الفصل السابع

الإستنتاج الإحصائي المتعلق بمجتمعين

STATISTICAL INFERENCES FOR TWO POPULATIONS OR PROCESSES

محتويات الفصل:

الفصل السابع

الإستنتاج الإحصائي المتعلق بمجتمعين

STATISTICAL INFERENCES FOR TWO POPULATIONS OR PROCESSES

(٧-١) نظرة عامة على محتويات الفصل Bridging to New Topics

في هذا الفصل نعرض لطرق الإستنتاج الأحصائي، عند مقارنة معالم مجتمعين أو عمليتين اخذا في الإعتبار المتوسطات، النسب، التباينات. مثل هذه المقارنات من الممكن ان تحدث بصورة أكثر شيوعا عن المشاكل التي تظهر في مجتمع واحد. من أمثلة ذلك، الدراسات التي تحاول تحديد ما إذا كان متوسط الاجور للرجال أعلى من متوسط الأجور للنساء المشتغلين في نفس النشاط، مقارنة الطلب على منتج جديد مع الطلب على منتج قديم، مقارنة جودة مواد خام من مصدرين مختلفين، ومقارنة معدلات البطالة في منطقتين جغرافيتين. نضف إلى ذلك، مقارنة المتوسطات قبل وبعد حالات أو مواقف معينة، فمثلا، قد نقارن مستوى المبيعات قبل وبعد حملة تسويقية بهدف تقييم مدى فاعلية هذه الحملة.

احصائيا، الطرق التي نستخدمها في هذا الفصل، هي امتداد مباشر لتلك الطرق التي تناولناها في الفصلين الخامس والسادس. وفي الواقع، فإن المبادئ في الحالتين واحدة، بمعنى، اننا في البداية نحدد المعالم التي ستقارن، بعد ذلك نسعى لحل المشكلتين الأساسيتين التي تعرضنا لهما في الجزء (٥-٤) : تحديد أفضل احصاء للمقارنة المطلوبة ثم تحديد توزيع المعاينة لهذا الأحصاء.

نتيجة هذا أنه بمجرد أن نحدد أفضل احصاء للمقارنة بين متوسطين أو نسبتين، فإن توزيع المعاينة الناتج، إما أن يكون التوزيع الطبيعي المعياري أو توزيعT. من ناحية أخرى، مقارنة تباينين يقتضي التعرض لتوزيع معاينة جديد يسمى بتوزيع F، **F-distribution**. الحرف F إشارة إلى اسم العالم فيشر الذي قدم هذا التوزيع.

وهناك أمثلة عديدة أخرى تظهر فيها الحاجة للمقارنة بين أكثر من مجتمعين أو عمليتين مستقرتين اخذا في الإعتبار أهم المعالم. فمثلا، قد نرغب في مقارنة متوسطات حجم المبيعات الشهرية في خمسة أقاليم. هنا تعامل الأقاليم الخمسة على أنها مجتمعات منفصلة. طرق المقارنة المستخدمة لأكثر من مجتمعين اخذا في الإعتبار متوسطاتها قدمت في الفصل الثامن.

الرابطة المشتركة بين الطرق المستخدمة في هذا الفصل وتلك التي استخدمت في الفصلين الثامن والثالث عشر، هو الأسلوب الذي يستخدم في الحصول على بيانات العينة المناسبة. في الحقيقة، وكما نوهنا في الفصل الأول إلى أن طريقة تجميع البيانات هي أهم مرحلة في أي دراسة احصائية. لذا سنبدأ هذا الفصل بهذه القضية. مناقشة هذه القضية سيؤدي إلى ثلاث مبادئ أساسية عند مقارنة معالم مجتمعين أو أكثر.

(٧-٢) خطط المقارنة بين متوسطين: Planning A Comparison of Two Means

نفرض أن مدير خدمة التقييم أو التسعير رغب في مقارنة مثمنين كل منهما عمل في هذا المجال لمدة عام. اراد المدير أن يعرف ما إذا كان هناك اختلاف في متوسط التثمين لكل منهما، على فرض أن كل العوامل الأخرى ثابتة. عزم المدير على تسجيل بعض البيانات (التثمين الفعلي لهم لبعض الأصول) لمقارنة متوسطات التثمين في المجتمعين μ_2, μ_1 اعتمادا على بيانات التثمين لكلا المثمنين. ما هي الخطة المناسبة للحصول على بيانات عينة في مثل هذه الحالة ؟ قبل متابعة القراءة، خذ دقائق وفكر كيف يمكنك أداء ذلك.

سوف نتناول خطتين أساسيتين متاحتين لهذا الغرض هما:

العينات المستقلة **Independent Samples** والعينات ذات القراءات المزدوجة **Paired Samples**.

(٧-٢-١) العينات المستقلة: تصميم تجربة: The Independent Samples

في تصميم العينات المستقلة، نختار عينة من الأصول المتشابهة وتقسم إلى مجموعتين. كل مجموعة يتم تثمينها أو تسعيرها من قبل شخص واحد ويؤدي عمله مستقلا عن الآخر. يراعي أن هذه الأصول تحدد لكل مثمن بطريقة عشوائية وفي هذا تأكيد على عدم وجود تحيز لأي مثمن. نفرض أننا حددنا عينة من عشر أصول متشابهة، هنا نخصص خمس أصول عشوائياً لكل واحد منهم ليتم تقييمها. هنا نعتبر المثمنين على أنهما مجتمعين منفصلين، من المجتمع الأول سحبت عينة عشوائية تمثل تثمين خمس أصول معينة ومن المجتمع الثاني سحبت عينة عشوائية تمثل تثمين خمس أصول أخرى. وبلغة تصميم التجارب التي قدمت في الفصل الأول، المثمن هو العامل الذي نهتم به، حيث أننا نقارن أثنين من المثمنين، فهذا العامل له مستويان والأصول العشر هي الوحدات التجريبية. ولذلك قيمة التثمين لأصل ما هي متغير الإستجابة. نفرض أن الأصول ارقام 4 ,10 ,1 ,8 ,5 خصصت عشوائيا للمثمن الاول وباقي الأصول كانت للمثمن الثاني، وان نتائج بيانات العينة ظهرت على الصورة التالية:

العينة1		العينة2	
رقم الأصل	المثمن1	رقم الأصل	المثمن 2
4	x	7	x
10	x	2	x
1	x	9	x
8	x	6	x
5	x	3	x
	$\bar{X}_1$		$\bar{X}_2$

حيث:

x = قيمة تثمين الأصل

$\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ = الفرق بين متوسط تثمين المثمن الاول والمثمن الثاني.

الفكرة في العينات المستقلة هو إختيار أصول متشابهة ثم توزع عشوائيا على كل مثمن. بعض

الفروق بين قيم متوسط التثمين في العينتين متوقعا بسبب إختلاف المعاينة العشوائية ومع ذلك، اذا كان متوسط التثمين للمثمن الأول والمثمن الثاني مختلفا بدرجة كافية، فيمكنا ان نستنتج ان المثمنين يختلفان حقيقة عن بعضهما.

(٧-٢-٢) العينات ذات القراءات المزدوجة: تصميم تجربة: The Paired Samples

في تصميم العينات ذات القراءات المزدوجة، نحدد عينة من الأصول، عينة الأصول هذه قد تكون متشابهة وقد تكون مختلفة تماما. كل مثمن عليه تثمين كل الأصول التي أختيرت. ينتج عن هذا سلسلة مقارنات من التثمين لكل واحد منهم. نفرض أننا حددنا عينة (n=5) أصول. بيانات العينة ظهرت على الصورة التالية:

	المثمن		
الأصل	1	2	الفرق
1	x	x	d
2	x	x	d
3	x	x	d
4	x	x	d
5	x	x	d
	$\overline{X}_1$	$\overline{X}_2$	$\overline{D}=\overline{X}_1-\overline{X}_2$

حيث :

x= قيمة تثمين الأصل

d= الفرق بين المثمنين للأصل الواحد

$\overline{D}$ = متوسط الفروق = $\overline{X}_1-\overline{X}_2$

الفكرة في العينات ذات القراءات المزدوجة هو تسجيل الفروق بين المثمنين، أصل بأصل. وهذا من شأنه أن يستبعد اي غموض أو عدم وضوح في التحليل يرجع إلي الفروق الموجودة بين الأصول. وبلغة تصميم التجارب، قيمة الأصل هي المتغير الأساسي الذي يتم التحكم في تأثيره عن طريق القطاعات. وهكذا فإن التحليل ينصب على فروق التثمين الخمسة. فإذا كانت كلها أكبر من الصفر أو أصغر من الصفر. فإننا نستنتج أن كلا المثمنين ليسوا متشابهان في عملية التثمين.

(٧-٢-٣) مقارنة تصميم العينتين: Comparing the Two Sampling Designs

كل نوع من خطتي المعاينة سليم وكثيرا ما يستخدم، لكن أيهما الأفضل ؟ عمليا، الطريقة المفضلة هي العينات ذات القراءات المزدوجة إذا كان ذلك ممكنا. الهدف الرئيسي من هذه المناقشة موجه لك كي تفهم السبب في أفضلية العينات ذات القراءات المزدوجة على العينات المستقلة. لنفرض أن متوسط قيمة التثمين للمثمن الأول هي $\overline{X}_1$ =$100,000 وللمثمن الثاني $\overline{X}_2$=$90,000 . لأي خطة معاينة تكون الفكرة الأساسية في التحليل هو أن نطرح السؤال التالي: هل الفرق المشاهد $10,000 بين $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$ هو نتيجة اختلافات بين المعاينة العشوائية ؟ بمعنى أنه يجب ان نأخذ في الإعتبار إمكانية أن الإختلافات بين قيم الأصول قد تكون اختلافات كبيرة بدرجة كافية حتى أن التخصيص العشوائي للأصول على

في سياق السؤال المطروح، دعنا نفحص اسلوب العينات المستقلة. الفرق المشاهد 10,000 دولار بين $\overline{X}_2, \overline{X}_1$ يمكن أن يكون راجعا إلى حد ما إلى أحد السببين التاليين أو إلى كلاهما: (1) فرقا بين μ_2, μ_1. (2) الإختلافات بين متوسطات العينات $\overline{X}_2, \overline{X}_1$ تعكس اختلافات الأصول التي وزعت عشوائيا (خطأ المعاينة). دعنا نتناول بمزيد من الدقة إختلافات المعاينة العشوائية في كل من $\overline{X}_2, \overline{X}_1$.
انت تعلم من البند (٥-٥) بالفصل الخامس، أن الإختلافات في متوسط العينة يقاس بالخطأ المعياري حيث $SE(\overline{X}) = \sigma / \sqrt{n}$ [الصيغة (5.2)]، بالتالي فإن الإختلافات في متوسط العينة يعتمد على كل من σ (والذي يصف اختلافات عملية التسعير لكل مثمن على حدة) وعلى n (حجم العينة).
والآن نتناول العوامل الأخرى المسببة للأختلاف بين التسعير لكل مثمن. يمكننا الآن أن نفكر في عاملين:

1- اختلاف الأصول :

ببساطة، يتغير التسعير بسبب تغير قيم الأصول.

2- تنافر وتناقض أو عدم تناسق التسعير:

لا يوجد شخص يكون ثابتا تماما في حكمه على العديد من العوامل المختلفة. ربما يكون المثمن في حالة اعياء أو مرض في يوم معين أو ربما يكون الطقس منعشا أو غير ذلك، وكلها عوامل تغير من حكم المثمن. وعلى ذلك، فتسعير الأصول ممكن أن يختلف شيئا ما بسبب تنافر وتضارب أو عدم تناغم المثمن مع نفسه.

وكنتيجة لذلك، نجد أن الأختلاف بين متوسط المثمنين وهو 10,000 دولار قد يرجع إلى ثلاث أسباب (1) أختلافا بين μ_2, μ_1. (2) اختلافا بين قيم الأصول (3) عدم اتساق تقديرات المثمن. آخر عاملين، اختلاف الأصول وعدم اتساق المثمن، كلاهما يعرفا بالتأثيرات العشوائية **random effects**. تأثير اختلاف الأصول هو تأثير عشوائي، لأننا نوزع هذه الأصول على المثمنين عشوائيا. كما يبدو أنه من المعقول والمقبول أن نفترض ان تأثير اتساق المثمن في عملية التسعير تحدث في نمط عشوائي، لذلك فإن كلا العاملين يساهما في اختلافات المعاينة العشوائية.

مدخل لتحليل العينات ذات القراءات المزدوجة :

دعنا نعود الآن إلي تصميم العينات ذات القراءات المزدوجة. كما سبق أن بينا، فإن الأسباب الممكنة للفرق المشاهد وهو 10,000 دولار بين متوسطات العينتين هي: (1) اختلاف بين μ_2, μ_1 (2) اختلاف بسبب المعاينة العشوائية. دعنا الآن نعيد نتناول العوامل المسببة لاختلاف المعاينة العشوائية.

1- اختلاف الأصول:

على الرغم من تفاوت قيم الأصول، فإن كلا المثمنين يقيما نفس المجموعة من الأصول. حيث أننا نحلل الفرق بين تسعير الأصول لكل أصل على حدة، فإن هذه المقارنات لا تتأثر بالفروق بين قيم

الأصول نفسها. إزدواج القراءات في قطاعات يوضح أثر الفروق بين الأصول. لذلك فإن اختلاف الأصول يكون قد تم حذفه بوصفه أنه كان التفسير الممكن للفرق المشاهد بين $\overline{X}_1, \overline{X}_2$.

2- تفاوت وتضارب أو عدم اتساق عملية التسعير :

كما وضحنا من قبل، فإن العوامل العشوائية قد تتسبب في أن تكون عمليات التسعير متضاربة ومتفاوتة ومن ثم تسبب فروقاً في عمليات التسعير لنفس الثمن.

ميزة العينات ذات القراءات المزدوجة هي البساطة. بمجرد الحصول على تسعير الأصول في صورة قراءات مزدوجة وتحديد الفروق بينها، نكون قد حذفنا اختلافات الأصول بوصفها التفسير المحتمل للفرق المشاهد بين متوسطي العينتين . وهذا يخفض من اختلافات المعاينة العشوائية وكنتيجة لذلك يقل ارجاع الفرق المشاهد بين متوسطي العينتين للعوامل العشوائية. لذلك، إذا استخدم تصميم العينات ذات القراءات المزدوجة، فإن الفرق المشاهد بين متوسطي العينتين يمكن اعتباره مؤشرا للفرق بين المحكمين أكثر مما لو كنا استخدمنا العينات المستقلة.

اعتبارات التصميم التي ناقشناها في مشكلة التسعير لخصت على النحو التالي:

مقارنة بين العينات المستقلة والعينات
ذات القراءات المزدوجة في مشكلة التسعير

الأسباب المحتملة لمشاهدة اختلافا بين متوسطات العينات

عينات مستقلة	عينات القراءات المزدوجة
1- اختلافات المحكمين	1- اختلافات المحكمين
2- اختلافات المعاينة العشوائية	2-اختلافات المعاينة العشوائية
-اختلافات الأصول	- لا يوجد تأثير لاختلافات الأصول
- عدم اتساق المحكمين	- عدم اتساق المحكمين

(٧-٢-٤) المبادئ الأساسية في تصميم التجارب:

The Fundamental Principles of Designed Experiments

الإعتبارات السابقة في مشكلة التسعير توحي ببعض المبادئ الأساسية في تصميم التجارب والتي ذكرناها لأول مرة في الفصل الأول. المبدأ العام في أي تصميم احصائي هو ان نحصل على بيانات عينة بطريقة ما بحيث تصغر الإختلافات العشوائية، وذلك بالتحكم قدر المستطاع في العوامل التي يمكن معرفتها والمسببة للإختلافات، (مثلا: اختلاف الأصول). لتنفيذ هذا المبدأ العام، فإننا نسترشد بثلاث مبادئ محددة:

1- **التعشــية** : **Randomization**

وحدات المعاينة (الأصول) التي يمكن أن تشاهد، توزع عشوائيا على كل مستوى من مستويات العامل موضوع الدراسة. (وعلى ذلك ، فإن الأصول توزع عشوائيا على المحكمين). يضاف إلى

ذلك، فإن كل العوامل الأخرى المسببة للإختلافات والتي يمكن أن تؤثر في متغير الإستجابة يمكن توزيعها عشوائيا. هذا يؤكد أنه لايوجد تفضيل لعامل على الآخر.

