جامعة الملك سعود — الاختبار الفصلي الأول — الفصل الثاني 1437/1436هـ
كلية العلوم- قسم الرياضيات — في المقرر 431 ريض — الزمن: ساعة ونصف

ملحوظة: كل الرسوم المدروسة هنا، هي رسوم بسيطة.

السؤال الأول: **(8 درجات)**

(1) (درجتان) أثبت أنه إذا كان $G=(X,Y,E)$ رسما ثنائي التجزئة، فإن:

$$|E|=\sum_{x\in X}\deg(x)=\sum_{y\in Y}\deg(y)$$

(2) (3 درجات) أثبت أن الشجرة التي عدد رؤوسها n، حيث $n\geq 2$ ، يوجد فيها على الأقل رأسان درجة كل منهما تساوي 1.

(3) (3 درجات) أثبت أن عدد الرؤوس التي درجتها 1 في شجرة ذات رأسين أو أكثر يساوي $2+\sum_{\deg(v_i)\geq 3}(\deg(v_i)-2)$.

السؤال الثاني : **(10 درجات)**

(1) لتكن المتتالية $S=(3,3,2,2,2,2,2,2,1,1,1,1,1,1)$.

(أ) (3 درجات) أثبت أن المتتالية S رسمية .

(ب) (درجة واحدة) أثبت أنه لايوجد رسم مترابط يجسد المتتالية S .

(2) (4 درجات) جد جميع قيم n بحيث:

(أ) يكون الرسم K_n نصف أويلري. **(ب)** تكون العجلة W_n رسما نصف أويلري.

(ج) يكون المضموم K_n+K_{2n} رسما أويلريا.

(3) (درجتان) *أثبت أنه لا يوجد رسم* G بحيث عدد رؤوسه 12، عدد أضلاعه 38 و درجة كل من رؤوسه 5 أو 8.

السؤال الثالث: **(7 درجات)**

(1) (3 درجات) إذا كان G رسما منتظما من النوع m، حيث $m\geq 1$، و عدد رؤوسه n بحيث $n\geq 2m+2$ ، فأثبت أن الرسم $\overline{G}$ هو رسم هاملتوني.

(2) ليكن G رسما عدد رؤوسه n .

(أ) (3 درجات) إذا كان G رسماً متمماً لنفسه، فأثبت أنه إما $n\equiv 0\pmod 4$ وإما $n\equiv 1\pmod 4$.

(ب) (درجة واحدة) إذا كان G رسماً منتظما و متمماً لنفسه، فأثبت أن $n\equiv 1\pmod 4$.

نموذج لحل الاختبار الفصلي الأول
(الفصل الثاني 37/36)

السؤال الأول /

(1) ليكن $a \in X$ و $b \in Y$.

من الواضح أنه إذا كان الرأسان a و b متجاورين فإن الزوج $\{a,b\}$ يساهم بالضبط بواحد في كل من المجموعين $\sum_{x \in X} deg(x)$ و $\sum_{y \in Y} deg(y)$

وأنه إذا كانا غير متجاورين فإن الزوج $\{a,b\}$ يساهم بصفر (بالضبط) في كل من المجموعين.

إذاً : $\sum_{x \in X} deg(x) = \sum_{y \in Y} deg(y) = |E|$

(2) المطلوب إثباته هو نص المبرهنة (2,1) (الصفحة 36)

(3) ليكن n عدد رؤوس الشجرة T (المعطاة في السؤال)

ولنأخذ المجموعات التالية :

$V_1 = \{u \in V(T) : deg(u) = 1\}$, $V_2 = \{u \in V(T) : deg(u) = 2\}$,
$W = \{u \in V(T) : deg(u) \geq 3\}$.

• بما أن $e(T)=v(T)-1$ فإن :

$$\sum_{u\in V(T)} \deg u = 2(n-1)$$

إذاً،

$$\sum_{u\in V_1}\deg u + \sum_{u\in V_2}\deg u + \sum_{u\in W}\deg u = 2n-2$$

إذاً، $|V_1| + 2|V_2| + \sum_{u\in W}\deg u = 2(|V_1|+|V_2|+|W|)-2$

إذاً، $|V_1| = 2+\sum_{u\in W}\deg u - 2|W| = 2+\sum_{u\in W}(\deg(u)-2)$

إذاً $|V_1| = 2+\sum_{\deg(v_i)\geq 3}(\deg(v_i)-2)$

وهذا هو المطلوب إثباته .

