جامعة الملك سعود
456 ريض
قسم الرياضيات

الاسم
الرقم الجامعي

الامتحان النهائي

50

Excellent Work
Well done!

$$\begin{aligned} min \quad & z = -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \\ st \quad & x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ & -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_5 = 1 \end{aligned}$$

مع قيود عدم السالبية. قيم α, β في الجدول الأتي هي

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	-1	2	1	0	3
x_5	0	2	7	1	1	α
z	0	-5	8	2	0	β

A. $\alpha = 6, \quad \beta = -6$
B. $\alpha = 4, \quad \beta = -6$
C. $\alpha = 2, \quad \beta = 0$
D. $\alpha = 0, \quad \beta = -2$

حدد حالة المسألة التي جدولها الحالي هو

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	1	-1	0	3	3
x_3	0	-2	1	1	4
z	0	0	0	0	-1

A. نحتاج إجراء مزيدا من التكرار إذ لم نصل بعد للحل النهائي
B. السمبلكس انتهى والمسألة لها حل وحيد
C. السمبلكس انتهى والمسألة لها حلول بديلة
D. السمبلكس انتهى والمسألة لها حل أمثلي غير محدود

لمسألة التقليل $z=x_1-x_2$، حد قيمة α في الجدول التالي

2.65

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	1	0	α	2	1
x_2	0	1	-1	1	3
z	0	0	-1	1	-2

القيمة هي

A. -2 ✓
B. -1
C. 1
D. 2

2.65

اقترح حلا ابتدائيا للمسألة

$$\min z = 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 6x_4$$
$$st$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4$$
$$x_1 + 4x_2 + 3x_4 = 6$$
$$x_i \geq 0 \forall i = 1,2,3,4$$

A. اختر x_1 و x_2 كمتغيرات أساسية وكون جدول السمبلكس وابدأ مراحل الحل
B. اختر x_3 و x_4 كمتغيرات أساسية وكون جدول السمبلكس وابدأ مراحل الحل
C. اختر x_3 و x_4 كمتغيرات أساسية، احذف x_3 و x_4 من دالة الهدف ثم كون جدول السمبلكس وابدأ مراحل الحل
D. أضف متغيرات y_1, y_2 اصطناعية للقيود ثم كون جدول السمبلكس وابدأ مراحل الحل بدالة الهدف z

---

2.65

باعتبار دالة الهدف $z = 3x_1 + 3x_2$

والمستقيمين الملزمين $2x_1 + x_2 = 100$ و $x_1 + x_2 = 80$

إذا غيرت دالة الهدف إلى $z = (3 + \alpha)x_1 + 3x_2$

فإن منطقة الحساسية المسموح بها لقيم α دون حدوث تغير في الحل الأمثل الوحيد هي

A. (-1,1)
B. (-2,1)
C. (1,2)
D. (0,3) ✓

2.65

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	17	0	15.7	0	2.33	0	4.67				
2	3	0	2.33	1	-0.3	0	5.33				
3	3	1	2.67	0	0.33	0	0.67				
4	-5	0	1	0	-1	1	0				
5	x1	x2	x3	s1	s2	s3					
6							Now read the solution				
7							The optimal objectve value is=--------				
8							..... =--------				
9							..... =--------				
10							..... =--------				
11											

الحل هو

القيمة المثلى $z^* = 4.67$

المتغيرات الأساسية $x_2^* = 0.67$

$s_1^* = 5.33$

$s_3^* = 0$

2.56

برهن نظرية الثنائية الضعيفة

النظرية / اذا كان $x = [x_1 \cdots x_n]^T$ حلا أساسيا مقبول للمسألة الأولية و $y = [y_1 \cdots y_m]$ أي حل مقبول للمسألة المرافقة فإن $z(x) \le w(y)$

البرهان / من القيد رقم i في المسألة الأولية نجد $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$ نضرب ≥ 0 $\Leftarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j y_i \le b_i y_i$

بنفس الطريقة من القيد رقم j في المسألة المرافقة نجد ① $\Leftarrow \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j y_i \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$

② $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j y_i \ge \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ من ①, ② فإن $w(y) \ge z(x)$ #

2.56

أذكر نص نظرية متممة المكملة

نظرية متممة المكملة

اذا كان $x = [x_1 x_2 \cdots x_n]$ حل أساسي مقبول للمسألة الأولية

و $y = [y_1 \cdots y_m]$ حل أساسي مقبول للمسألة المرافقة، عندئذ

x حل أمثلي للمسألة الأولية و y حل أمثلي للمسألة المرافقة $\Leftrightarrow$ إذا وفقط إذا

$x_j e_j = 0$

$y_i s_i = 0$

لكل $i = 1, \cdots, m$

$j = 1, \cdots, n$

$b = [3\ 3]$

$c = [9\ 5\ 8\ 7]$

المسألة المرافقة

$\min w = by$

$\min w = 3y_1 + 3y_2$

s.t
$7y_1 + 5y_2 \geq 9$
$9y_1 + 4y_2 \geq 5$
$8y_1 + 8y_2 \geq 8$
$6y_1 + 3y_2 \geq 7$
$y_1, y_2 \geq 0$

2-65

باعتبار الأولية التالية أكتب المسألة المرافقة

P: max z=cx 9 5 8 7

st.