2- القطاعات: Blocking

المتغيرات الخفية أو الخلفية (مثل الأصول) التي يمكن ان تساهم بصورة جوهرية في اختلافات متغير الإستجابة، يجب وضعها في قطاعات عندما يكون ذلك ممكنا. هذا من شأنه أن يعزل تأثير تلك المتغيرات وبتلك الوسيلة تنخفض الإختلافات العشوائية.

3- التكرار: Replication

الإختلاف العشوائي يمكن تقييمه عن طريق تكرار المشاهدة لمتغير الإستجابة عند كل مستوى من مستويات العامل تحت التجربة (داخل كل قطاع إذا استخدمت القطاعات). بقياس الفروق المشاهدة بين المشاهدات المتكررة في ظل ظروف تجريبية ثابتة، يمكننا تقدير حجم الإختلافات العشوائية في البيانات.

مثال (٧-١)

يرغب أحد التجار في إختبار فاعلية عرضين قدما له. يخطط التاجر لتجربة هذه العروض في 28 متجرا تختلف كثيرا في مبيعاتها. إختار التاجر عشوائيا 14 متجرا لتجربة العرض الأول وجرب العرض الثاني في المتاجر الباقية. التحليل الذي يقوم به التاجر مبني على مقارنة متوسط مبيعات تلك العينتين المستقلتين.

(أ) هل يمكنك أن تقترح معاينة أكثر فاعلية ؟

(ب) وضح لماذا تكون فكرتك هي الأفضل.

الحل

(أ) حيث أن المتاجر تختلف بشدة فيما بينها في حجم المبيعات، فإن متوسطات العينات يمكن ان تختلف بصورة جوهرية بسبب التخصيص أو التوزيع العشوائي للمتاجر. وهكذا فإن مستوى المبيعات التاريخي (القديم) يكون أهم عامل أساسي سوف يساهم جوهريا في إختلافات متغير الإستجابة. تأثير اختلاف المتاجر يمكن حذفه بإزدواج المتاجر وفقا لمستويات مبيعاتهم التاريخية. بفرض أن المتجرينB,A هما الأعلى مستوى في المبيعات تاريخيا. أحد العروض يختار عشوائيا ويستخدم في المتجرA والعرض الآخر يستخدم في المتجرB. المتجران الأخران التاليان في مستوى المبيعات تاريخيا يتم ازدواجهم وذلك بتوزيع العروض عليهم مرة اخرى بطريقة عشوائية. باستمرار هذا الأسلوب، فإن التاجر يوزع العروض على المتاجر الـ28. هذا هو تصميم العينات ذات القراءات المزدوجة.

(ب) بوضع المتاجر ذات احجام مبيعات متماثلة في صورة ازدواج، فإننا أساسا نعزل وبصورة جوهرية حجم الإختلافات الناتجة من اختلافات مستويات المبيعات التاريخية. وهكذا فإن أي فروق مشاهدة بين متوسطات العينات لا يمكن ان تكون راجعة للإختلافات بين مستويات المبيعات التاريخية للمتاجر وإنما ترجع حقيقة للفروق بين تأثيرات العروض المقدمة للتاجر.

مثال (٧-٢)

مدير تسويق في شركة هاندلي يعتقد أن متوسط الدخل لعملائه أعلى من متوسط الدخل لعملاء شركة منافسة له. يرغب المدير في بحث ذلك عن طريق اجراء احد بحوث السوق. هل خطة المعاينة المعتمدة على المقارنات المزدوجة ممكنة لهذه المشكلة؟ اشرح رأيك في ذلك.

الحل

هناك العديد من الأمثلة التي لا يمكن استخدام القطاعات فيها وهذه واحدة منهم. في هذا المثال لا توجد وسيلة ملائمة أو طبيعية لتسجيل بيانات العينة في قراءات مزدوجة. البديل هو أن يستخدم مدخل العينات المستقلة وذلك بسحب عينات عشوائية مستقلة من عملاء هاندلي ومن عملاء الشركة المنافسة له.

تمارين :

(٧-١) ما هي الميزة التي تحققها من تسجيل البيانات في صورة قراءات مزدوجة بدلا من عينات مستقلة؟

(٧-٢) صف الوضع الذي لا يمكن فيه استخدام تصميم معاينة القراءات المزدوجة.

(٧-٣) وضح كيف تؤثر مكونات تصميم التجارب التالية على دقة التحليل الإحصائي:

أ- التعشية.

ب- القطاعات.

جـ- المكرارات (أو التكرار)

(٧-٤) في منهج العينات العشوائية المستقلة، إلى أي مدى نعذو اختلاف بيانات العينات إلى الإختلاف داخل كل عينة؟ هل يجب أن نستخدم اسلوب العينات المستقلة لو كنا نشك في ان الإختلافات الجوهرية في البيانات داخل العينة يكون سببها بعض عوامل غير محددة أو غير معروفة؟ وما الذي يجب أن نفعله في هذه الحالة؟ وضح ذلك.

(٧-٥) ترغب مصلحة البريد في تنفيذ تجربة تساعدها في الإختيار بين خدمة البطاقات البريدية وخدمة توصيل البريد باليد مع مخصوص، وكان تصميم التجربة على النحو التالي: تم تحديد عشرين منطقة متباعدة المسافات عن بعضها. سوف ترسل طرود بريدية إلى عشر مناطق تم اختيارها عشوائيا وذلك بإستخدام خدمة البطاقات البريدية الأولى. طرود مماثلة سوف ترسل للمناطق العشر الأخرى بإستخدام خدمة التوصيل باليد مع مخصوص. أزمنة التوصيل للطرود العشرين سوف تسجل. متوسط زمن التوصيل بخدمة البطاقات البريدية سوف يقارن مع متوسط زمن التوصيل بخدمة التوصيل باليد مع مخصوص.

(أ) هل يمكنك اقتراح خطة افضل؟

(ب)وضح كيف تكون خطتك هي الخطة الأكثر تحسنا؟

(٧-٦) مشرف صحي بأحد النقابات يرغب في تنفيذ تجربة لتحديد متوسط درجة التحسن في اداء الرئة لوظائفها وذلك على مجموعة من المشاركين في برنامج للتدريبات الرياضية. أعضاء هذه التجربة هم مجموعة لم تمارس من قبل التدريبات الرياضية بإنتظام، وسوف يشاركوا في

برنامج رياضي تم الإشراف عليه لمدة ثلاث شهور. صف كيف يمكنك تصميم هذه التجربة.

(أ) ما هو المتغير الذي يجب أن تسجله لكل شخص في هذه التجربة.

(ب) بأي طريقة أو بأي طرق يمكنك أن تستخدم القطاعات (أي القراءات المزدوجة) ؟

(جـ) لماذا تعد القطاعات مفيدة ؟ اجب عن كل نوع من القطاعات التي ذكرتها في (ب).

(د) اسرد العوامل التي تعتقد انها يمكن أن تشارك في الإختلافات العشوائية في التجربة.

(٧-٧) مدير اعلان في شركة ما يفاضل ما بين توقيتين للإعلان في التليفزيون، ليشترى احدهما ليعرض اعلان تجاري عن شركته. لكي يختار أحدهما، يرغب في تنفيذ مقارنة إحصائية بين متوسطين ليرى ما إذا كانت أعمار المشاهدين للإعلان تختلف في المتوسط. ما هي خطة المعاينة المناسبة أو الأفضل هنا: العينات المستقلة أم عينات القراءات المزدوجة ؟ وضح ذلك.

(٧-٣) الاستنتاج الإحصائي المتعلق بمتوسطين اعتماداً على عينات مستقلة :

Statistical Inferences For Two Means Based on Independent Samples

نفرض أننا نرغب في مقارنة متوسطي مجتمعين أو عمليتين مستقرتين. سنرمز للمتوسطات بالرموز μ_2,μ_1 والانحرافات المعيارية للمجتمعات بالرموز σ_1 ، σ_2 ، وبعد بحث دقيق ومتأني لتحديد أي خطة معاينة سنستخدم، قررنا أن القطاعات غير ممكنة وانتهينا إلى سحب عينتين عشوائيتين مستقلتين أحجامهما n_2,n_1 من ذلك المجتمعين. في التطبيق العملي، غالبا ما يكون الهدف هو تحديد ما إذا كان من الممكن اعتبار متوسطات تلك المجتمعات (أو العمليات) متساوية أم لا. في هذه الحالة يكون من المناسب رياضيا أن نعتبر الفرق بين μ_2,μ_1 أي μ_1-μ_2 على أنه المعلمه محل الاهتمام، فإذا كان الفرق بين μ_2,μ_1 يساوي صفر فإن متوسطي المجتمعين μ_2,μ_1 يكونا متساويان.

حيث أن $\overline{X}_1$ هي أفضل إحصاء يستخدم للأستنتاج حول μ_1، وأن $\overline{X}_2$ هي أفضل إحصاء للأستنتاج حول μ_2، فيجب ألا نندهش إذا وجدت أن أفضل إحصاء للاستنتاج حول μ_1-μ_2 هو $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$. هل من الصواب اعتبار $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ وكأنه إحصاء ؟ بالطبع إنه كذلك أي $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ هو إحصاء، لأنه فرق بين إحصائين، بمعنى أن أي عينتين عشوائيتين تعطي القيم $\overline{X}_2, \overline{X}_1$ فهما بالتالي يعطيا القيمة $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$. وحيث أن هذا الفرق إحصاء ناتج من معاينة عشوائية، فإن $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ يكون له توزيع معاينة بمتوسط محدد وخطأ معياري محدد. حقيقة أن $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ هو أفضل إحصاء لعمل استدلال حول μ_1-μ_2 يؤكد أن $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ هو إحصاء غير متحيز وله أصغر خطأ معياري عن أي إحصاء آخر غير متحيز للمعلمه μ_1-μ_2 (أنظر الجزء (٥-٤) إذا رغبت في مراجعة هذا المفهوم).

في هذا الفصل نستعرض الخطوات التي تستخدم لتحديد فترات الثقة واختبارات الفروض الإحصائية المتعلقة بـμ_1-μ_2 اعتمادا على $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$. الأسلوب المستخدم هنا مشابه تماما الأسلوب المستخدم في الجزء (٦-٤)، وقبل أن تتابع القراءة ربما ترغب في مراجعة ذلك الفصل بالإضافة إلى الجزء (٥-٥).

(٧-٣-١) المتوسط والخطأ المعياري لـ $\overline{X}_1$-$\overline{X}_2$: The Mean and Standard Error of $\overline{X}_1$-$\overline{X}_2$

من الممكن تحديد المتوسط والخطأ المعياري للفرق $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ بدون أن نعرف التوزيع الخاص بالمجتمعين. ذلك التحديد نصل إليه بأسلوب مشابه في حالة مجتمع واحد والذي نوقش في

الجزء (٥-٥) . القيمة المتوقعة للفرق $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ ليست بغريبة علينا، فنحن نعلم من الصيغة (3.20) في الفصل(٣-٩) أن القيمة المتوقعة للفرق بين متغيرين عشوائيين هي الفرق بين توقعيهما. وحيث أن: $E(\overline{X}_1) = \mu_1, E(\overline{X}_2) = \mu_2$ فإن :

$$E(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = E(\overline{X}_1) - E(\overline{X}_2) = \mu_1 - \mu_2 \qquad \textbf{(7.1)}$$

والصيغة (7.1) تؤكد لنا أن الإحصاء $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ هو بالفعل مقدر غير متحيز لـ μ_1-μ_2.

لتقدير الخطأ المعياري للفرق $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$، يلزمنا في البداية تحديد تباينة. نعلم من الصيغة(3.21) في الفصل(٣-٩) أنه إذا كان المتغيرين العشوائيين مستقلين، فإن تباين الفرق بينهما يساوي مجموع تبايناتهما. هذه القاعدة تنطبق هنا لأننا سحبنا عينتين عشوائيتين مستقلتين. وحيث أن:

$$\mathrm{Var}(\overline{X}_2) = \sigma_2^2 / n_2 \ , \ \ \mathrm{Var}(\overline{X}_1) = \sigma_1^2 / n_1$$

$$\therefore \ \mathrm{Var}\ (\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = \mathrm{Var}(\overline{X}_1) + \mathrm{Var}(\overline{X}_2) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} \qquad \textbf{(7.2)}$$

والخطأ المعياري للفرق $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ هو الجذر التربيعي:

$$SE(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \qquad \textbf{(7.3)}$$

المعنى العام للصيغ(7.1) ,(7.3) هونفسه كالمعنى الذي ذكر في البند (٥-٥-١) في حالة مجتمع واحد. إذا استطعنا سرد قائمة بكل العينات العشوائية المستقلة كل ذات الحجم n_2,n_1 من المجتمعتين، فإنه يمكن تكوين قائمة بالفروق المتناظرة للنواتج $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$. هذه القيم من$\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ تتجه لأن تتجمع حول الفرق μ_1-μ_2، بعضها سيكون أعلى من μ_1-μ_2 والبعض الآخر يقل عن ذلك، ولكن بصفة عامة معظمها يتمركز حولμ_1-μ_2. بالإضافة إلى ذلك نجد أنه كلما زاد حجم عينة واحدة أو كلاهما تناقص الخطأ المعياري للفرق$\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ ، وبالتالي تحسنت دقة الإحصاء $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ كمقدر للفرق μ_1-μ_2. في الحقيقة إذا تساوى أحجام العينات ، فإن الخطأ المعياري يتناسب عكسيا مع الجذر التربيعي لحجم العينة المشترك، وهذه هي نفس الخاصية التي تناولناها في حالة مجتمع واحد.

(٧-٣-٢) توزيع المعاينة للفرق $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ عندما تكون σ_1 ، σ_2 معلومة:

The Sampling Distribution of $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ When σ_1 and σ_2 Are Known

كما أشرنا من قبل في الفصل السادس، أنه من النادر في التطبيقات الإحصائية الفعلية أن نعرف الانحرافات المعيارية للمجتمعات، لذا في المناقشة التالية سنفترض أن قيم σ_1 ، σ_2 معلومة.

نفرض أن المجتمعين الذين سنسحب من كل منهما عينة عشوائية مستقلة عن الأخر، أنها مجتمعات تتبع التوزيع الطبيعي لها انحرفات معيارية σ_1 ، σ_2 معلومة القيمة. من الجزء (٥-٢) نعلم أن توزيع المعاينة الطبيعي للإحصاءات$\overline{X}_2$, $\overline{X}_1$ لها أيضا توزيع طبيعي بأخطاء معيارية $\sigma_1 / \sqrt{n_1}$, $\sigma_2 / \sqrt{n_2}$ على التوالي. حيث أن الإحصاء $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ هو توليفة خطية من متغيرات عشوائية طبيعية، لذا فهو أيضا متغير عشوائي طبيعي (كما وضح ذلك في الجزء ٥-٥-٢). باختصار، توزيع المعاينة للإحصاء $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ هو توزيع طبيعي له متوسط وخطأ معياري موضحة بالصيغ (7.1),(7.3) على التوالي.

