جامعة الملك سعود　　　الإختبار النهائي (٣ساعات)

كلية العلوم　　　٤٨١ ريض

قسم الرياضيات　　　الفصل ٢ - ١٤٣٣

<u>تمرين ١ (١٤ د = ٤+٤+٤+٢)</u>

لتكن متسلسلة الدوال $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{(nx+1)\sqrt{n}}$$

١) لتكن $a > 0$

استعمل اختبار فايرستراش لاثبات التقارب المنتظم للمتسلسلة على $[a,\infty)$

٢) اذا كان $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ فأثبت أن S

متصلة على $(0,\infty)$

٣) أثبت أن S قابلة للإشتقاق على $(0,\infty)$ و أعطي 'S

٤) هل المتسلسلة متقاربة في النقطة x=0 ؟

تمرين ٢ (٨ د= ٤+٤)

١) جد نهاية متتالية الدوال

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^2}\,(1 - e^{-n\cos^2 x}) \qquad x \in \mathbb{R}$$

٢) استعمل نظرية التقارب المسقوف و احسب

$$\lim_{n\mapsto\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx$$

تمرين ٣ (١٤ د =٢+٢+٢+٢+٣+٣)

ادرس التقارب النقطي و التقارب المنتظم لمتتاليات الدوال

$$f_n(x) = \frac{x}{nx+1} \qquad x \in [0,1]$$

$$g_n(x) = \frac{1}{nx+1} \qquad x \in [0,1]$$

$$h_n(x) = nx^2 e^{-nx} \qquad x \in [0,\pi]$$

تمرين ٤ (٨ د= ٢+ ٦)

١) اثبت ان

$$\forall\, t \in [0,1) \qquad ln(1-t) \leq -t$$

٢) استعمل نظرية التقارب المسقوف و استنتج

$$\lim_{n\mapsto\infty} \int_0^n (1-\frac{x}{n})^n e^{\frac{x}{2}}\,dx$$

تمرين ٥ (٦ د)

استعمل نظرية التقارب المسقوف و احسب

$$\lim_{n\mapsto\infty} \int_0^n (1-\frac{x}{n})^n e^{-\pi x}\,dx$$

تمرين (1)

1) $$f_n(x) = \frac{(-1)^{n}}{(nx+1)\sqrt{n}}$$

$$|f_n(x)| = \left|\frac{(-1)^n}{(nx+1)\sqrt{n}}\right| = \left|\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}x+\sqrt{n}}\right| \le \frac{1}{n\sqrt{n}a}$$
$$= \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}a} = M_n$$

اختبار فايرستراس :
$|f_n(x)| \le M_n \quad \forall x \in I$
$\sum M_n$ متقارب
$\sum f_n(x)$ متقارب بانتظام

$\frac{1}{a}\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ متقارب (اختبار P) $P=\frac{3}{2}>1$

ومن اختبار فايرستراس نجد أن $\sum \frac{(-1)^n}{(nx+1)\sqrt{n}}$ متقارب بانتظام على $[a,\infty)$

---

2) $\forall n \ge 1$ $f_n(x)$ متصلة على $[a,\infty)$
لأن $(nx+1)\sqrt{n} > 0$

و $\sum f_n(x)$ متقارب بانتظام على $[a,\infty)$

وبالتالي S متصلة على $(0,\infty)$

---

3) $$f_n'(x) = \frac{0-n\sqrt{n}(-1)^n}{(n\sqrt{n}x+\sqrt{n})^2}$$

$$|f_n'(x)| = \frac{n\sqrt{n}}{(n\sqrt{n}x+\sqrt{n})^2} \le \frac{n\sqrt{n}}{(n\sqrt{n}a)^2} = \frac{n^{\frac{3}{2}}}{(n^{\frac{3}{2}}a)^2} = \frac{n^{\frac{3}{2}}}{n^3a^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}a^2} = M_n$$