7 9 8 6 <= 3

5 4 8 3 <= 3

x's>=0

2-66

0	0	0.556	3.333	0	2.222	80
0	1	1.222	0.333	0	-0.11	2
0	0	5.222	0.333	1	-1.11	14
1	0	-0.89	-0.33	0	0.444	4
x1	x2	x3	s1	s2	s3	

من نظرية الثنائية فإن

Row 0 في الجدول الأمثل s_i = عامل y_i

$z^* = w^*$ و

سمة المكملة

$s_i y_i = 0$

$e_i x_i = 0$

من الجدول أعلاه نستنتج

z*	x1	x2	x3	s1	s2	s3
80	4	2	0	0	14	0
w*	y1	y2	y3	e1	e2	e3
80	3.333	0	2.222	0	0	0.556

استخدم نظرية الثنائية ثم نظرية متممة المكملة

2-65

$m = 4, n = 3$

مصفوفة النقل A من النوع 7×12

$$A = \begin{bmatrix} 1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1 \\ 1&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&0 \\ 0&1&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0 \\ 0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&0&1 \end{bmatrix}$$

				a
	3	5	4	
	8	1	3	
	5	6	7	
	4	4	5	
b	5	8	1	

الكميات المعروضة

الكميات المطلوبة

أكتب مصفوفة النقل لهذه المسألة

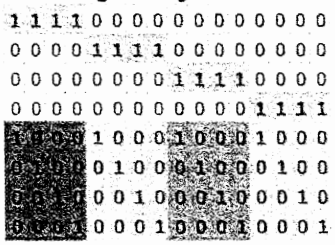
2.65

					a
	4	3	1	3	
	7	5	5	7	
	8	5	8	4	
	3	4	5	4	
b	8	8	8	-2	

الكميات المتاحة

الكميات المطلوبه

مصفوفه النقل



ما داله الهدف
ما قيود الانتاج
ما قيود التوزيع

قيود الإنتاج

$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} = 3$

$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} = 8$

$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} = 8$

$x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44} = 3$

قيود التوزيع

$x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41} = 8$

$x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42} = 8$

$x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43} = 8$

$x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44} = -2$

دالة الهدف

$$\min z = 4x_{11}+3x_{12}+x_{13}+3x_{14}+7x_{21}+5x_{22}+5x_{23}+7x_{24}+8x_{31}+5x_{32}+8x_{33}+4x_{34}+3x_{41}+4x_{42}+5x_{43}+4x_{44}$$

باعتبار مسألة البرمجة الخطية بالشكل العباسي أي

2.65

$$\min z = c^t x$$
$$\text{st} \quad Ax \le B$$
$$x \ge 0$$

وباعتبار جدول السمبلكس الأتي

	A	B	C	D	E	F	G	H	ratio
1	0	1.22	-5.2	4	0	0	0.78	0.78	—
2	0	1.78	6.22	-6	1	0	-0.8	2.22	—
3	0	4.44	7.56	0	0	1	-0.4	6.56	—
4	1	0.89	0.11	1	0	0	0.11	0.11	0.11
5	x1	x2	x3	x4	s1	s2	s3		
6				↑					

الدافع

حدد

1. المتغيرات الأساسية
2. المتغيرات غير الأساسية
3. المتغير الداخل
4. المتغير الخارج
5. واكتب الصف الأول بعد إجراء العمليات المحورية عليه (صف داله الهدف فقط)

1- المتغيرات الأساسية هي: S_2 ، S_1 ، x_1 وقيمها هي 6.56 ، 2.22 ، 0.11 على الترتيب

2- المتغيرات غير الأساسية هي: S_3 ، x_4 ، x_3 ، x_2

3- المتغير الداخل هو x_4 لأنه المالة min فنأخذ أكبر قيمة موجبة في صف داله الهدف.

4- المتغير الخارج هو x_1 حسب اختيار النسبة.

