جامعة الملك سعود — الاختبار الفصلي الأول — الفصل الأول 1437/1438هـ

كلية العلوم– قسم الرياضيات — في المقرر 431 ريض — الزمن: ساعة ونصف

ملحوظة: كل الرسوم المدروسة هنا، هي رسوم بسيطة.

السؤال الأول : (6 درجات)

(1) أثبت أن الشجرة التي عدد رؤوسها $n \geq 2$ يوجد فيها على الأقل رأسان درجة كل منهما تساوي 1. (درجتان)

(2) (أ) أثبت أنه إذا كان $G = (V,E)$ رسما هاملتونيا، فإن $\text{comp}(G\text{-}S) \leq |S|$، لكل مجموعة جزئية فعلية غير خالية S من V ، حيث $\text{comp}(G\text{-}S)$ هو عدد مركبات الرسم G-S . (3 درجات)

(ب) استنتج أنه إذا كان $G = (X,Y,E)$ رسماً ثنائي التجزئة، بحيث $|X| \neq |Y|$، فإن G غير هاملتوني. (درجة واحدة)

السؤال الثاني : (10 درجات)

(1) إذا كان G رسماً بحيث $\delta(G) \geq 2$ ، فأثبت أن G يحتوي على دورة . (درجتان)

(2) أثبت أن المتتالية $s = (5,5,4,4,4,4,2)$ رسمية و جد تجسيدا لها . (3 درجات)

(3) ليكن $G = (V,E)$ رسماً ثنائي التجزئة، حيث $|V| = n \geq 2$.

(أ) أثبت أن $|E| \leq \dfrac{n^2}{4}$ (درجتان)

(ب) أثبت أن $|E| = \dfrac{n^2}{4}$ إذا وفقط إذا كان العدد n زوجيا وكان الرسم G يماثل $K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$ (درجتان)

(جـ) أثبت أنه لا يوجد رسم ثنائي التجزئة بحيث تكون المتتالية $s = (5,5,4,4,4,4,2)$ متتالية درجات له. (درجة واحدة)

السؤال الثالث : (9 درجات)

(1) (4 درجات) جد جميع قيم m, n بحيث:

(أ) يكون الرسم $K_{m,n}$ *نصف* أويلري. **(ب)** يكون الرسم $K_{m,n}$ هاملتونيا. **(ج)** يكون الرسم $K_{m,n}$ شجرة.

(د) يكون مضموم الرسمين $K_{2m,2n}$ و C_n رسما أويلريا.

(2) (درجتان) جد جميع قيم n بحيث:

(أ) توجد شجرة T ، عدد رؤوسها n ، بحيث تكون $\overline{T}$ شجرة أيضا . **(ب)** يكون الرسم $\overline{C_n}$ أويلريا.

(3) ليكن G رسما منتظما من النوع (4m+1) ، رتبته n ، حيث m , n *عددان صحيحان موجبان*.

(أ) أثبت أن n عدد زوجي بحيث $n \geq 4m+2$. (درجة واحدة)

(ب) أثبت أنه إذا كان $n \leq 8m+2$، فإن الرسم G هاملتوني. (درجة واحدة)

(ج) أثبت أنه إذا كان $n \geq 8m+4$، فإن الرسم $\overline{G}$ هاملتوني. (درجة واحدة)

نموذج حل الاختبار الفصلي الأول
في المقرر 431 ريض
(الفصل الأول 37/38)

السؤال الأول (1) المطلوب إثباته هو "مبرهنة (2,1)" بالصفحة 36 من الكتاب.

(2) (أ) المطلوب إثباته هو "مبرهنة (3,4)" بالصفحة 72 من الكتاب.

(ب) لنفرض أن $|X| \neq |Y|$، ولتكن $Z \in \{X, Y\}$ بحيث $|Z| = \min\{|X|, |Y|\}$. واضح أن $Comp(G - Z) > |Z|$، وبالتالي فإن الرسم G ليس هاملتونياً (من الفقرة (أ)).

السؤال الثاني (1) ليكن $P = (v_1, v_2, \dots, v_p)$ مساراً ذا طول أعظم. واضح أن (الحد الأدنى $\delta(u) \geq 2$). بما أن P ذو طول أعظم، فإن $N(v_1) \subseteq \{v_i : 2 \leq i \leq p\}$، وبما أن $\deg_G(v_1) \geq 2$، فإنه يوجد $3 \leq i \leq p$ بحيث v_i يجاور v_1، ولذا $C = (v_1, v_2, \dots, v_i, v_1)$ هي دورة في G.

(2) نستخدم الخوارزمية لإثبات أن المتتالية رسمية، ونستنتج أيضا تجسيد المتتالية.