السؤال الثاني :

(1) لتكن المتتالية $S=(3,3,2,2,2,2,2,2,1,1,1,1,1,1)$

(أ) من السهل أن نجد التجسيد التالي للمتتالية S :

N.B يمكننا أيضا استخدام الخوارزمية لإثبات أن المتتالية S رسمية .

(ب) لنفرض بالتناقض أنه يوجد تجسيد مترابط G للمتتالية S .

لنا إذًا $\sum_{u \in V(G)} \deg u = 2e(G)$

ومنه: $e(G) = 12$.

لكن $v(G) = 14$ (لأن لديها 14 حدًّا) .

إذًا $e(G) < v(G) - 1$ ، وبالتالي فإن G ليس له شجرة مولدة، وهذا يتناقض مع كون الرسم G مترابط .

2) أ) K_n مترابط وهو أيضا منتظم من النوع $n-1$.

يكون K_n نصف أويلري إذا وفقط إذا كان عدد رؤوسه الفردية يساوي 2،

وهذا يكافئ أن يكون: $\boxed{n=2}$.

ب) لتكن العجلة W_n حيث $n \geq 4$.

لدينا درجة مركز العجلة تساوي $(n-1)$ ، وبقية الرؤوس، درجة كل منها تساوي 3 :

إذًا، عدد الرؤوس الفردية في العجلة W_n أكبر من أو يساوي 3 (لأنه يساوي $n-1$ أو n) .

إذًا، لا توجد أية قيمة للعدد n بحيث يكون W_n نصف أويلري .

(2) لاحظ أن المتمم $K_n + K_{2n}$ ما هو إلا الرسم التام K_{3n}، فهو إذا رسم مترابط ومنتظم من النوع $3n-1$.

إذا يكون هذا الرسم أويلريا إذا وفقط إذا كان $3n-1$ عددا زوجيا وهذا يكافئ أن يكون n عددا فرديا (حيث $n \geq 1$).

(3) لنفرض بالتناقض أنه يوجد رسم G بحيث عدد رؤوسه هو $n = 12$، وعدد أضلاعه هو $e = 38$ ودرجة كل من رؤوسه 5 أو 8، وليكن p هو عدد الرؤوس من الدرجة 5.

لنا: $\sum_{u \in V(G)} \deg u = 2e(G)$.

إذا: $5p + 8(v(G) - p) = 2e(G)$

ومنه: $5p + 8(12 - p) = 76$

إذا: $3p = 20$، وهذا تناقض

لأن $3 \nmid 20$.

السؤال الثالث:

(1) لنا $v(\bar{G}) = n \geq 3$، و $\deg_{\bar{G}}(u) = n - 1 - m$ لكل رأس

لإثبات أن الرسم $\bar{G}$ يكفي أن نثبت أن :

$\deg_{\bar{G}}(u) \geq \frac{n}{2}$ لكل رأس u.

لنا : $\deg_{\bar{G}}(u) - \frac{n}{2} = (n-1-m) - \frac{n}{2}$

$$= \frac{2n-2-2m-n}{2}$$

$$= \frac{n-(2+2m)}{2} \geq 0$$

(لأن $n \geq 2m+2$).

إذاً $\deg_{\bar{G}}(u) \geq \frac{n}{2}$ لكل رأس u وبالتالي فإن الرسم $\bar{G}$ رسم هاملتوني.

(2) (أ) لنا : $e(G)+e(\bar{G}) = \binom{n}{2}$ وبما أن $\bar{G} \cong G$ فإن $e(\bar{G}) = e(G)$، وبالتالي فإن :

$2e(G) = \frac{n(n-1)}{2}$، ومنه نرى أن $n(n-1) \equiv 0 \pmod 4$، وهذا يقتضي أن إما $n \equiv 0 \pmod 4$ وإما $n \equiv 1 \pmod 4$.

(ب) لنفرض أن G رسم منتظم ومتمم لنفسه. وليكن العدد الصحيح r. نجد : $\deg_{\bar{G}}(u) = \deg_G(u) = r$

لكل رأس u. لنا إذاً : $n-1-r = r$

ومنه : $n = 2r+1$. إذاً n عدد فردي وبالتالي فلا يمكن أن يكون $n \equiv 0 \pmod 4$. إذاً $n \equiv 1 \pmod 4$ من (أ).