ماذا يحدث لو أن توزيع المجتمعين لم يكن طبيعي ؟ يحدث نفس الوضع كما في حالة مجتمع واحد، بمعنى، طالما أن حجم كلا العينتين n_2, n_1 كبيرا بدرجة كافية $(n_1 \geq 30)$، $(n_2 \geq 30)$، فإن توزيع المعاينة للإحصاء $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ هو تقريبا التوزيع الطبيعي وذلك بفضل نظرية النهاية المركزية.

في ظل أن الانحرافات المعيارية للمجتمعات σ_1 ، σ_2 معلومة القيمة وأن توزيع الإحصاء $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ هو تقريبا التوزيع الطبيعي بمتوسط وخطأ معياري محدد بالصيغ (7.1),(7.3) على التوالي، فإن توزيع الإحصاء المعياري Z حيث:

$$Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \tag{7.4}$$

يكون له تقريبا التوزيع الطبيعي المعياري. تبدو الصيغة (7.4) مختلفة عن إحصاءات Z السابقة، لكنها جوهريا لا تختلف عنهم. وكما في إحصاءات Z السابقة، نحول قيمة الإحصاء الأصلية إلى إحصاء طبيعي معياري وذلك بطرح القيمة المتوقعة ثم قسمة الناتج على الخطأ المعياري.

وحيث أننا نفترض أن الانحرافات المعيارية في المجتمعات معلومة، وهو وضع من النادر أن يتحقق عمليا في التطبيقات الإحصائية، فإننا لن نتناول هذا الوضع بأكثر مما قدمنا في هذا الفصل.

(٧-٣-٣) توزيع المعاينة للفرق $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ عندما تكون σ_1 ، σ_2 مجهولة:

The Sampling Distribution of $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ when σ_1 and σ_2 Are Unknown

في التطبيقات الإحصائية العملية، غالبا ما تكون قيم الانحرافات المعيارية في المجتمعات مجهولة وبالتالي علينا تقدير الخطأ المعياري للفرق $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ بطريقة ما باستخدام تباين العينات. وعندما نفعل ذلك، ينتج توزيع معاينة ليس له توزيع طبيعي، حتى ولو كانت المعاينة تتم من مجتمعين لهما التوزيع الطبيعي. والسبب في هذا يتطابق مع السبب الذي ذكر في حالة مجتمع واحد، ويجب ألا تفاجأ إذا علمت أن توزيع المعاينة لهذا الإحصاء هو توزيع T.

عند تحديد توزيع المعاينة هذا، سنفترض- بالإضافة إلي افتراض أن توزيع المجتمعين لهما التوزيع الطبيعي- للتبسيط أن تباينات تلك المجتمعات متساوية. ومع ذلك، إذا كان الفرض الخاص بتساوي التباينات يبدو فرضا واهيا أو ضعيفا، خاصة بعد أن يوحي التحليل البياني لبيانات العينة باختلافات في التباين، فإن إجراء آخر لا يتطلب افتراض تساوي التباينات يمكن أن يتخذ. توضيح ذلك الفرضين نتناوله فيما يلي، ولكن ننصحك بأن تتجه لأحد البرامج الإحصائية الجاهزة، مثل برنامج Minitab لمتابعة كيفية معالجة ذلك الفرضين، كما سيوضح ذلك باختصار.

(أ) تباينات المجتمعين مجهوله لكنها متساوية:

نفرض أن تباينات المجتمعين متساوية وأن الرمز σ^2 يمثل التباين المشترك لهما وهو مجهول القيمة، أي: $\sigma_2^2 = \sigma_1^2 = \sigma^2$. بوضع σ^2 محل كل من σ_1^2 ، σ_2^2 في الصيغة (7.3)، نجد أن الخطأ المعياري للفرق $(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)$ يصبح:

$$SE(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\sigma^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} \tag{7.5}$$

كيف يمكن تقدير التباين المشترك σ^2؟ هنا نستخدم تباينات العينتين S_1^2، S_2^2، في توليفة كالموضحة

في الصيغة (7.6). حيث أن المجتمعين لهما تباين واحد، فإن كل عينة تعطي تقدير مستقل للتباين المشترك في المجتمعين. لذا فإن S_1^2، S_2^2 تعطي تقديرات مستقلة لـ σ^2 .

لتوضيح خطوات التقدير، دعنا نتناول المثال التالي. نفرض أننا نرغب في تحديد ما إذا كان برنامج صيفي مقترح في الرياضيات من شأنه أن يحسن من مستوى درجات الطلبة في الرياضيات . نفرض أن 30 طالبا بالصف السادس من مدرسة محلية بإحدى المقاطعات، ممن حققوا درجات متشابهة في الرياضيات في فصل الربيع، قد اختيروا لإجراء الدراسة عليهم. عشرة من هؤلاء الطلبة "مجموعة الاختبار" اختيروا عشوائيا للالتحاق بالبرنامج الصيفي في الرياضيات والباقي عشرون من الطلبة " المجموعة الضابطة" لم تشارك في هذا البرنامج الصيفي، كلا المجموعتين حضروا اختبار الرياضيات في الخريف وسجل لكل طالب درجته. أظهرت النتائج في مجموعة الاختبار أن متوسط الدرجات 510.2 بانحراف معياري 9.4 درجة. وفي المجموعة الضابطة كان متوسط الدرجات 501.1 بأنحراف معياري 8.5 درجه.

هناك أكثر من رؤيةمهمة لهذه الدراسة. المجتمعين اللذين نرغب في مقارنة متوسط الدرجات بينهم هي مجتمعات افتراضية، إحدهما يتكون من درجات كل طلاب الصف السادس مفترض فيهم حضورهم البرنامج الصيفي، والمجتمع الآخر يتكون من نفس المجتمع الافتراضي الأول مفترض فيهم عدم حضورهم البرنامج الصيفي والأسلوب المنطقي للمعاينة هنا هو العينات المستقلة.

فيما يتعلق بمنهج العينات المستقلة، لدينا تقديرين مستقلين للمعلمة σ^2 وهما: $S_1^2=(9.4)^2=88.36$ ، $S_2^2=(8.5)2=72.25$ ونرغب في أدماج هذه التقديرات في تقدير واحد بأخذ متوسطهم. لكن يلاحظ أن S_2^2 يعد تقديرا يعول عليه بصورة أكثر، لأنه يعتمد على عينة حجمها أكبر($n_2=20$ بينما $n_1=10$). لذلك يكون تقدير التباين هو متوسط مرجح للقيم S_1^2،S_2^2 حيث تكون الترجيحات مبنية على أساس أحجام العينات، ولكي يكون تقدير التباين تقديرا غير متحيز لـσ^2، فإننا يجب أن نستخدم درجات الحرية n_2-1,n_1-1 كترجيحات بدلا من استخدام العينات n_2,n_1 مباشرة. طبقا لذلك فإن مقدر التباين المشترك لـ σ^2 ، يعطي على الصورة:

$$S_p^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{(n_1-1)+(n_2-1)}=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2} \qquad (7.6)$$

يسمى الاحصاء S_p^2 تباين العينة التجميعي **Pooled Sample Varience** لأنه مكون من تجميع المعلومات عن العينتين. وكما تم في المناقشات السابقة عن تباين العينة، فإن مقام S_p^2 هو درجات الحرية لهذا التقدير. يلاحظ أن درجات الحرية للتقدير S_p^2 تساوي مجموع درجات الحرية للتقديرات S_1^2 ، S_2^2 . أيضا يلاحظ أن الأوزان أو الترجيحات في المتوسط المرجح كانت درجات الحرية وهيn_1-1, n_2-1، ينتج عن هذا أن S_p^2 يصبح متوسط حسابي بسيط للقيم S_2^2 , S_1^2 عندما تتساوى أحجام العينات n_2,n_1.

فيما يتعلق بالدراسة التي أجريت على البرنامج الصيفي للرياضيات، نجد أن قيمة تباين العينة التجميعي يكون:

$$S_p^2=\frac{(10-1)(88.36)+(20-1)(72.25)}{10+20-2}=77.4282$$

يلاحظ أن المتوسط الرجح $S_p^2=77.4282$ يقع بين القيم $S_1^2=88.36$ ، $S_2^2=72.25$، وهذه حقيقة دائما، فالتباين التجميعي يقع دائماً بين تباين العينتين. أيضا يلاحظ أن قيمة $S_p^2=77.4282$ أقرب إلى

$S_2^2=72.25$ من $S_1^2=88.36$، لأن حجم العينة $n_2=20$ أكبر من $n_1=10$.

حيث أن S_p^2 هو تقدير التباين المشترك لـ σ^2، فإنه بوضع S_p^2 مكان σ^2 في الصيغة (7.5) نجد أن تقدير الخطأ المعياري للإحصاء $\overline{X}_1-\overline{X}_2$ يكون :

$$SE\left(\overline{X}_1-\overline{X}_2\right)=\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)} \tag{7.7}$$

حيث أننا لا نعلم قيمة σ^2، فإنه لا يمكننا تحديد قيمة Z من الصيغة (7.4)، وحيث أننا قدرنا σ^2 بالإحصاء S_p^2 فإنه يمكننا تقدير الخطأ المعياري للفرق $\overline{X}_1-\overline{X}_2$ بالصيغة (7.7) وبالتالي يمكننا تحديد قيمة T كما يلي:

$$T=\frac{\left(\overline{X}_1-\overline{X}_2\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} \tag{7.8}$$

يلاحظ أيضا- كما في حالة المجتمع الواحد- أن الصيغة (7.8) تحتوي على أكثر من إحصاء زيادة عما تحتويه الصيغة (7.4) الا وهو S_p^2. لذا فإن الإحصاء T يكون أكبر إلى حد ما عن الإحصاء Z بسبب الاختلافات من عينة إلى عينة. جدير بالذكر أن توزيع المعاينة للإحصاء T بالصيغة (7.8) يتبع تقريبا توزيع T بدرجات حرية (n_1+n_2-2) طالما أن توزيع المجتمعين لا يبتعدا كثيرا عن التوزيع الطبيعي أو أن يكون أحجام كلا العينتين كبيرا (على الأقل30).

(ب) تباينات المجتمعين مجهولة وغير متساوية :

إذا كان افتراض تساوي التباينات يبدو غير مقبولا، فإنه يمكن تقدير الخطأ المعياري للإحصاء $\overline{X}_1-\overline{X}_2$ باستخدام تباينات العينتين S_1^2، S_2^2 في الصيغة (7.3). بمعنى أن تقدير الخطأ المعياري للفرق $\overline{X}_1-\overline{X}_2$ يتحدد باستخدام :

$$SE\left(\overline{X}_1-\overline{X}_2\right)=\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}} \tag{7.9}$$

بنفس المناقشة التي تمت عند تحديد الصيغة (7.8)، نجد أن الإحصاء المناسب هنا يعطي بالصيغة:

$$T=\frac{\left(\overline{X}_1-\overline{X}_2\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}} \tag{7.10}$$

توزيع المعاينة للإحصاء T بالصيغة (7.10) يتبع تقريبا توزيع T بدرجات حرية لها الصيغة المركبة التالية:

$$df=\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1}+\frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}} \tag{7.11}$$

المعلومات المتعلقة بالاستدلال حول $\mu_1-\mu_2$ اعتماداً على عينات مستقلة وتباينات المجتمعات غير معلومة ملخصة داخل الإطار التالي. وكما ذكرنا سابقا، يكون من الأفضل الرجوع إلى البرامج الإحصائية الجاهزة.

ملخص: توزيع المعاينة المتعلق بالاستدلال حول $\mu_1-\mu_2$ اعتماداً على عينات مستقلة وتباينات المجتمعات مجهولة

أ- إذا كانت الانحرافات المعيارية (أو التباينات) المجهولة للمجتمعات متساوية وكان: (1) توزيعات المجتمعات لا تختلف عن التوزيع الطبيعي. أو(2)أحجام العينات كبيرة بدرجة كافية ($n_1 \geq 30,\ n_2 \geq 30$)، فإن توزيع المعاينة للإحصاء: T

$$T = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

هو توزيعT بدرجات حرية ($n_1 + n_2 - 2$)، حيث:

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

هو المقدر التجميعي للتباين المشترك $\sigma^2 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

ب- إذا كانت الانحرافات المعيارية المجهولة للمجتمعات ليست بالضرورة متساوية وكان: (1) توزيعات المجتمعات لا تختلف عن التوزيع الطبيعي. أو (2) أحجام العينات كبيرة بدرجة كافية ($n_1 \geq 30,\ n_2 \geq 30$). فإن توزيع المعاينة للإحصاء:

$$T = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

يتبع تقريباً توزيع T بدرجات حرية معطاة بالصيغة (7.11)

(٧-٣-٤) فترات الثقة واختبارات الفروض حول $\mu_1-\mu_2$ عندما تكون σ_1، σ_2 مجهولتان :

Confidence Intervals and Hypothesis Testing for $\mu_1-\mu_2$ when σ_1 and σ_2 Are Unkonwn

حيث أن توزيعT يستخدم في الاستنتاج حول $\mu_1-\mu_2$ عندما تكون σ_1، σ_2 مجهولتان، فإن تحديد فترات الثقة واختبارات الفروض الإحصائية ستتم مناقشتهما بطريقة موازية لما تم في الجزء (٦-٤).

فترات الثقة:

بمعلومية قيمة الإحصاء $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ ، فإن فترة الثقة $100(1-\alpha)\%$ تقريبا للفرق $\mu_1-\mu_2$ هي:

$$(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) \pm t_{1-\alpha/2,df} \quad SE(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) \qquad (7.12)$$

حيث (بفرض تساوي تباينات المجتمعات):

$$SE(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = \sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} \qquad (7.13)$$

أو حيث (بفرض عدم تساوي تباينات المجتمعات):

$$SE(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \qquad (7.14)$$

الكمية $t_{1-\alpha/2,df}$ هي القيمة الجزئية من توزيع T بدرجات حرية $df=(n_1+n_2-2)$ اذا كانت تباينات المجتمعات متساوية أو بدرجات حرية كالموضحة بالصيغة (7.11) اذا كانت تباينات المجتمعات غير متساوية.

مثال (٧-٣)

تذكر مثال البرنامج الصيفي للرياضيات وفيه كانت المجموعة الاختبارية من طلبة الصف السادس مكونة من $(n_1=10)$ طالب وكان متوسط الدرجات فيها $\overline{X}_1=510.2$ وذلك بعد حضورهم البرنامج الصيفي للرياضيات. أما المجموعة الضابطة$(n_2=20)$ وهم لم يشاركوا بالحضور في البرنامج الصيفي للرياضيات فكان متوسط درجاتهم $\overline{X}_2=501.1$. لتحليل هذا المثال، سنفترض أن توزيعات المجتمعات قريبة من التوزيع الطبيعي وتبايناتها المجهولة متساوية.

(أ) قدر الفرق بين متوسط درجات الطلبة اللذين حضروا البرنامج الصيفي والطلبة اللذين لم يحضروا البرنامج الصيفي.

(ب) مستخدما مستوى ثقة 95% ، حدد هامش خطأ المعاينة للتقدير.

(جـ) هل فترة الثقة 95% تشير إلى أن البرنامج الصيفي مفيد ؟ برر نتيجتك.

الحل

(أ) بيانات العينة تشير إلى أن الطلاب اللذين حضروا البرنامج الصيفي تحسن مستواهم بمقدار: $\overline{X}_1-\overline{X}_2=510.2-501.1=9.1$ عن الطلاب اللذين لم يحضروا البرنامج الصيفي.

