جامعة الملك سعود — الاختبار الفصلي الأول — الفصل الثاني ١٤٣٦/١٤٣٧هـ

كلية العلوم قسم الرياضيات — في المقرر ٣٤٠ رض — الزمن: ساعة ونصف

س١ (أ) جد عدد السلاسل من الطول 8 المأخوذة من المجموعة $\{0,1\}$ بحيث يظهر فيها 1 مرتين: (i) بالضبط (فقط) (ii) على الأكثر (iii) على الأقل

(ب) أثبت أن $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n\,2^{n-1}$.

(جـ) استخدم مبرهنة متعددة الحدود لإيجاد مفكوك $(x+y+z)^4$

س٢ (أ) جد عدد الحلول الصحيحة للنظام التالي:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 20$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 7$$
$$x_i \geq 0 \quad \forall\, 1 \leq i \leq 6$$

(ب) أثبت أن $S(n,2) = 2^{n-1} - 1 \quad \forall\, n \geq 2$

(جـ) أثبت أن $S(n,3) = \frac{1}{2}\left(3^{n-1}+1\right) - 2^{n-1} \quad \forall n \geq 3$

س٣ (أ) أثبت أن عدد التبديلات التامة للمجموعة $\{1,2,\ldots,n\}$ يساوي

$$d_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

(ب) جد عدد تبديلات $\{1,2,\ldots,n\}$ التي تثبت k عددًا بالضبط (فقط).

(جـ) إذا كانت $A = \{1,2,\ldots,999\}$ فجد عدد الأعداد التي تنتمي إلى A ومجموع أرقام كل منها يساوي 15.