$\frac{1}{a^2}\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ متقاربة (اختبار P) $P=\frac{3}{2}>1$

ومن اختبار فايرستراس نجد أن $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ متقارب بانتظام

ومنه S قابلة للاشتقاق على $(0,\infty)$

~~ج) لا المتسلسلة غير متقاربة~~ $\cancel{\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}$

تمرين (٢) $f_n(x) = \frac{1}{1+x^2}\left(1 - e^{-n\cos^2 x}\right)$

١) $\cancel{f(x) = \lim \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} \\ \end{cases}}$

ملاحظة $e^{-n\cos^2 x} = 1$ اذا وفقط اذا $\cos x = 0$ اذا وفقط اذا $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$k \in \mathbb{Z}$

في هذه الحالة $f_n(x) = f_n\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) \cancel{= \frac{1}{1+\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^2} = \frac{1}{1+x^2}}$

$n \longrightarrow \infty \quad \cancel{\frac{1}{1+x^2}}$

$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\cos x \neq 0 \qquad \cos^2 x > 0$

$f_n(x) \longrightarrow \frac{1}{1+x^2}$

$n \longrightarrow \infty$

$f(x) = \lim f_n(x)$

٢) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & k \in \mathbb{Z} \text{ اذا} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

$|f_n(x)| = \frac{1}{1+x^2}\left(1 - e^{-n\cos^2 x}\right) \leq \frac{1}{1+x^2} = h(x)$

$h \in \mathcal{L}^1 \, ?$

$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$

$\lim_{T\to\infty} \int_0^T \frac{1}{1+x^2}\,dx$

$\lim_{T\to\infty} \left\{ \tan^{-1} x \right]_0^T$

$\lim \quad \tan^{-1} T - \tan^{-1} 0 = \frac{\pi}{2} < \infty \qquad h \in \mathcal{L}^1$

تمرين (٣)

$$f_n(x) = \frac{x}{nx+1} \qquad x \in [0,1]$$

ندرس التقارب النقطي

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{nx+1} = 0$$

ندرس الآن التقارب المنتظم

$$m_n = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)|$$

$$= \sup_{x\in[0,1]} \left|\frac{x}{nx+1} - 0\right| = \frac{x}{nx+1}$$

$$\left(\frac{x}{nx+1}\right)' = \frac{nx+1-nx}{(nx+1)^2} = \frac{1}{(nx+1)^2}$$

$$m_n = \sup_{x\in[0,1]} \frac{x}{nx+1} = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0$$

$$n \longrightarrow \infty$$

$g(x)$ متقاربة بانتظام لكل $x\in[0,1]$

$$g_n(x) = \frac{1}{nx+1} \qquad x \in [0,1]$$

ندرس التقارب النقطي

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nx+1} = 0$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x\in[0,1],\ x \neq 0 \end{cases}$$

ندرس التقارب المنتظم

بما أن $nx+1 \neq 0$ فإن $g_n(x)$ متصلة على $[0,1]$

ولكن $g(x)$ غير متصلة لـ $[0,1]$

وبالتالي $g(x)$ ليست متقاربة بانتظام

لا يكتب
هذا الهامش

$$h_n(x) = n x^2 e^{-nx} \quad x \in [0,\pi]$$

2 $h(x) = \lim_{n\to\infty} h_n(x) = \lim_{n\to\infty} n x^2 e^{-nx} = 0$ نعين كم التقارب النقطي

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n x^2}{e^{nx}}$$

1 $m_n = \sup_{x\in[0,\pi]} |h_n(x) - h(x)| = n x^2 e^{-nx}$

$$(n x^2 e^{-nx})' = -n x^2 e^{-nx} + 2n x e^{-nx} = 0$$

$$= \cancel{n}(-n x^2 + 2n x) e^{-nx}$$

$$= -n x^2 + 2n x = 0$$

$$= \frac{n x^2}{n} = \frac{2n x}{n}$$

$$\Rightarrow x^2 = 2\cancel{x}$$

$$x = \pm 2\cancel{x}$$

0,5 $m_n = \sup_{x\in[0,\pi]} n x^2 e^{-nx} =$

تمرين (4)