(ب) من المناقشة السابقة لهذا المثال، حددنا قيمة تباين العينة التجميعي $S_p^2=77.4282$. من الصيغة (7.7) نجد أن الخطأ المعياري للفرق $\overline{X}_1-\overline{X}_2$ هو:

$$SE(\overline{X}_1-\overline{X}_2)=\sqrt{77.4282(\frac{1}{10}+\frac{1}{10})}=3.408$$

ولتحديد مقدار الخطأ في تقدير (أ)، نحسب فترة الثقة 95% للفرق $\mu_1-\mu_2$ بأستخدام الصيغة (7.12). القيمة الجزئية من جدول C بدرجات حرية 10+20-2=28، هي: $t_{.975,28}=2.048$، وبالتالي تكون فترة الثقة 95% هي:

$$9.1\pm(2.048)(3.408)=9.1\pm6.98=2.12\ \text{to}\ 16.08$$

وهامش خطأ المعاينة هو:±6.98. بمعنى أنه بثقة 95% نجد أن الفرق بين متوسطي المجتمعين يقع بين 2.12 ,16.08 درجة.

(جـ) من الواضح أن البرنامج الصيفي للرياضيات كان مفيداً لأن الفترة (2.12, 16.08) لا تحتوي على الصفر وتحتوي على قيم موجبة. بمعنى آخر، اعتمادا على البيانات الحالية للعينة، يكون من غير المقبول أن ندعي أن البرنامج الصيفي للرياضيات لم يحسن من درجات الرياضيات للطلاب.

إختبارات الفروض حول $\mu_1-\mu_2$:

كما وضحنا في الفصل السادس، يمكننا اختبار الفرق $\mu_1-\mu_2$ باستخدام إما فترات الثقة أو باستخدام أسلوب القيمة P. اختبارات الفروض الإحصائية حول $\mu_1-\mu_2$ باستخدام فترات الثقة، تأخذ نفس الخط كما كان في حالة مجتمع واحد والذي نوقش في الجزء (٦-٤-٤). فمثلا، نفرض أننا ندعي أن الفرق

$\mu_1-\mu_2$ هو كمية قدرها D_o. في معظم الحالات D_o تساوي الصفر، أي لا يوجد فرق، لاختبار الفرض العدمي:

$$H_o:\mu_1-\mu_2=D_o$$

مقابل الفرض البديل من طرفين :

$$H_a:\mu_1-\mu_2\neq D_o$$

فإننا نحدد فترة الثقة للفرق $\mu_1-\mu_2$ باستخدام الإحصاء T المناسب.

أذا كان الفرق المدعي به D_o يقع داخل هذه الفترة، فإن D_o تعد قيمة مقبولة للفرق $\mu_1-\mu_2$ ومن ثم فلا يوجد سببا لمناقضة الفرض العدمي. من ناحية أخرى، D_o تعد غير مقبولة للفرق $\mu_1-\mu_2$ وبالتالي يكون هناك سببا لمناقضة الفرض العدمي إذا ما وقعت D_o خارج حدي الثقة. يلاحظ أننا قد وضحنا هذه الإجراءات في المثال (٧-٣) الجزء(جـ).

اختبارات الفروض الإحصائية المتعلقة بالفرق $\mu_1-\mu_2$ باستخدام القيمة P (P-Value) يتم بنفس الأسلوب المستخدم في حالة مجتمع واحد كما في البند (٦-٤-٥). القيمة P هو احتمال مشاهدة قيمة للإحصاء ($\overline{X}_1-\overline{X}_2$) تكون أكثر تطرفا من القيمة الفعلية المشاهدة في العينة الحالية وذلك في الاتجاه المحدد في الفرض البديل، وكما هو في حالة مجتمع واحد، فإن هذا يتطلب تحويل القيمة المشاهدة للفرق ($\overline{X}_1-\overline{X}_2$) إلى قيمة T باستخدام إما الصيغة (7.8) أو (7.10) ثم تحديد الاحتمال المناظر.

مثال (٧-٤)

هل هناك فرق في متوسط الدرجات بين طلبة الكلية اللذين يشاركوا في انتخابات محلية واللذين لا يشاركوا في تلك الانتخابات ؟ اختيرت عينتين عشوائيتين مستقلتين من إحدى الجامعات الرئيسية، كل عينة بها 46 طالب. البيانات التالية تكشف عن متوسط الدرجات والانحراف المعياري لعينة من 46 طالب شاركوا في الانتخابات ولعينة أخرى 46 طالب لم يشاركوا في الانتخابات :

شاركوا في الانتخابات	لم يشاركوا في الانتخابات
$\overline{X}_1=2.85$	$\overline{X}_2=2.65$
$S_1=.35$	$S_2=.42$

مفترضاً أن الانحرافات المعيارية المجهولة في المجتمعات متساوية. هل بيانات تلك العينات تشير إلى وجود فرق في متوسط الدرجات بين طلبة الجامعة الذين شاركوا واللذين لم يشاركوا في الانتخابات ؟

الحل:

الفرض العدمي والفرض البديل يمكن صياغتهم على النحو التالي:

$$H_o:\mu_1-\mu_2=0 \qquad H_a:\mu_1-\mu_2\neq 0$$

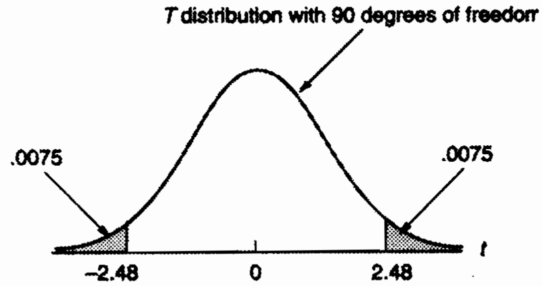
السؤال الجوهري هو ما إذا كانت قيمة الفرق $\overline{X}_1-\overline{X}_2=2{,}85-2.65=.2$ مختلفة بدرجة كافية عن القيمة التي يدعيها الفرض العدمي وهي الصفر أم لا. حيث أن تباينات المجتمعين المجهولة يفترض أنها متساوية، فإن تباين العينة التجميعي يكون:

$$S_p^2 = \frac{(46-1)(.35)^2+(46-1)(.42)^2}{46+46-2} = .14945$$

قيمة T المناظرة للفرق $\overline{X}_1 - \overline{X}_2 = .2$ هي:

$$T = \frac{(2.85-2.65)-0}{\sqrt{.14945\left(\frac{1}{46}+\frac{1}{46}\right)}} = 2.48$$

احتمال ان قيمة Tتكون اكثر تطرفا عن 2.48 في كلا الأتجاهين أعطيت عن طريق الحاسب الآلي لتكون 015.= (2x.0075) كما هي موضحة في شكل (٧-١). وبدون الحاسب الآلي، يمكن تقريب القيمة P من الجدولC. فمن ذلك الجدول، نبحث عن القيمتين اللتين تحصران T=2.48 عند درجات الحرية 90، فنجدهما 2.368,2.632. نلاحظ أن المساحة على يسار2.632 هي995. والمساحة على يسار 2.368 هي 99. وعلى ذلك، احتمال ان الإحصاءT يأخذ قيما أكبر من 2.48 يقع بين 1-.99=.01 ، 1-.995=.005 وحيث أن الفرض البديل في اتجاهين، فإن قيمة P المطلوبة هي ضعف هذا الاحتمال. فالقيمة P تقع بين 02,.01. (ضعف المدى 005 to.01.)



شكل (٧-١): القيمة P لمثال (٧-٤)

وبسبب صغر قيمة P، فإن بيانات العينات الحالية لاتؤيد إدعاء الفرض العدمي، أي من الواضح أن هناك سبباً جيداً للإعتقاد بوجود إختلاف في متوسط الدرجات بين الطلاب اللذين شاركوا في الإنتخابات واللذين لم يشاركوا. ومع ذلك، فمن المهم أن ننوه إلى أن هذه النتيجة محددة بإطار الدراسة، بمعنى أن التحليل الإحصائي هنا يؤيد إنطباق هذه النتيجة فقط على طلبة الجامعة التي إجريت فيها هذه الدراسة. أما التعميم على طلبة من جامعات أخرى فيمكن تبريرة فقط بتوسيع حدود ونطاق الدراسة بجانب معلومات عن موضوع الدراسة.

إستخدام الكومبيوتر: Using the Computer

سنوضح إستخدام برنامج Minitab لتنفيذ مقارنة بين متوسطي مجتمعين إعتماداً على عينات مستقلة. ضع في إعتبارك أن أي برنامج إحصائي جاهز له القدرة على أداء تلك المقارنة.

مثال (٧-٥)

إحدى المنظمات الإجتماعية مهتمة بمقارنة متوسط دخول الأسر في منطقتين سكنيتين متجاورتين. أختيرت من كل منطقة عينة عشوائية مستقلة عن الأخرى حجم كل منها 14 أسرة وفيما يلي دخل كل أسرة بالألف دولار.

(1) 86.5 49.2 54 47 60.6 57.1 29.3 51.4 39.8 34.4 60 66.7 75.2 65.9

(2) 58.8 30.4 38 48.5 46 32.7 34.5 48.4 41.7 60.5 44 40.4 41.5 34.9

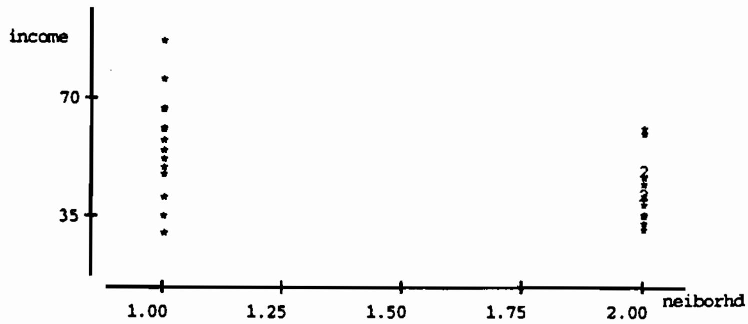
إعتماداً على هذه البيانات، هل هناك سبباً حقيقياً للإعتقاد بوجود إختلاف في متوسط دخل الأسر بين تلك المنطقتين؟

الحل

قبل إستخدام أي طريقة إحصائية في الحل، ننصح برسم تلك البيانات. وبفحص ذلك الرسم بإمعان، ربما نجد البداية في الأجابة على هذا السؤال. لرسم هذه البيانات، نستخدم المحور الأفقي للمنطقتين السكنيتين والمحور الرأسي للدخول المسجلة للأسر، كما هو موضح في شكل (٧-٢). الأرقام على الرسم تشير إلى أن هناك مشاهدات متعددة تشغل نفس النقطة على الرسم. أوامر برنامج Minitab للحصول على الشكل موضحة في ملحق هذا الفصل. من هذا الشكل يتضح أن التشتت الرأسي عند كلا المنطقتين ليس بنفس الدرجة، فهناك إختلاف واضح بين دخول الأسر في المنطقة الأولى أكثر مما هو موجود في المنطقة الثانية. طبقاً لذلك، فإننا يجب إستخدام الأحصاء T الموضح بالصيغة (7.10) والذي لا يتطلب فرض تساوي التباينات. من شكل (٧-٢) يلاحظ أيضاً أنه على الرغم من وضوح الفرق في التباين، إلا أن دخول الأسر في المنطقة الأولى تميل إلى أن تكون أكبر من تلك التي في المنطقة الثانية، وهذا يوحي بأن متوسط دخل الأسرة في المنطقتين ليس واحداً.

مخرجات برنامج Minitab (انظر إلى ملحق هذا الفصل) لإختبار الفرض العدمي:

$H_o:\mu_1-\mu_2=0$ مقابل الفرض البديل $H_a:\mu_1-\mu_2\neq 0$ موضحة فيما يلي



شكل (٧-٢): الشكل النقطي للدخل مقابل المنطقة

```
Two Sample T For income
neiborhd     N       Mean       STDV        SE MEAN
1            14      55.5       15.5            4.2
2            14      42.88      9.04            2.4
95 PCT CI For MU 1-MU  2: (2.6, 22.7)
T TEST MU   1=MU     2  (VS  NE): T=2.63     P=0.016      DF=20
```

يلاحظ أن المخرجات تشتمل على قيمة T (2.63) وعلى القيمة P (.016) وكذلك على فترة الثقة 95% للفرق μ_1-μ_2 وهي (2.6,22.7) وحيث أن قيمة P صغيرة بدرجة كافية وأن فترة الثقة 95% لاتحتوي على الصفر، فإن نتيجتنا المبدئية التي إعتمدت على الرسم البياني تكون قد تحققت وتأكدت. الآن إعتماداً على بيانات العينة يتأكد لنا أن متوسط دخل الأسرة في المنطقتين يختلفا إختلافاً حقيقياً.

مثال (٧-٦)

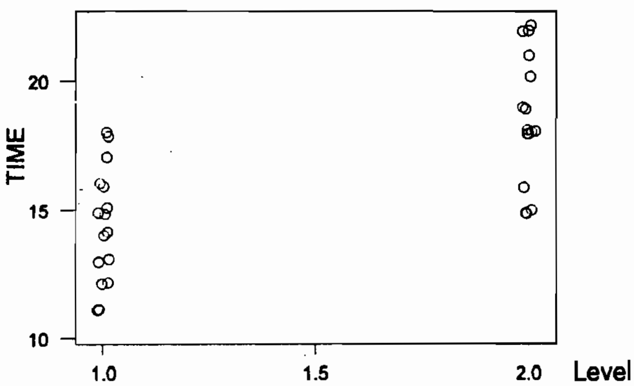
في عملية تقييم مستمرة لأثر الضوضاء المزعجة على قدرة الفرد في أداء عمل معين، قام باحث بتصميم تجربة من خلالها يطلب من عدد من الأشخاص أداء عمل معين في ظل بيئة متحكم فيها بوجود مستويين يمثلان خلفية من الضوضاء. ولكي يخفض من أثر الإختلافات العشوائية، إختار الباحث 32 شخصاً ممن لديهم القدرة على أداء هذا العمل في وقت واحد تقريباً. من هؤلاء 16 شخصاً أختيروا عشوائياً وطلب منهم إداء العمل في ظل مستوى متواضع من الضوضاء (المستوى 1) والباقي 16 يؤدوا العمل في ظل المستوى 2 وهو مستوى شديد الضوضاء ومزعج عن المستوى الأول. البيانات التالية تمثل الأزمنة المسجلة بالدقائق التي إستغرقت لإكمال العمل بواسطة 16 شخص في كل مستوى.

level 1:	14	12	15	15	11	16	17	12	14	13	18	13	18	15	16	11
level 2:	20	22	18	18	19	15	18	15	22	18	19	15	21	22	18	16

مفترضاً أن هذه البيانات تشكل عينات عشوائية مستقلة من مجتمعين كل منهما يتبع التوزيع الطبيعي. هل هناك سببا حقيقيا للإعتقاد بأن متوسط الزمن في المستوى الثاني يتعدى متوسط الزمن في المستوى الأول؟

الحل

يلاحظ هنا إستخدام العينات العشوائية المستقلة، حيث اختير لهذه الدراسة 32 شخص، تم تقسيمهم عشوائياً إلى مجموعتين، وهؤلاء الأشخاص كانوا متساوين في مقدرتهم على أداء هذا العمل في أزمنة متساوية تقريباً. . التمثيل البياني لهذه البيانات موضح في شكل (٧-٣). من هذا الشكل يتضح أن التشتت الرأسي عند كلا المستويين، تقريباً بنفس الدرجة وبالتالي، يستخدم الإحصاء T الموضح بالصيغة (7.8) المعتمدة على التباين التجميعي. نضيف إلى ذلك أن الشكل يوضح أن الأزمنة المستغرقة في المستوى الثاني تميل إلى الكبر عن تلك التي في المستوى الأول ومن ثم فمتوسطي الزمن في المستويين من غير المحتمل أن يكونا متساويان.



