

السؤال الأول: (8)

(1)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n \sin^2 \left(\frac{k\pi}{n} \right) \right) ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n(n^2 + k^2)} \right) : \text{احسب النهايات التالية :}$$

(2)

$$\int_{[1, \infty)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \chi_{[n, n+1)}(x) dm = \frac{1}{2} : \text{بين أن :}$$

(3)

$$m \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[n^2 - \frac{1}{2^n}, n^2 + \frac{1}{2^n} \right] \right) : \text{احسب القياس التالي}$$

السؤال الثاني: (6)

ادرس تقارب المتسلسلات التالية :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n)}{n^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{أ})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \quad (\text{ب})$$

السؤال الثالث (6)ناقش التقارب النقطي و المنتظم للمتسلسلات التالية :

$$1. \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x} \text{ على المنطقة } (1, \infty)$$

$$2. \quad f_n(x) = \frac{1}{n^{2x}} \text{ على المنطقة } (2, \infty)$$

السؤال الرابع: (5)

اثبت ان المتتالية $(f_n(x))$

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^2 x, & x \in [0, 1/n] \\ 2n^2(2/n - x), & x \in [1/n, 2/n] \\ 0, & x \in [2/n, 1] \end{cases}$$

لا تتقارب بانتظام على $[0, 1]$

السؤال الخامس (15)

(1) احسب فيما يلي:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x)^n} dx \right) \quad (\text{أ})$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{\infty} \frac{\sin(\pi x)}{1+x^n} dx \right) \quad (\text{ب})$$

(2) بين ان :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad (\text{أ})$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^r dx \right) = r! \quad (\text{ب})$$