5- صف داله الهدف بعد اجراء العمليات المحورية:

-4 -2.34 -5.64 0 0 0 0.34 -0.31

باعتبار

$$\begin{aligned} \min \quad & 5x_1 - 3x_2 \\ \text{s. t.} \quad & \\ & 2x_1 - x_2 + 4x_3 \le 4 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 \le 5 \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 \ge 1 \\ & \mathbf{x} \ge 0 \end{aligned}$$

2.65

اكتب المسألة التي يجب حلها في المرحلة الأولى من خوارزمية المرحلتين وما الهدف من تكوين تلك المسألة

نظراً لأن المسألة ليست في الشكل القياسي فإن الحل الابتدائي غير متوفر لذلك نكون مسألة جديدة لإيجاد حل أساس مقبول لهذه المسألة الأصلية ثم نتابع بقية خطوات السمبلكس.

s.t

$$\min y = a_1$$
$$2x_1 - x_2 + 4x_3 + s_1 = 4$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 + s_2 = 5$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 - e_1 + a_1 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0,\ s_1, s_2 \ge 0,\ e_1 \ge 0,\ a_1 \ge 0$$

2.65

أذكر ثلاث خصائص هامة لمصفوفة النقل

① رتبة مصفوفة النقل A هي $Rank(A) = m+n-1$ $< m+n-1$
حيث m عدد مراكز الإنتاج، n عدد مراكز التوزيع.

② مصفوفة النقل ذات معيارية أحادية كلية.

③ جميع المصفوفات الأساسية لمشكلة النقل مصفوفات مثلثية علوية.

2.65

عرف ما المقصود بمصفوفة ذات معيارية أحادية كلية

نقول عن مصفوفة إنها ذات معيارية أحادية كلية إذا كانت قيمة المحددة لأي مصفوفة مربعة جزئية منها إما $1 \pm$ أو 0.

2.69

برهن أن جميع المصفوفات الأساسية لمشكلة النقل هي مثلثية علوية

البرهان / لتكن A مصفوفة النقل، B مصفوفة أساسية

بما أن A ذات معيارية أحادية كلية فإنه يوجد عمود في B يحوي عنصرين غير صفري قيمته 1، لذلك وفي خلاف ذلك فإن $Det(B) = 0$ وهذا مستحيل.

بإعادة ترتيب صفوف وأعمدة B يمكن إعادة كتابتها على الشكل:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & q \\ 0 & B_{m+n-2} \end{bmatrix}$$

$$B_{m+n-2} = \begin{bmatrix} 1 & p \\ 0 & B_{m+n-3} \end{bmatrix}$$ فإن B_{m+n-2}

بإجراء نفس المناقشة على B_{m+n-2}

يوضع $q = (q_1, q_2)$

فإن $B = \begin{bmatrix} 1 & q_1 & q_2 \\ 0 & 1 & p \end{bmatrix}$ بتكرار هذه الخطوات نجد أن B مصفوفة مثلثية علوية

2.65

مضاريب السمبلكس لمشكلة النقل

حد حلا أساسيا بالركن الشمالي العربي

						a
	34					34
	11	36				47
		13	13	30		56
				38	20	58
b	45	49	13	68	20	

معاملات التكلفة c_{ij}

(3)	7	5	7	9
(4)	(3)	5	7	10
5	(6)	(4)	(2)	11
6	7	8	(3)	(12)

$r_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$

نفرض $v_4 = 0$

احسب مضاريب السمبلكس

	-4	-5	-7	-9	0
7	(3)	7	5	7	9
8	(4)	(3)	5	7	10
11	5	(6)	(4)	(2)	11
12	6	7	8	(3)	(12)

حسب معاملات التكلفة المتبقية

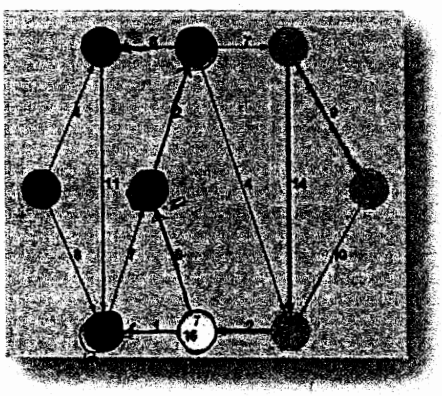
0	5	5	5	2
0	0	4	8	2
-2	0	0	0	0
-2	0	3	0	0

يمكن أعتبار x_{31} متغير داخل أو x_{44} بدلهم معاملات التكلفة التي لها سالبة

2.65

بتم تعبير حالة الشبكة بخوارزمية دايكسترا

الوضع الحالي هو



سننتم العنونة النهائية (الوصول إلى حالة اللون الأخضر) في الخطوات اللاحقة

للرأس 7 وبالقيمة 16

ثم للرأس 8 وبالقيمة النهائية 17

لو سرنا بخطوات الخوارزمية حتى النهاية فهل هناك رؤوس لا يمكن عنونتها بالقيمة النهائية أي ستبقى حمراء اللون. نعم

من هي إن وجدت؟ الرأس 1