شكل (٧-٣): أزمنة الأداء لمثال (٧-٦)

مخرجات برنامج Minitab عند اختبار الفرض العدمي $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ مقابل الفرض البديل $H_a: \mu_1 - \mu_2 > 0$ موضحة فيما يلي:

```
Two Sample T for level  1   VS   level    2
                N        MEAN        STDV         SE MEAN
level  1   16        14.38        2.28           0.57
level  2   16        18.50        2.45           0.61
95 PCT  CT  FOR  MU  Level 1-MU   level 2: (-5.83,-2.42)
T TEST  MU  Level   1=MU    Level  2 (VS  LT):  T=-4.93   P=0.0000
DF=30
POOLED    STDV=       2.36
```

مخرجات البرنامج تؤكد النتيجة التي توصانا إليها حالاً من الرسم البياني. فترة الثقة 95% للفرق μ_1-μ_2 تقع بالكامل على يسار الصفر وهذا يؤيد أن μ_1 هي أقل من μ_2، أيضاً قيمة p (.0000) التي تناظر قيمة T=-4.93 هي قيمة صغيرة جداً لدرجة أنه لا يمكن أن يوجد شك ولو ضئيل في أن μ_1 هي فعلاً أقل من μ_2.

مثال (٧-٧)

يرغب مدير الإنتاج في معرفة ما إذا كان هناك فروقاً في متوسط إنتاجية ورديتي النهار والليل. لهذا الغرض، إختيرت عينات عشوائية مستقلة من 15 يوماً إنتاجياً. عدد الوحدات المنتجة في كل وردية عن كل يوم كانت كما يلي:

shift 1 (day)	250	269	264	246	252	253	244	255	245	255	244	245	249	256	257
shift 2 (night)	252	241	251	239	251	259	243	258	361	251	253	284	233	251	241

مفترضاً أن المعاينة تمت من مجتمعين طبيعين مستقلين، وإعتمادا على بيانات تلك العينات، هل هناك سبب حقيقي لدى مدير الإنتاج لكي يعتقد بأن هناك إختلاف في متوسط الإنتاجية بين الورديتين؟

الحل

قبل أن نبدأ في الحل، فكر في سبب إتجاهنا لاستخدام أسلوب القراءات المزدوجة في هذا المثال. إذا كان مدير الإنتاج يعلم أن مستويات الإنتاج تتغير بدرجة كافية من يوم إلى يوم، فمن المحتمل أن تكون الإختلافات اليومية مصدراً أساسياً لاختلافات الإنتاج. عندما يتم تحديد عامل ما يكون سبباً أساسياً للإختلافات، فإن أسلوب القراءات المزدوجة وفق هذا العامل يجب أن يتبع، لذلك فمستويات الإنتاج في تلك الورديتين يجب أن تكون قراءات مزدوجة أخذا في الاعتبار عامل اليوم، هذا إذا كان هناك اختلافات بدرجة كافية بين يوم وآخر.

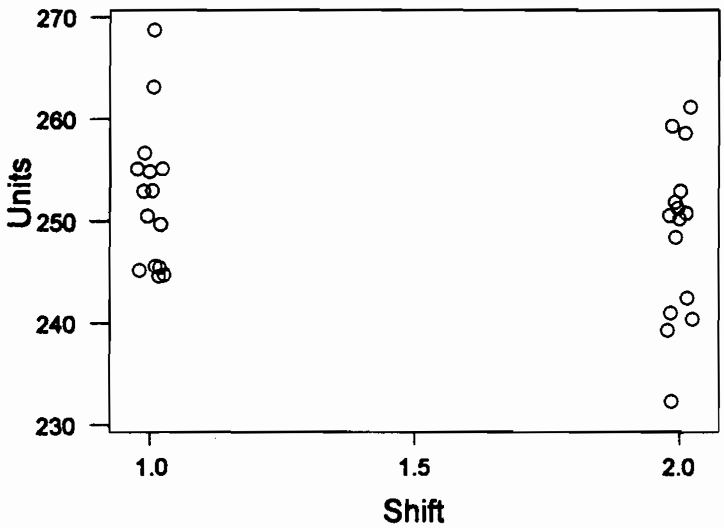
وكما في الأمثلة (٧-٥)، (٧-٦) يمكن الكشف عن الكثير عن طريق استخدام الرسم البياني لبيانات العينة. من شكل (٧-٤) يلاحظ أنه على الرغم من أن مستويات الإنتاج في وردية الصباح تبدوا أكبر إلى حد ما من تلك التي في وردية المساء، إلا أنه لا يتضح بالتأكيد وجود اختلافات حقيقية في مستويات الإنتاج. نضف إلى ذلك أن التشتت الرأسي عند كلا الورديتين لا يبدو أنه مختلف وهكذا

فإن أسلوب القراءات المزدوجة يستخدم في مثل هذه الحالة .

مخرجات برنامج Minitab لتحديد ما إذا كانت بيانات العينة تناقض ادعاء عدم وجود فرق بين μ_2, μ_1 موضحة فيما يلي:

```
TWOSAMPLE T FOR shift 1 vs shift 2
              N       MEAN      STDEV     SE MEAN
shift 1      15      252.57     7.40        1.9
shift 2      15      248.80     7.96        2.1
95 PCT CI FOR MU Shift 1 - MU  Shift 2: (-2.3 , 9.5)
TTEST MU Shift 1=MU shift 2 (VS NE): T=1.24 P=0.23 DF=28
POOLED STDEV=     7.68
```

نتائج مخرجات البرنامج تؤيد ما توصلنا إليه عند فحص شكل (٧-٤). فترة الثقة 95% للفرق μ_1-μ_2 تشمل الصفر كما أن قيمة P وهي 23. والتي تناظر قيمة T (1.24) هي بالتأكيد ليست صغيرة بدرجة كافية وعلى هذا نستنتج بثقة كبيرة عدم وجود فرق بين متوسط مستويات الإنتاج في الورديتين .



شكل (٧-٤): عدد الوحدات المنتجه في الورديتين

المعني العملي للمثال (٧-٧)

ماذا يحدث لو أن بيانات العينة أظهرت وجود اختلافات بين متوسط مستويات الإنتاج في الورديتين ؟ في مثل هذه الحالة، على الادارة أن تكتشف لماذا حدث هذا الاختلاف . فمثلا، هل العمال في الورديتين تدربوا تدريبا متساوياً ؟ أم أن عمال إحدى الورديتين ربما كانوا أكثر خبرة من عمال الوردية الأخرى . على الإدارة أن تجيب على مثل هذه الأسئلة إن أرادت أن تتخذ الإجراء المناسب .

(٧-٣-٥) الفروض وأهميتها: The Assumptions and Their Importance

أحد الفروض الضرورية في كل الاستنتاجات التي تمت في الفصل الحالي، هي أن توزيع المجتمع هو التوزيع الطبيعي . الفرض الآخر هو أن تباينات المجتمعات متساوية .

الفرض بأن توزيعات المجتمعات هو الطبيعي:

على الرغم من ضرورة هذا الفرض عند الإثبات الرياضي في طرق الاستنتاج الأحصائي، إلا أنه غير حاسم في مواقف أو حالات عملية. استناداً إلى نظرية النهاية المركزية، فتوزيعات المعاينة لمتوسطات العينات تقريبا هي التوزيع الطبيعي، وذلك للعينات ذات الحجم المعتدل. أما إذا كانت توزيعات المجتمعات ملتوية التواء خفيف، فإن إجراءات الاستنتاج التي قدمت في هذا الفصل تكون ملائمة لجميع الحالات باستثناء العينات الصغيرة جداً في حجمها.

الفرض بتساوي التباينات :

يمكن استخدام الإحصاء T المعتمد على فرض تساوى البيانات، إذا كان الشكل البياني لبيانات العينات يكشف عن أن تشتت العينتين تقريبا متشابه، وهكذا نصدق الاعتقاد بإن تباينات المجتمعات متساوية. من ناحية أخرى، إذا كان هذا الشكل البياني يكشف عن فروق متميزة وواضحة في تشتت العينتين، فإن الإحصاء T المعتمد على فرض عدم تساوي تباينات المجتمعين يمكن أن يستخدم. وعلى أية حال يكون التفكير جيداً بأختيار عينات متساوية الحجم عند تطبيق كلا الحالتين.

تمارين:

(٧-٨) بالنسبة للأستنتاجات حول متوسطي المجتمعين، متى يستخدم إحصاء T أكثر من إحصاءZ ؟ وهل من المحتمل أن نستخدم إحصاء T أكثر من إحصاء Z ؟ وضح ذلك.

(٧-٩) عند مقارنة متوسطي مجتمعين، متى يستخدم إحصاء التباين التجميعي S_p^2 ؟

(٧-١٠) ما هي قيمة التباين التجميعيS_p^2 عندما تكون أحجام العينات n_2,n_1 متساوية ؟

(٧-١١) عند حساب قيمة التباين التجميعي S_p^2 ، لماذا نستخدم صيغة المتوسط المرجح للقيم S_1^2، S_2^2أكثر مما نستخدم المتوسط البسيط لهم ؟

(٧-١٢) متى يستخدم إحصاء T للاستدلال حول متوسطي مجتمعين مستقلين ؟ وما هي الشروط الضرورية المتعلقة بالمجتمعين ؟

(٧-١٣) بفرض أننا نرغب في مقارنة متوسطي إنتاج ورديتين أخذا في الاعتبار عدد أيام الأجازة المرضية التي يقوم بها عمال كل وردية، اختيرت عينة عشوائية من عمال كل وردية حجمها 12 عامل وسجل لكل منهم عدد أيام الأجازة المرضية خلال العام الماضي وكانت البيانات مايلي:

الوردية الأولى	3	7	2	4	5	4	8	3	2	5	7	3
الوردية الثانية	5	4	7	9	6	5	3	8	10	4	8	6

(أ) ارسم تلك البيانات. هل يتضح لك وجود فرق في المتوسط بين عدد أيام الأجازة المرضية في الورديتين؟ اشرح ذلك.

(ب) اعتمادا علي الشكل البياني في (أ)، استخدم أسلوب مناسب لتحديد ما إذا كانت هذه البيانات دليلا كافيا على وجود فروق في المتوسط بين عدد أيام الأجازة المرضية في الورديتين. (ملحوظة: استخدام أسلوب القيمةP (P-Value)).

(٧-١٤) يرغب أحد المنتجين في مقارنة متوسط قوة الشد لأحد الخيوط القطنية المقترح استخدامها مع متوسط قوة الشد للخيط الشعبي الذي يستخدمه حاليا. اختيرت بطريقة عشوائية عينتين مستقلتين من النوعين حجم كل منها 25 قطعة وقيس في كل عينة قوة الشد وكانت النتائج كما يلي:

الخيط الشعبي	104	108	90	106	108	113	114	82	113	91	97	99	116
	99	101	122	100	102	127	104	103	103	94	103	102	
الخيط الجديد	127	109	113	98	98	95	86	108	100	119	109	122	96
	101	97	125	126	92	118	100	110	107	106	118	94	

(أ) ارسم هذه البيانات. هل يتضح لك أن قوة الشد للخيط الجديد تزيد عن الخيط الشعبي؟ وضح ذلك.

(ب) استخدم أسلوب القيمة P (P-Value) لتحديد ما إذا كان هناك دليلا كافيا على أن قوة الشد للخيط الجديد تزيد عن قوة الخيط الشعبي، في المتوسط.

(٧-١٥) مدير ما مسئول عن اتخاذ قرار بشأن خطة تسويقية جديدة تقضي بمنح العملاء فترة ثلاث شهور خدمة مجانية مع كل عملية شراء منتج معين. لاختبار تأثير ذلك على المبيعات، اختيرت 30 منطقة بيع بطريقة عشوائية، ونفذت الخطة الجديدة على 15 منطقة وترك الباقي وهو 15 منطقة تدار بالطريقة التقليدية وذلك بغرض المقارنة. بعد مرور ثلاثة شهور من تنفيذ الخطة الجديدة، كانت المبيعات في كل منطقة من مناطق الاختبار (بالألف دولار) على النحو التالي.

32.8, 39.9, 24.8, 25.3, 27.1, 28.4, 29.5, 41.2, 31.9, 28.7, 19.2, 26.2, 27.2, 27.6, 31.8

أما مبيعات المنطقة التي تركت تعمل بالطريقة التقليدية فكانت:

28.6, 19.9, 22.7, 24.2, 23.9, 34.7, 22.8, 29.9, 27.6, 18.4, 22.5, 19.3, 22.8, 18.7, 18.6

بإفتراض أن العينتين العشوائيتين مستقلتين وأنهما سحبتا من عمليتين لهما التوزيع الطبيعي.

(أ) ارسم بيانات العينتين. هل يبدو لك أن خطة التسويق الجديدة ذات مبيعات مرتفعة في المتوسط؟ اشرح ذلك.

(ب) إلي أي مدى تناقض هذه البيانات الادعاء بعدم وجود فرق في المبيعات بين المنطقتين مقابل أن هناك زيادة في مبيعات منطقة الاختبار؟

(٧-١٦) شركة تغذية ترغب في معرفة ما إذا كان استخدام نوع جديد من ورق السلوفان في عملية التغليف التقليدية يزيد من طول عمر بطاطس الشيبسي وتبقي طازجة. لمعرفة ذلك، اختيرت عينة من 15 عبوة مغلفة بالطريقة التقليدية وتم رقابتها فوجد أنها تظل طازجة لمدة 20.8 يوم في المتوسط بانحراف معياري2.8 يوم. في نفس الوقت اختيرت عينة أخرى من 15 عبوة مغلفة بالطريقة الجديدة وتم رقابتها فوجد أنها تظل طازجة لمدة 24.2 يوم في المتوسط بانحراف معياري2.5 يوم. مفترضا أن هذه المعلومات تعبر عن عينتين عشوائيتين مستقلتين مسحوبة من مجتمعات لها توزيع طبيعي بتباينات متساوية.

(أ) حدد فترة الثقة 95% للفرق بين متوسطي زمن الطريقتين: التقليدية والجديدة. اعتمادا على هذه الفترة، ما الذي يمكن أن تستنتجه؟

(ب) هل ترى أن هذه البيانات تعطي دليلا كافيا كي نستنتج أن طريقة التغليف الجديدة تزيد من متوسط زمن البقاء طازجا؟

(٧-١٧) موظفة في شركة ما مهتمة بتحديد أسرع وسيلة للوصول إلى عملها: ركوب القطار أم قيادة سيارتها. لاختبار ذلك، استخدمت كل وسيلة لمدة عشرة أيام، وهذه الأيام تم اختيارها بطريقة عشوائية. هذه الموظفة كانت تغادر منزلها كل يوم في نفس التوقيت وتسجل الزمن المنقضي حتى تصل إلي مقر عملها. الأزمنة عند استخدام القطار بالدقائق كانت: , 45 , 44 , 47 , 48 48 , 42 , 47 , 43 , 47 , 46 أما الأزمنة عند استخدام سيارتها فكانت بالدقائق هي:45 , 36 , 35 , 46 , 42 , 36 , 42 , 39 , 38 , 47 , مفترضا أن هذه البيانات تمثل عينات عشوائية مستقلة من مجتمعات لها توزيعات طبيعية:

(أ) ارسم هذه البيانات. هل يتضح لك أن هناك فرقا في متوسط الزمن اللازم للوصول إلى العمل؟ وضح ذلك.

