frac{2n-1}{2}\pi x\right)\sin\left(\frac{2n-1}{2}\pi y\right)$$