(1) $\forall t \in [0,1) \quad \ln(1-t) \leq -t$

2 بالضرب في e $\quad e(1-t) \leq e^{-t} \quad t \in [0,1)$

بالضرب في $(1-t)$ $\quad \frac{1}{1-t} \geq \frac{1}{e^{-t}}$

$$\frac{1-t}{1-t} \geq \frac{1-t}{e^{-t}}$$

$$1 \geq \frac{1-t}{e^{-t}}$$

ج)

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}}\,dx$$

~~لا يمكن ... استخدام ... نظرية التقارب المسيطر ...~~

$$\cancel{|f_n(x)| = \left|\left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}}\right| \le e^{\frac{x}{2}} = h(x)}$$

$$\cancel{h \in \mathcal{L}^1\ ?}$$

$$\cancel{\int_0^\infty e^{\frac{x}{2}}\,dx}$$

$$\cancel{= \lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{\frac{x}{2}}\,dx}$$

$$\cancel{= \lim_{T\to\infty} 2e^{\frac{x}{2}}\Big]_0^T}$$

$$\cancel{= \lim_{T\to\infty} 2\left[e^{\frac{T}{2}} - 1\right] = \infty}$$

نفرض $t = \frac{x}{n}$ و نعوض بالعلاقة المعطاة $\left(\ln(1-t) \le -t\right)$ لكل $t \in [0,1)$

$$\ln\left(1-\frac{x}{n}\right) \le -\frac{x}{n}$$

نضرب بـ n

$$n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right) \le -x$$

نضرب بـ $e^{\frac{x}{2}}$

$$f_n(x) = \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}} \le e^{-\frac{x}{2}} = h(x)$$

$$h \in \mathcal{L}^1\ ?$$

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}}\,dx$$

$$= \lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-\frac{x}{2}}\,dx$$

$$= \lim_{T\to\infty} -2e^{-\frac{x}{2}}\Big]_0^T$$

$$= \lim_{T\to\infty} -2\left[e^{-\frac{T}{2}} - 1\right] = 2 < \infty$$

$$h \in \mathcal{L}^1$$

متقاربة إذاً

من نظرية التقارب المسيطر نجد أن

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}}\,dx$$

تمرين (٥)

$f(x) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{-\pi x}\, dx$

$f_n(x) = \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{-\pi x}$

$f_n(x) = \begin{cases} \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{-\pi x} & , x \in [0, n) \\ 0 & x > 0 \end{cases}$

$|f_n(x)| = \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{-\pi x} \le e^{-\pi x} = h(x)$

$h(x) \in \mathcal{L}^1\ ?$

$\int_0^\infty e^{-\pi x}\, dx$

$= \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-\pi x}\, dx$

$= \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{\pi} e^{-\pi x}\Big]_0^t$

$= \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{\pi}\left[e^{-\pi t} - 1\right] = \frac{1}{\pi} < \infty$

$h \in \mathcal{L}^1$

$\int_0^\infty e^{-\pi x}\, dx$ متقارب

وبالتالي من نظرية التقارب المعوق لجراك

$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{-\pi x}\, dx = \int_0^n \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{-\pi x}\, dx$

نحسب الآن

$\boxed{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = e^{-x}}$

$\int_0^\infty e^{-\pi x} \cdot e^{-x}\, dx$

$= \int_0^\infty e^{(-\pi-1)x}\, dx$

$= \frac{1}{(-\pi-1)} e^{(-\pi-1)x}\Big]_0^\infty$

$= \frac{1}{-(\pi-1)} e^{(-\pi-1)\infty} - \frac{1}{(-\pi-1)}(1) = \frac{1}{(\pi+1)} < \infty$