(ب) هل هذه البيانات تمثل دليلا كافيا كي نستنتج أن القيادة هي الأسرع في المتوسط؟.

(جـ) هل يمكنك أن تفكر في تصميم أفضل لهذه التجربة؟ بالتحديد، كيف يمكن استخدام القطاعات لتخفيض حجم الاختلافات في هذه التجربة؟

(٧-١٨) مدير المشتريات في إحدى الشركات يرغب في مقارنة زمن التعطل عن أداء الخدمة لنوعين من ألات التصوير تستخدمها الشركة. لدى الشركة ثمان ألات من النوع Suny 1000 وعشر ألات من النوع Saban XL 100 . قام المدير بتجميع أزمنة التعطل بالساعات لكلا النوعين خلال الشهور الستة الأخيرة.

النوع	زمن التعطيل بالساعات									
Suny1000	7.2	3.6	5.5	4.6	3.7	3.1	2.6	7.2	--	--
Saban XL 100	4.4	3.3	5.6	6.1	4.2	3.6	3.4	4.2	5.0	3.0

مفترضا أن هذه العينات مستقلة ومسحوبه من توزيعات طبيعيه

(أ) ارسم هذه البيانات بيانيا. اعتمادا على الشكل البياني، هل تعتقد أن هناك فرقا في المتوسط بين زمن التعطل لكلا النوعين؟ وضح ذلك.

(ب) إلى أي مدى تناقض هذه البيانات الادعاء بعدم وجود فروق في المتوسط بين أزمنة التعطل في مقابل وجود فروق ؟

(٧-١٩) يتطلب أحد المصانع الكبرى أن يكون العاملين الجدد متدربين تدريبا حديثا على عملية التجميع لمنتج معين قبل أن يسند لهم مسئولية خط التجميع. 16 من العاملين الجدد تم تقسيمهم

عشوائيا إلى مجموعتين، المجموعة الأولى من ثمان عمال خضعوا لطريقة التدريب التقليدية بينما المجموعة الأخرى خضعت للتدريب الحديث وفي نهاية فترة التدريب، سجلت أزمنة التجميع بالدقائق للمجموعتين على النحو التالي:

الطريقة التقليدية	42	38	41	37	43	44	45	36
الطريقة الحديثة	34	35	35	36	39	37	38	34

مفترضا أن هذه العينات مستقلة ومسحوبة من توزيعات طبيعية.

(أ) ارسم هذه البيانات بيانيا. هل يتضح لك أن متوسط زمن التجميع للطريقة الحديثة أقل من الطريقة التقليدية؟ وضح ذلك.

(ب) إلى أي مدى تكون هذه البيانات مناقضة للادعاء القائل بعدم وجود فروق بين الطريقتين مقابل الفرض بوجود زمن أقل مع الطريقة الحديثة؟

(جـ) بالنسبة لـ 16 عامل، هل من الممكن أن نستخدم معهم أسلوب القراءات المزدوجة بغرض المقارنة بين الطريقتين؟ وضح ذلك.

(٧-٢٠) عند إنتاج المصابيح الكهربائية، يتكسر عدد كبير من المصابيح. يخطط مدير الإنتاج لاستخدام نوع حديث من نظام النقل الآلي آملا أن ينخفض معدل الفقد في المصابيح يوميا. قام مدير الإنتاج بتسجيل معدلات الفقد اليومية ولمدة عشر أيام في ظل نظام النقل القديم ثم في ظل نظام النقل الآلي الحديث لمدة عشرة أيام تالية وكانت كالآتي:

نظام النقل	معدلات الفقد اليومية									
القديم	8.7	11.1	4.4	3.7	9.2	6.6	7.8	4.9	6.9	8.3
الحديث	7.8	6.2	3.2	4.6	5.3	6.5	4.6	7.1	4.9	7.2

مفترضا أن تلك العينات مستقلة ومن مجتمعات ذات توزيعات طبيعية.

أجب عن الأسئلة المشابهة لكل من (أ)، (ب)، (جـ) من تمرين (٧-١٩).

(٧-٤) الاستنتاج الإحصائي المتعلق بمتوسطين اعتمادا على القراءات المزدوجة:

Statistical Inferences for Two Means Based on Paired Samples

دعنا نرجع إلى مشكلة التسعير التي قدمت في بداية الجزء (٧-٢) حيث كان مدير خدمات التسعير يرغب في مقارنة التسعير الذي قام به اثنين من المثمنين. نتذكر أن السبب في ازدواجية الأصول كان لعزل الاختلافات التي قد تحدث بين الأصول ونمنع الأختلاف في قيم الأصول من أن يجعل المقارنة بين متوسطات العينات غير واضحة. طبقا للخطة الموضحة في الشكل(٧-٢) ، فإن التسعير (بالألف دولار) للأصول الخمسة والتي قدمها كل من المثمن الأول والثاني كانت على النحو التالي:

الأصل	المثمن الأول	المثمن الثاني	الفرق
1	90	93	-3
2	94	96	-2
3	91	92	-1

4	85	88	-3
5	88	90	-2
المتوسطات	89.6	91.8	-2.2
الانحرفات المعيارية	3.3615	3.0332	.83666

تريث قليلا وتفحص البيانات قبل متابعة القراءة. هل تعتقد أن البيانات تشير إلى فروق بين الثمنين؟ بكل تأكيد أنت تعلم ماذا تعنيه هذه البيانات، وهذا أمر هام لأنه يوضح ميزة محددة من استخدام المقارنات المزدوجة بدلا من العينات المستقلة.

فحص هذه البيانات يظهر أنه على الرغم من أن الفروق بين التسعير ليست كبيرة، إلا أن تسعير الثمن الأول أقل إتساقا من تسعير الثمن الثاني. لذلك، ربما نخمن بأن التحليل الإحصائي قد يشير إلى اختلاف متوسطي التسعير. لاحظ أن هذه النتيجة نصل إليها عن طريق ازدواج البيانات. لاحظ أيضا أنه في حالة استخدام عينتين مستقليتين، فإن فرصة ظهور هذا النوع من المقارنة بين المثمنين تكون غير ممكنة.

هذا التحليل يقوم على الفروق بين القراءات المزدوجة لكلا المثمنين. في الأساس، فنحن لدينا عينة من خمسة فروق مسحوبة من مجتمع يمثل فروق لكل الأصول الممكنة في المجتمع. وهكذا فإن تحليل المقارنات المزدوجة ينخفض إلى تحليل عينة واحدة تهتم بمتوسط الفروق بين الثمنين.

نفرض أن μ_D ترمز إلى متوسط مجتمع الفروق لكل الأصول الممكنة. نحن نبحث عن أفضل إحصاء للاستدلال به عن μ_D وعن توزيع المعاينة لهذا الإحصاء. بالطبع يجب ألا نندهش إذا علمت أن أفضل إحصاء لـ μ_D هو $\overline{D}$ ، أي متوسط فروق العينة.

(٧-٤-١) المتوسط والخطأ المعياري لـ $\overline{D}$: The Mean and the Standard Error of $\overline{D}$

من المعلوم أن أفضل إحصاء لـ μ_D هو المقدار غير المتحيز للمؤشر μ_D أي :

$$E(\overline{D}) = \mu_D \qquad (7.15)$$

بفرض أن σ_D^2 هو تباين الفروق في المجتمع. في واقع الأمر وكما في كل الحالات، فنحن لا نعلم قيمة σ_D^2 . المقدر غير المتحيز للمؤشر σ_D^2 هو تباين فروق العينة S_D^2 . لاحظ أن تباين فروق العينة S_D^2 لبيانات التسعير يمكن حسابه كالآتي:

$$S_D^2 = \frac{(-3+2.2)^2 + (-2+2.2)^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (-2+2.2)^2}{5-1} = .7$$

وبالتالي فإن الانحراف المعياري للفروق يكون: $S_D = \sqrt{.7} = .83666$ وحيث أن الإحصاء $\overline{D}$ هو متوسط، فإن الخطأ المعياري للإحصاء $\overline{D}$ يقدر كما يلي:

$$SE(\overline{D}) = \frac{S_D}{\sqrt{n}} \qquad (7.16)$$

حيث n هي عدد أزواج القراءات (بمعنى n=5 أصول في مشكلة التسعير). لذا فإن تقدير الخطأ المعياري للإحصاء $\overline{D}$ هو :

$$SE(\overline{D}) = \frac{.83666}{\sqrt{5}} = .37417$$

(٧-٤-٢) توزيع المعاينة لـ $\overline{D}$: The Sampling Distribution of $\overline{D}$

حيث أن الأنحراف المعياري للفروق في المجتمع غير معلوم ، فإننا نتوقع طبقا للمناقشات السابقة ، ان الأستنتاج الأحصائي حول μ_D إعتماداً على $\overline{D}$ يجب أن يتضمن توزيع T بدلا من التوزيع الطبيعي المعياري . بأسلوب مماثل لـ $\overline{X}$ ، فإن معايرة الأحصاء $\overline{D}$ تؤدى إلى الأحصاء T:

$$T = \frac{\overline{D} - \mu_D}{S_D / \sqrt{n}} \tag{7.17}$$

وهو إحصاء له تقريباً توزيع T بدرجات حرية (n-1)، تذكر أن n تمثل عدد الفروق أي عدد القراءات المزدوجة. وعلى ذلك ، فالأستنتاج المتعلق بمتوسطي مجتمعين عندما تكون العينات في صورة قراءات مزدوجة، يؤدي عن طريق فروق الأزواج المتناظره باعتبارها عينه عشوائية واحدة ثم تطبيق الطرق التي تعرضنا لها في الجزء (٦-٤).

(٧-٤-٣) فترة الثقة وإختبارات الفروض لـμ_D:
Confidence Intervals and Hypothesis Testing for μ_D

من المناقشة السابقة ، يمكن أن نتوصل إلى أن الاستنتاج الإحصائي المتعلق بمتوسطي مجتمعين يؤدي بمعالجة فروق القراءات المزدوجة للعينتين على أنها عينة عشوائية واحدة ثم استخدام الإحصاء T- الصيغة (7.17)- وفق الطرق في الجزء (٦-٤).

فترة الثقة لـμ_D:

تأثيثا على المناقشة التي تمت في الجزء(٦-٤) وخاصة في البند (٦-٤-٣)، فإن فترة الثقة: 100(1-α)% للمؤشر μ_D يكون :

$$\overline{D} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{S_D}{\sqrt{n}} \tag{7.18}$$

حيث هامش خطأ المعاينة:

$$\text{Margin of Sampling Error} = t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{S_D}{\sqrt{n}} \tag{7.19}$$

أما $t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$ فهي قيمة T الجزئية بدرجات حرية (n-1).

للتوضيح ، نفرض أننا نرغب في تحديد فترة ثقة95% لمتوسط الفروق في مثال التسعير. حددنا من قبل: $\overline{D}$ =-2.2 ، S_D=.83666 . عند مستوى ثقة 95% ، فإننا نركز في المنتصف 95. من المساحة لتوزيع T بدرجات حرية 4=1-5 وهذا يعني أننا نترك مساحات 025. في كل جانب من التوزيع ، وعندها نجد أن القيمة الجزئية تكون: $t_{.975,4}$ =2.776 وبالتالي نجد أن فترة الثقة 95% تصبح :

$$-2.2 \pm (2.776)\left(\frac{.83666}{\sqrt{5}}\right) = -2.2 \mp 1.04 = -3.24 \text{ to } -1.16$$

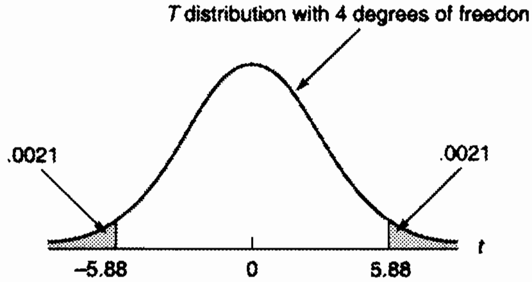
اختبارات الفروض لـμ_D : Hypothesis Testing for μ_D

يلاحظ أن فترة الثقة 95% أي (-3.24 to -1.16) للمؤشر μ_D في مثال التسعير لا تحتوي على الصفر ، لذلك فالفرض العدمي $H_o : \mu_D = 0$ يتناقض مع نواتج العينة ، وأن الادعاء بعدم وجود فرق بين تسعير الثمنين غير مقبول.

نفس النتيجة نصل إليها باستخدام القيمة P (P-Value) ، ففي المثال الحالي ، نجد أن قيمة الإحصاء T (صيغة (7.17)) هي:

$$T = \frac{-2.2 - 0}{.8366 \ / \ \sqrt{5}} = -5.88$$

القيمة P هي احتمال أن الإحصاء T سوف يعطي أقل قيمة من 5.88- أو أكبر من 5.88+. أحتمال أن قيمة T تكون أكثر تطرفاً عن 5.88 في أي من الاتجاهين تحددت بواسطة الحاسب الآلي لتكون 0042. وهذا الاحتمال موضح في شكل (٧-٥). إذا لم يكن لديك حاسب آلي، فيمكن استخدام قيمة تقريبية لـP من الجدول C. من هذا الجدول ومن السطر الذي به 4 درجات حرية، نجد أن القيم 4.604,-7.173- تحصران القيمة T= -5.88. يلاحظ أن المساحة على يسار7.173- هي 001. والمساحة على يسار 4.604- هي 005. . وبالتالي المساحة على يسار T= -5.88 تقع بين 001. ، 005. وحيث أن الفرض البديل من طرفين فإن قيمة P تقع بين 01,.002 (ضعف المدى من 001. إلى 005.). وبسبب أن قيمة P صغيرة جدا، فإن بيانات العينة تناقض ادعاء الفرض العدمي وتدعم الفرض البديل. لذلك فمن الواضح أن كلا المثمنين لا يمكن أن يكونا متشابهين في عملية التسعير التي قاما بها.



شكل (٧-٥): القيمة P في مثال التسعير

استخدام الحاسب الآلي: Using the Computer

مع المثال التالي نوضح استخدام برنامج Minitab في حالة عينات القراءات المزدوجة.

مثال (٧-٨)

مدير أحد المراكز الصحية كلف بتحسين صحة العاملين به. أحد المجالات المتاحة أمامه هي تخفيض ضغط الدم للعاملين خاصة اللذين يتعرضوا لضغوط قاسية. اقترح المدير برنامجا لتخفيض ضغط الدم الانقباضي. تم اختيار عشرة من الموظفين من ذوي ضغط الدم المرتفع وتم قياس ضغط الدم قبل وبعد الاشتراك في برنامج تخفيض الضغط وكانت:

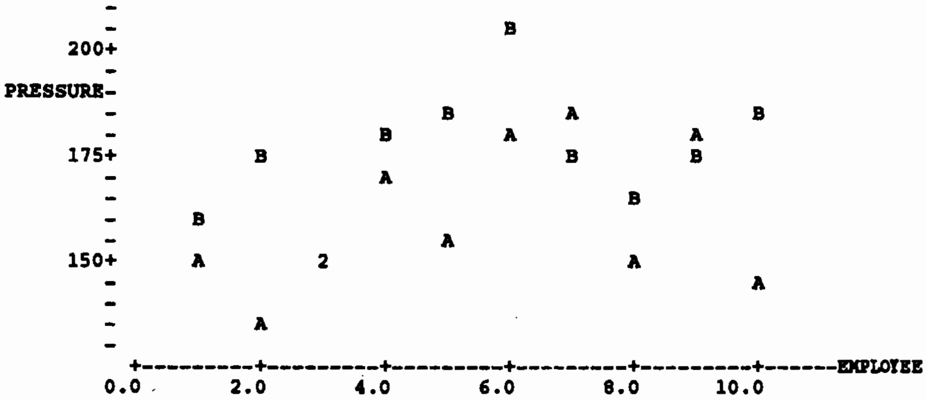
الموظف	ضغط الدم الانقباضي قبل	بعد
1	158	148
2	176	133
3	150	152
4	179	170
5	183	155
6	206	178
7	177	185
8	165	151
9	175	180
10	186	144

هل بيانات تلك العينة تناقض الادعاء بأن برنامج تخفيض الضغط لم يخفض ضغط الدم الانقباضي؟

الحل

حيث أن ضغط الدم تم قياسه قبل وبعد برنامج تخفيض الضغط لكل موظف في العينة، فهذا يعني أننا أمام تصميم عينات القراءات المزدوجة. وبسبب اعتقادنا بوجود فروق ذات قيمة في ضغط الدم الانقباضي بين الموظفين، فإننا نرغب في تجنيب هذه الفروق حتى نتمكن بدقة من تحديد فاعلية برنامج تخفيض ضغط الدم.

