جامعة الملك سعود كلية العلوم قسم الرياضيات

الفصل الأوّل١٤٣٣-١٤٣٤ هـ/الإختبار النهائي للمقرر ٤٨١-ريض/الزمن: ثلاث ساعات

التمرين الأوّل<١٠ درجات>:

١) أذكر نص نظرية داربو.

٢) أذكر نص النظرية الأساسية لحساب التفاضل و التكامل.

٣) أحسب النهاية: $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{4k}{n^2+k^2}$.

٤) إختبر تقارب التكامل $I=\int_1^{\infty}\frac{x}{1+x^2\sin^2 x}dx$. [بين أن $\frac{x}{1+x^2\sin^2 x}\geq\frac{1}{2x}$ لكل $x\geq 1$].

التمرين الثاني<١٠ درجات>:

١) أعط تعريف التقارب المنتظم لمتتالية الدوال $\{f_n\}$ على D .

٢) لتكن $\{f_n\}$ متتالية من الدوال المعرفة على الفترة $[0,1]$ بـ: $f_n(x)=2x+\frac{x}{n}$.

أ) أحسب النهاية النقطية f للمتتالية $\{f_n\}$.

ب) بين أن $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1 f(x)dx$.

٣) أ) أورد معيار كوشي للتقارب المنتظم لمتسلسلات الدوال.

ب) إستنتج منه أنه إذا كانت $\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)$ متقاربة بإنتظام فإن $f_n\xrightarrow{U}0$ (بإنتظام).

٤) إختبر التقارب المنتظم للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos nx}{n^2}$ على $\mathbb{R}$.

التمرين الثالث<١٠ درجات>:

١) أوجد جبر سيقما من مجموعات $\mathbb{R}$ الجزئية والمولدة بواسطة الفترة $[0,1]$.

٢) وضح لماذا الفترة $[0,1]$ غير قابلة للعد.

٣)أحسب المقدار $m\left(\left((-\infty,-5]\cap\mathbb{Q}\right)\cup\{-4,-3\}\cup[-2,0]\cup\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(n,n+\frac{1}{2^n}\right)\right)\right)$.

٤) لتكن $E\in\mathcal{M}$ و $a\in\mathbb{R}$. إذا علمت أن $m^*(a+E)=m^*(E)$ ، فأثبت أن $a+E\in\mathcal{M}$. ثم إستنتج قيمة المقدار $m(a+E)$.

@@@ فضلا أقلب الصفحة @@@

التمـــرين الرابع< ١٠ درجات>:

١) أذكر نص نظرية التقارب المسقوف.

٢) بين أنه إذا كانت $m(\Omega) < \infty$ وكانت $\{f_n\}$ متتالية محدودة من $\mathcal{L}^0(\Omega)$ حيث $f_n \longrightarrow f$ a.e. نقطيا، فإن $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ ولدينا $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, dm = \int_\Omega f \, dm$.

٣) أحسب النهاية $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{n \sin \frac{x}{n}}{x(1+x^2)} \, dx$. [لاحظ أن $\sin y \le y$ لكل $y > 0$].

٤) لتكن f دالة محدودة على الفترة $I = [a,b]$. صف العلاقة بين التقريرين $f \in \mathcal{R}(a,b)$ و $f \in \mathcal{L}^1(I)$، وكذا بين المقدارين $\int_a^b f(x)\,dx$ و $\int_I f \, dm$.

و الله ولي التوفيـــــــق