(3) أ) ليكن $G = (X \cup Y, E)$ حيث $|X| = p \geq 1$ و $|Y| = n - p \geq 1$.

واضح أن: $|E| \leq p(n-p) = f(p)$

(لأن G رسم جزئي من الرسم $K_{p,n-p}$)

لتكن الدالة $f(x) = x(n-x)$

لدينا: $f'(x) = -2x + n$

إذن:

x	1		$\frac{n}{2}$		$n-1$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘	

إذن: $|E| \leq f(\frac{n}{2}) = \frac{n}{2} \times \frac{n}{2} = \frac{n^2}{4}$

ب) من دراسة الدالة f نرى أنه،

إذا كان $p \neq \frac{n}{2}$ فإن $f(p) < \frac{n^2}{4} = f(\frac{n}{2})$، وبالتالي

فإن $|E| < \frac{n^2}{4}$. إذن $|E| = \frac{n^2}{4}$ إذا وفقط

إذا كان n عدد زوجي وكان $p = \frac{n}{2}$ وبالتالي،

فإن: $G \cong K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$.

(ج) ليكن G تجسيد المتتالية S. حساب $e(G)$ ($\sum \deg u = 2e(G)$, $u \in V(G)$)

فإن $e(G) = 14$، حساب عدد رؤوس G،

هو $n = 7$، وبما أن $\frac{n^2}{4} = \frac{49}{4} < 14$، فإنه من

الفقرة (ب) نرى أن G لا يمكن أن يكون ثنائي التجزئة.

(Page 2)

السؤال الثالث/ (1) لنجد بسهولة ما يلي:

أ) ($K_{m,n}$ نصف أويلري) $\Leftrightarrow$ ($m=n=1$) أو ($m=2$ و n عدد فردي) أو ($n=2$ و m عدد فردي)

ب) ($K_{m,n}$ هاملتوني) $\Leftrightarrow$ ($m=n\geq 2$)

(أثبتنا ذلك في الفقرة 8 (ب) بالسؤال الأول).

ج) (الرسم $K_{m,n}$ شجرة) $\Leftrightarrow$ ($\min(m,n)=1$).

د) ($C_n+K_{2m,2n}$ رسم أويلري) $\Leftrightarrow$ (m عدد زوجي بحيث $n\geq 3$)

(2) أ) $n\in\{1,4\}$ (لأن $2(n-1)=e(T)+e(\bar{T})=\binom{n}{2}$) ولأن P_1 و P_4 شجرتان بحيث $\bar{P_1}$ و $\bar{P_4}$ شجرتان).

ب) $\bar{C_n}$ رسم منتظم من النوع $n-3$ أي تكون درجات رؤوس $\bar{C_n}$ زوجية يجب أن يكون n فرديا.

من ناحية أخرى، $\bar{C_5}$ مترابط (لأن $\bar{C_5}\cong C_5$) ولكل $n\geq 6$، $\bar{C_n}$ هاملتوني (لأنه لكل رأس u لنا: $\deg_{\bar{C_n}} u = n-3 \geq \frac{n}{2}$)

وبالتالي فإن $\bar{C_n}$ مترابط لكل $n\geq 5$، إذاً يكون $\bar{C_n}$ أويلريا إذا وفقط إذا كان: n عددا فرديا بحيث $n\geq 5$. (لأن $\bar{C_3}$ غير مترابط)

(4) أ) بما أن عدد رؤوس G هو n و كل رؤوس G

هي رؤوس فردية، فإن n عدد زوجي.

من جهة أخرى لكل رأس u لدينا: $\deg_G u = 4m+1 \leq n-1$

و بالتالي، فإن: $n \geq 4m+2$.

ب) لنفرض أن $n \leq 8m+2$ و ليكن u رأسا.

لدينا: $\deg_G(u) - \frac{n}{2} = 4m+1 - \frac{n}{2} = \frac{8m+2-n}{2} \geq 0$

إذن: $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ و بما أن $n \geq 3$ (لأن $n \geq 4m+2 \geq 6$)

فإن الرسم G هاملتوني.

ج) لنفرض أن $n \geq 8m+4$، و ليكن u رأسا.

لدينا:

$$\deg_{\bar{G}}(u) - \frac{n}{2} = n-1-(4m+1) - \frac{n}{2}$$

$$= \frac{2n-2-8m-2-n}{2}$$

$$= \frac{n-(8m+4)}{2}$$

إذن $\deg_{\bar{G}}(u) \geq \frac{n}{2}$ و بالتالي $\delta(\bar{G}) \geq \frac{n}{2}$.

إذن $\bar{G}$ رسم هاملتوني (لأن $n \geq 3$).

(Page 4)