الكثير من المعلومات يمكن تحقيقها برسم بيانات العينة بيانيا. في شكل (٧-٦) يخصص المحور الأفقي للموظفين العشرة، والمحور الرأسي لضغط الدم الانقباضي والرموز B,A تدل على ضغط الدم قبل وبعد على التوالي.



شكل(٧-٦): تمثيل ضغط الدم بيانيا بالمثال(٧-٨)

من هذا الشكل يلاحظ أن معظم قياسات ضغط الدم قبل أعلى من بعد، وبالتالي فإن برنامج تخفيض الضغط يبدو أنه ذو فائدة ومنفعة. من ناحية أخرى، بإيجاد الفروق عن طريق طرح الضغط بعد من الضغط قبل لكل موظف، فإذا كان هناك انخفاضا في قياس الضغط الانقباضي كنتيجة لبرنامج تخفيض الضغط، فإن متوسط الفروق خلال العينة كلها يجب أن يكون أكبر من الصفر. وبالتالي فإننا نضع الفروض على الصورة: $H_o : \mu_D = 0$ مقابل $H_a : \mu_D > 0$.

من برنامج Minitab نحصل على المخرجات التالية:

```
TEST OF MU=0.000 VS MU G.T 0.000

         N       MEAN      STDEV     SE.MEAN          T         P.VALUE
C6       10      15.900    18.628    5.891            2.70      0.012

         N       MEAN      STDEV     SE.MEAN    95.0  PERCENT   C.I.
C6       10      15,90     18.63     5.89    (    2.57,         29.23)
```

يلاحظ أن القيمة P عند الفرض البديل من طرف واحد هي قيمة صغيرة (.012). بالإضافة إلى ذلك فإن فترة الثقة95% للمؤشر μ_D (2.57,29.23) لا تحتوي على الصفر، لذا فإن بيانات العينة لا

تؤيد ادعاء الفرض العدمي القائل بأن برنامج تخفيض الضغط غير مفيد. وعلى ذلك فهناك سببا للاعتقاد في منفعة برنامج تخفيض الضغط.

(٧-٤-٤) فرض تحليل T للقراءات المزدوجة وأهميته:
The Assumption of the Paired T Analysis and its Importance

كما وضحنا من قبل، يشتمل تحليل العينات ذات القراءات المزدوجة على عينة واحدة، أي عينة من الفروق الناتجة من ازدواج القراءات. الفرض أننا نجري المعاينة من مجتمع توزيعه هو الطبيعي، وهو نفس الفرض الذي تطلبه استخدام T عند الاستدلال عن مجتمع واحد، انظر الجزء (٥-٥-٤). التغير الوحيد هنا ان هذا الفرض يطبق على مجتمع الفروق الناتجة من إزدواج القراءات. ولكن كنا قد ذكرنا أن توزيع T غير حساس لسقوط فرض الإعتدالية طالما أن حجم العينة (أي عدد الفروق) كبيرا إلى حد ما. وهكذا- وكما في الجزء(٧-٣) - فإن إجراءات الإستدلال التي قدمت في هذا الفصل تعتبر متحققة بصفة عامة لكل أحجام العينات باستثناء العينات الصغيرة جدا. ايضا هي متحققة حتى لأحجام العينات الصغيرة إذا كانت المجتمعات قريبة جدا من التوزيع الطبيعي.

تمارين:

(٧-٢١) يرغب مدير المبيعات لسلسلة من محلات التجزئة في مقارنة المبيعات المفضلة في القسم النسائي في فرعين أساسيين. احد محللي البيانات قام بجمع المبيعات الشهرية التالية (بالألف دولار) في ذلك الفرعين:

الشهر	الفرع الشمالي	الفرع الجنوبي
يناير	35	28
فبراير	22	29
مارس	39	33
أبريل	44	44
مايو	41	38
يونيو	49	47
المتوسط	39.5	35.3

(أ) أفحص بيانات العينة بدون عمل أي تحليل رسمي. هل تعتقد أن هذه البيانات تدل وبوضوح على إختلاف مستوى متوسط المبيعات في كلا الفرعين؟ ولماذا؟

(ب) أرسم هذه البيانات. هل تفسيرك للشكل البياني متفق مع إجابتك في (أ)؟

(ج) حدد فترة الثقة 95% للفرق بين متوسطي مبيعات الفرعين.

(د) إعتماداً على فترة الثقة السابقة، هل متوسط مبيعات الفرعين مختلفة؟ وضح ذلك.

(هـ) في إجابتك عن (ج) لماذا يكون ضرورياً أن تكون الشهور في شكل قطاعات.

(و) بفرض أن مستويات المبيعات المسجلة في الفرعين أعتبرا كأنهم عينتين مستقلتين من مجتمعات طبيعية ذات تباينات متساوية. (هذا فرض أكاديمي بحت، فالعينات ليست مستقلة بسبب إستخدام القطاعات). أجب عن (د) بفرض إستقلال العينات ثم إشرح لماذا تختلف الإجابة هنا.

(٧-٢٢) نظم إسترجاع الوثائق هو أحد برامج الكومبيوتر التي تستخدم للتعرف على المقالات، الكتب ومصادر أخرى للمعرفة. يرغب المدير الفني للمكتبة في مقارنة نظامين (A,B) من نظم إسترجاع الوثائق مؤهلين للإستخدام. إستخدم كل نظام للتعرف على مدى إمكانية إسترجاع المقالات في إختبار على عشر طلبات. الإستجابة لهذه الطلبات قيمت بمعيارين، الأول: عدد الوثائق التي وجدت ووثيقة الصلة بالموضوع (الأكثر هو الأفضل)، الثاني: عدد الوثائق التي وجدت وغير وثيقة الصلة بالموضوع (الأقل هو الأفضل). وكانت النتائج كما يلي:

	وثيقة الصلة بالموضوع وثائق وجدت		غير وثيقة الصلة بالموضوع وثائق وجدت	
الطلب	النظام A	النظام B	النظام A	النظام B
1	8	11	12	16
2	5	8	7	9
3	11	16	5	2
4	22	29	16	20
5	14	12	11	17
6	10	15	7	13
7	12	11	14	13
8	15	22	13	13
9	6	11	8	11
10	18	27	5	16

(أ) لماذا تكون هناك حاجة لإستخدام القطاعات فيما يتعلق بالطلبات؟

(ب) حدد فترة الثقة 98% للفرق بين متوسطي عدد الوثائق المتصلة بالموضوع والتي تم التعرف عليها من كلا النظامين. هل هذه الفترة تظهر فرقاً بين متوسطي النظامين؟ وضح ذلك.

(ج) أجب عن (ب) أخذاً في الإعتبار الوثائق غير وثيقة الصلة بالموضوع.

(د) إعتماداً على إجابتك في (ب)، (ج)، حدد أي النظامين يجب على مدير المكتب أن يختاره؟ ما هي الإعتبارات غير الاحصائية التي يجب على الإدارة أن تتنبه لها قبل قرار الإختيار؟

(٧-٢٣) مصنع لوفورد ينتج أكياس المخدات مع الحشو اللازم لها. عملية تنجيد المخدات مرهقة يدوياً وهناك أثنين من العمال المتدربين يتوقع أن ينتجا في المتوسط نفس العدد من المنتج النهائي في فترة معينة. فيما يلي عدد وحدات المنتج النهائي (المخدة) المنتجة يومياً لكلا العاملين خلال أسبوع واحد.

اليوم	العامل الأول	العامل الثاني
الإثنين	108	110
الثلاثاء	115	118
الأربعاء	118	120
الخميس	116	117
الجمعة	110	113

(أ) أرسم هذه البيانات بيانياً. هل الشكل البياني يدعم الإعتقاد بأن العامل الثاني ذو أداء أفضل في المتوسط؟

(ب) لماذا يكون هناك حاجة لوضع الأيام في قطاعات؟ إشرح ذلك.

(ج) إلى أي مدى تكون هذه العينة مدعمة للإعتقاد بأن العامل الثاني ينتج أكثر في المتوسط؟ إشرح ذلك.

(د) بفرض أن هذه البيانات تعبر عن عينات مستقلة من مجتمعات طبيعية، بتباينات متساوية. (هذا فرض أكاديمي بحت، فالعينات غير مستقلة بسبب القطاعات التي استخدمت)، هل إجابتك في (ج) تختلف الآن؟ وضح ذلك.

(٧-٢٤) عين مدير مكتب مستشارا له لكي يقيم نظام كمبوتر جديد مقترح. إذا أقر المستشار بأن النظام الجديد يستخدم زمن تشغيل أقل من النظام الحالي، فسوف يعمل به. أختار المستشار عينة من ثمان وظائف تعبر عن عمل المكتب وتم تشغيلها على كلا النظامين. أزمنة التشغيل (بالثوان) كانت على النحو التالي:

الوظيفة	نظام الكومبيوتر القديم	نظام الكومبيوتر الجديد
1	7	5
2	8	7
3	11	8
4	8	7
5	14	11
6	15	10
7	6	9
8	10	6

(أ) أرسم هذه البيانات. ما هي النتيجة المبدئية التي تتوصل إليها؟

(ب) حدد فترة الثقة 95% للفرق بين متوسطي زمن التشغيل القديم والجديد.

(ج) ما الذي تظهره فترة الثقة في (ب) حول مدى قبول رأي المستشار بأن النظام الجديد يحسن من متوسط زمن التشغيل؟

(د) إلى أي مدى تناقض هذه البيانات الإدعاء بعدم وجود تحسن في متوسط زمن التشغيل في مقابل أن هناك تحسن مع النظام الجديد؟

(هـ) لماذا يكون من الضروري وضع الوظائف في قطاعات.

(٧-٢٥) اختبر نظاما للتنبؤ بالمبيعات على النحو التالي: سجلت المبيعات المتنبأ بها للعام الحالي لخمس منتجات وذلك بإستخدام بيانات العام الماضي. فيما يلي المبيعات الفعلية والمبيعات المتنبأ بها للعام الحالي (بالألف دولار) للمنتجات الخمس:

المنتج	الفعلي	المتنبأ به
1	185	110
2	75	55
3	168	230
4	17	22
5	311	314

(أ) أرسم هذه البيانات بيانياً. ما هي النتيجة المبدئية التي تتوصل إليها؟

(ب) إستخدم فترة الثقة 95% لتحديد ما إذا كان هناك فرقاً بين متوسط المبيعات الفعلية ومتوسط المبيعات المتنبأ بها.

(ج) لماذا تكون هناك حاجة إلى وضع المنتجات في قطاعات؟

(٧-٢٦) اختيرت عينة عشوائية من عشرة أعضاء من هيئة التدريس بكلية التجارة، وطلب منهم ترتيب الأداء بصفة عامة لإثنين من المديرين على مقياس يتدرج من 1 (أصغر ترتيب) إلى 5، وكانت التراتيب التي وضعوها كما يلي:

عضو الهيئة:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ترتيب دكتور/وليام:	3.7	4.1	4.2	3.8	3.1	3.6	3.9	4.4	2.9	4.0
ترتيب دكتور/نوكس:	3.9	4.3	3.4	3.9	3.4	3.5	3.9	4.6	3.1	4.4

أراد عميد الكلية أن يستخدم هذه المعلومات في تقييم الأداء لكل من الدكتور وليام والدكتور نوكس.

(أ) اعرض هذه البيانات بيانياً. ما هي النتيجة المبدئية التي تتوصل إليها.

(ب) استخدم فترة الثقة 95% لتحديد ما إذا كانت هذه البيانات تكشف عن إختلاف واضح بين متوسط معدل الأداء من وجهة نظر الكلية.

(ج) إلى أي مدى تدعم هذه البيانات الرأي بوجود فروق بين متوسط الأداء؟

(د) هل كان من المهم أن تستخدم القطاعات في تصميم التجربة؟ وضح سبب الإجابة بنعم أو لا؟

(٧-٥) الإستنتاج الإحصائي المتعلق بنسبتين إعتماداً على عينات مستقلة:
Statistical Inferences for Two Proportions Based on Independent Samples

في الجزء (٦-٥) ناقشنا خطوات عمل إستنتاجات حول النسبة في المجتمع π. ونحن غالباً ما نهتم بالمقارنة بين نسبتي صفة معينة بين مجموعتين متمايزتين. فمثلا، ربما نهتم بمقارنة نسبتي المعيب لمنتج معين أنتج في مصنعين متنافسين، أو قد نهتم بمقارنة نسب خريجي المدرسة الثانوية في منطقتين جغرافيتين والذين إلتحقوا بالجامعة. بالتالي، فنحن في حاجة إلى توسيع الطرق التي قدمت في الجزء (٦-٥) وذلك للمقارنة بين النسب المعلمية π_2, π_1.

نفرض أن مدير الحسابات يرغب في مقارنة نسب الفواتير الخطأ بين منطقتين أو فرعين للشركة. أكثر تحديداً، فهو يهتم بتحديد ما إذا كان هناك أي إختلاف بين π_1: نسبة الفواتير الخطأ في الفرع الأول و π_2: نسبة الفواتير الخطأ في الفرع الثاني. وكما في حالة مقارنة متوسطي مجتمعين، يكون من الأفضل إعتبار المعلمة التي نهتم بها هي الفرق بين π_2, π_1 أي $(\pi_1-\pi_2)$. إذا كان هذا الفرق يساوي

صفر، فإن π_1 تساوي π_2. الأن، ما هو أفضل إحصاء يمكن أن نفكر فيه للإستدلال حول $(\pi_1-\pi_2)$؟ أنه بالطبع، الفرق بين نسبتي عينيتين (P_1-P_2)، حيث P_1 هي أفضل إحصاء لـ π_1، P_2 هي أفضل إحصاء لـ π_2.

في هذا الفصل نناقش خطوات الإستنتاج المتعلقة بالفرق $(\pi_1-\pi_2)$ إعتماداً على أفضل إحصاء (P_1-P_2). والأسلوب المتبع هنا مماثل لأسلوب الإستنتاج حول النسبة π إعتماداً على النسبة في العينة P. لذلك، فإننا نبدأ بالتعرف على المتوسط، الخطأ المعياري وتوزيع المعاينة للإحصاء (P_1-P_2). الخطوات اللازمة لفترات الثقة وإختبارات الفروض تعتمد على التوزيع الطبيعي المعياري، مثلما كان الأمر في حالة مجتمع واحد والذي نوقش في الجزء (٦-٥).

(٧-٥-١) المتوسط والخطأ المعياري لـ P_1-P_2: The Mean and Standard Error of P_1-P_2

دعنا نرجع إلى المثال الذي يتضمن الفواتير الخطأ في فرعين للشركة. نفرض أننا سحبنا عشوائياً عينتين مستقلتين: n_1 من حسابات الفرع الأول، n_2 من حسابات الفرع الثاني، وبحثنا عن عدد الحسابات التي بها فواتير خطأ فكانت X_1، X_2 على التوالي. من المعلوم أن نسب العينات $P_1=X_1/n_1$ ، $P_2=X_2/n_2$ هي إحصاءات غير متحيزة وأن الخطأ المعياري لها هو:

$$SE(P_1)=\sqrt{\pi_1(1-\pi_1)/n_1} \qquad SE(P_2)=\sqrt{\pi_2(1-\pi_2)/n_2}$$

على التوالي. وحيث أن الأحصاء (P_1-P_2) هو الفرق بين إحصاءات مفردة P_1 ، P_2، فإنه يمكن إستخدام ما جاء بالفصل (٣-٩) (انظر الصيغ (3.20) ، (3.21)) لإثبات أن (P_1-P_2) هو مقدر غير متحيز للمعلمة $\pi_1-\pi_2$، أي:

$$E(P_1-P_2)=\pi_1-\pi_2 \tag{7.20}$$

أكثر من هذا، فإن تباينه هو مجموع تباينات P_1، P_2.

$$Var(P_1-P_2)=\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1}+\frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2} \tag{7.21}$$

لذا فإن (P_1-P_2) هو إحصاء غير متحيز له خطأ معياري على الصورة:

$$SE(P_1-P_2)=\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1}+\frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}} \tag{7.22}$$

يلاحظ على الصيغة (7.22) أن الخطأ المعياري لـ P_1-P_2 لا يمكن تحديده، حيث أن π_1, π_2 هي مجاهيل. (إذا كانت معلومة فإننا لن نكون بحاجة إلى إجراء دراسة) عملياً، نقوم بإحلال النسب في العينات P_1, P_2 محل المعالم المجهولة π_1, π_2 وذلك لتقدير $SE(P_1-P_2)$ وهكذا يكون تقدير الخطأ المعياري للإحصاء P_1-P_2 هو:

$$SE(P_1-P_2)=\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1}+\frac{P_2(1-P_2)}{n_2}} \tag{7.23}$$

يلاحظ أن هناك خطأ ضئيل يظهر عند إستبدال π_1, π_2 بالتقديرات P_1, P_2 والسبب في ذلك أن أي خطأ يحدث من إستخدام القيمة P_1 كتقدير لـ π_1 يتم تعويضه بخطأ في الإتجاه المعاكس عند إستخدام $(1-P_1)$ كتقدير $(1-\pi_1)$ ونفس الوضع يتحقق لكل من P_2، π_2.

(٧-٥-٢) توزيع المعاينة لـ P_1-P_2: The Sampling Distribution of P_1-P_2

من مناقشة البند(٥-٦) نتذكر ان توزيع المعاينة للنسبة في العينة، هو توزيع قريب من التوزيع الطبيعي في حالة العينات الكبيرة، وحيث أن الإحصاء P_1-P_2 هو ببساطة الفرق بين نسبتي عينتين، ينتج عن هذا ان توزيع المعاينة للإحصاء P_1-P_2 يقترب بشدة من التوزيع الطبيعي في حالة العينات كبيرة الحجم*. متوسطه والخطأ المعياري موضح بالصيغ(7.20),(7.23). لذلك نجد أن الأحصاء P_1-P_2 يمكن تحويله إلى الإحصاء Z كما يلي:

$$Z=\frac{(P_1-P_2)-(\pi_1-\pi_2)}{\sqrt{\dfrac{P_1(1-P_1)}{n_1}+\dfrac{P_2(1-P_2)}{n_2}}} \tag{7.24}$$

حيث ان توزيع المعاينة للإحصاء Z يقترب بشدة من التوزيع الطبيعي المعياري، فإن الإستنتاج الأحصائي حول (π_1-π_2) يعتمد على التوزيع الطبيعي المعياري.

(٧-٥-٣) فترة الثقة واختبارات الفروض حول (π_1-π_2):
Confidence Intervals and Hypothesis Testing for π_1-π_2

حيث ان توزيع المعاينة للإحصاء Z يقترب بشدة من التوزيع الطبيعي المعياري في حالة العينات كبيرة الحجم، فإن اجراءات إعداد فترات الثقة وإختبارات الفروض المتعلقة بالفرق (π_1-π_2) هي نفس الإجراءات التي وضحت في الجزء (٥-٦).

فترة الثقة لـ π_1-π_2 :

فترة الثقة $100(1-\alpha)$ % تقريبا للفرق π_1-π_2 هي :

$$(P_1\text{-}P_2) \pm Z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1}+\frac{P_2(1-P_2)}{n_2}} \tag{7.25}$$

حيث هامش خطأ المعاينة:

$$\text{Margin of sampling error} = Z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1}+\frac{P_2(1-P_2)}{n_2}} \tag{7.26}$$

وللتوضيح، دعنا نعود إلى مثال مدير الحسابات، لنفرض أنه عاين $n_1=400$ فاتورة من الفرع الأول، $n_2=400$ فاتورة من الفرع الثاني ووجد أنها تحتوي $X_1=30, X_2=10$ فواتير خطأ. من هذه العينات نجد أن بها النسب $P_1=30/400=.075$,$P_2=10/400=0.025$. وبالتالي فإن فترة الثقة 95% تقريبا للفرق π_1-π_2 أي الفرق بين نسب الفواتير الخطأ بين الفرع الأول والفرع الثاني تكون :

$$(.075\text{-}.025) \pm 1.96\sqrt{\frac{(.075)(1-.075)}{400}+\frac{(.025)(1-.025)}{400}}$$

$$= .05 \pm .03 = .02 \text{ to } .08$$

بناء على النتائج السابقة، هل ترى أن هناك فرقا بين نسب الفواتير الخطأ في هذين الفرعين؟ الإجابة نعم، الآن فترة الثقة .02 to .08 . لا تتضمن الصفر. ومن الواضح أن نسبة الفواتير الخطأ في الفرع الأول أعلى من النسبة في الفرع الثاني (لاحظ أن فترة الثقة تقع كاملا على يمين الصفر).

* القاعدة الملائمة للتقريب أن كل من العدد المتوقع لحالات النجاح والعدد المتوقع لحالات الفشل يجب أن يكون على الأقل خمسة أى: $n_1\pi_1 \ge 5,\ n_1(1-\pi_1)\ge 5,\ n_2\pi_2 \ge 5,\ n_2(1-\pi_2)\ge 5$

أختبارات الفروض المتعلقة بالفرق $\pi_1-\pi_2$:

بفرض أن مدير الحسابات يرغب في إختبار الأدعاء بعدم وجود فرق بين نسب الفواتير الخطأ في الفرعين، أي يرغب في إختبار الفرض العدمي:

$$H_o : \pi_1 - \pi_2 = 0$$

مقابل الفرض البديل :

$$H_a : \pi_1 - \pi_2 \neq 0$$

بالطبع، نحن لدينا فكرة جيدة عن هذا الإختبار، حيث أن فترة الثقة من 02. إلى08. لا تحتوي على "$\pi_1-\pi_2=0$".

من ناحية أخرى، نفس النتيجة يمكن الحصول عليها عن طريق اسلوب القيمة P. يلاحظ أنه اذا كان الفرض العدمي صحيحا، فإن $\pi_1=\pi_2$، دعنا نستخدم الرمز π ليمثل نسبة مشتركة بينهما ولكنها قيمة مجهولة. بمعنى آخر: $\pi = \pi_1 = \pi_2$ إذا كان الفرض العدمي صحيحا. في هذا الأسلوب، نقوم بتجميع المعلومات من العينتين المستقلتين لتقدير π، مثلما جمعنا معلومات من العينة لتقدير التباين المشترك σ^2 في الجزء (٧-٣-٣). ينشأ عن عملية التجميع هذه تناقض ضئيل جدا بين فترة الثقة واسلوب القيمة P لأختبار الفرض العدمي بعدم وجود فرق بين π_1,π_2.

عندما تكون $\pi_1 = \pi_2$، فإن الخطأ المعياري للأحصاء P_1-P_2 والموضح بالصيغة (7.22) يصبح :

$$SE(P_1 - P_2) = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n_1} + \frac{\pi(1-\pi)}{n_2}} = \sqrt{\pi(1-\pi)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} \qquad (7.27)$$

دعنا نستخدم الرمز P كمقدر تجميعي لـ π **Pooled estimator**. نسبة العينة التجميعية P هي متوسط مرجح لنسب العينات P_2,P_1 حيث الترجيحات هنا تتناسب مع أحجام العينات. وعلى ذلك يعرف المقدر P على النحو التالي:

$$P = \frac{n_1 P_1 + n_2 P_2}{n_1 + n_2} \qquad (7.28)$$

أو بصيغة مماثلة :

$$P = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2} \qquad (7.29)$$

والصيغة (7.29) تعني ببساطة أن النسبه التجميعية P عبارة عن مجموع حالات النجاح في كلا العينتين مقسوما على مجموع حجمي العينتين. عندما يكون $H_o : \pi_1-\pi_2 = 0$ صحيحا، فإن تقدير الخطأ المعياري للأحصاء P_1-P_2 نحصل عليه بأحلال التقدير التجميعي P محل π في الصيغة (7.27)أي:

$$SE(P_1 - P_2) = \sqrt{P(1-p)(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})} \qquad (7.30)$$

من المناقشة السابقة نجد أن الإحصاء:

$$Z = \frac{(P_1 - P_2) - 0}{\sqrt{P(1-P)(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} \qquad (7.31)$$

يقترب بشدة من التوزيع الطبيعي المعياري.

دعنا الآن نقيم ادعاء مدير الحسابات مستخدمين أسلوب القيمة P (P-Value). حيث أن :

$n_1=n_2=400$, $X_1=30$, $X_2=10$ فإن قيمة النسبة التجميعية تكون :

$$P=\frac{30+10}{400+400}=.05$$

مفترضين أن $H_0: \pi_1-\pi_2=0$ صحيحا، فإن تقدير الخطأ المعياري للإحصاء P_1-P_2 من الصيغة (7.30) يكون:

$$SE(P_1-P_2)=\sqrt{(.05)(1-.05)(\frac{1}{400}+\frac{1}{400})}=.015411$$

وهكذا تصبح قيمة الإحصاء Z هى :

$$Z=\frac{(.075-.025)-0}{.015411}=3.24$$

القيمة P (P-Value) عندما يكون الفرض البديل من طرفين هي ضعف الاحتمال بأن الإحصاء Z سوف يأخذ قيمة أكبر من3.24 . هذا الاحتمال حصلنا عليه من جدول B في الملحق وقيمته .0006. وعلى ذلك تصبح القيمة P هي : (2)(.0006)=.0012 وحيث أن قيمة P هذه صغيرة جداً جداً، فإن بيانات العينة تناقض الادعاء بعدم وجود فرق بين نسب الفواتير المعيبة في فرعي الشركة.

مثال (٧-٩)

تستخدم شركة كميات كبيرة من المكونات الإليكترونية في إنتاجها، وتبحث في الاقتصار على التعامل مع عدد محدود من الموردين ممن يتميز إنتاجهم بجودة عالية. قامت الشركة بالشراء من موردين B,A. ورغبة في مقارنة معدلات الانتاج المعيب بينهما، قامت بسحب عينة عشوائية من الكمية الكبيرة التي أتت من كل مورد، فسحبت 125 وحدة من إنتاج المورد A,100 وحدة من إنتاج المورد B وتم فحص هذه العينات فوجد سبع وحدات معيبة في كل عينة.

(أ) حدد توزيع المعاينة لـ P_A-P_B.

(ب) حدد فترة الثقة 95% بين π_A,π_B أي الفرق بين نسب المعيب لكل من B,A.

(جـ) حدد القيمة P (P-Value) واعتماداً على هذه القيمة، ناقش ما إذا كان هناك دليلا على وجود اختلاف بين نسب المعيب.

الحل

(أ) توزيع المعاينة لـ P_A-P_B هو تقريبا التوزيع الطبيعي بمتوسط $\pi_A-\pi_B$ وخطأ معياري $\sqrt{\pi_A(1-\pi_A)/125+\pi_B(1-\pi_B)/100}$ وحيث أننا لانعلم قيمة π_A,π_B ، فإنه لا يمكن تحديد قيمة الخطأ المعياري بدقة. ومع ذلك وباستخدام نسب العينات التالية:

$P_A=7/125=.056$, $P_B=7/100=.07$ يمكن تقديره كما يلي:

$$SE(P_1-P_2)=\sqrt{\frac{(.056)(1-.056)}{125}+\frac{(.07)(1-.07)}{100}}=.0328$$

(ب) من الصيغة (7.25)، فإن فترة الثقة 95% تقريبا للفرق $\pi_A-\pi_B$ تكون على النحو التالي:

$$(.056-.07)\pm 1.96\sqrt{\frac{(.056)(1-.056)}{125}+\frac{(.07)(1-.07)}{100}}=-.014\pm .0642=-.0782 \text{ to } .0502$$

وحيث أن هذه الفترة تحتوي على الصفر فهذا يعني دليل ضعيف على وجود فرق بين π_A, π_B.

(جـ) ترغب الشركة في تحديد ما إذا كان هناك فرقا في نسب المعيب في الكميات التي يوردها B,A، كما ترغب في معرفة ما إذا كان إنتاج كلا الموردين يتم عند نسب معيب منخفضة أم لا. لذلك يمكن وضع الفرض العدمي والبديل على الصورة التالية:

$$H_o : \pi_A - \pi_B = 0$$

$$H_a : \pi_A - \pi_B \neq 0$$

بافتراض أن $\pi = \pi_A = \pi_B$ صحيحا كما نص على ذلك في الفرض العدمي، فإننا نبحث عن قيمة المقدر التجميعي للنسبة π من الصيغة (7.29):

$$P = \frac{7+7}{125+100} = .0622$$

وبالتالي فإن تقدير الخطأ المعياري لـ $P_A - P_B$ نحصل عليه من الصيغة (7.30) ليكون:

$$SE(P_A - P_B) = \sqrt{(.0622)(1-.0622)\left(\frac{1}{125} + \frac{1}{100}\right)} = .0324$$

وعليه تكون قيمة الإحصاء Z هي:

$$Z = \frac{(.056 - .07) - 0}{.0324} = -.43$$

إحتمال أن الإحصاء Z يأخذ قيمة أقل من ‎.43-‎ هو ‎.3336‎. (استخرجت قيمة هذا الاحتمال مباشرة من جدول B بالملحق)، وحيث أن الفرض البديل من طرفين، فإنه يتم مضاعفة قيمة P لتصبح ‎.6672‎، بالتأكيد قيمة P ليست صغيرة بدرجة كافية كي نقول أن بيانات العينة تناقض ادعاء الفرض العدمي. من ناحية أخرى فإن بيانات العينة لا تظهر أن أي من الموردين ينتجا مكونات عند مستوى منخفض من المعيب، ولذلك فإن الشركة لا تفضل التعامل مع كلا الموردين اعتمادا على هذه الدراسة.

النتيجة العملية للمثال (٧-٩)

يوضح مثال (٧-٩) مرة أخرى عدم جدوى استخدام العينات العشوائية للمقارنة بين نسب صغيرة جداً من المنتجات المعيبة، لذلك، فالأمر يتطلب أحجام عينات كبيرة جدا حتى تتحقق دقة كافية، وهو أمر من الصعب أن يتحقق عمليا في كثير من الحالات. لهذا السبب كثير من الشركات تتخلى عن نظم الفحص بالعينة كوسيلة للتأكد من جودة المنتج الخام أو المنتج النهائي. والأسلوب الأكثر فاعلية هو إدارة الجودة الشاملة TQM، حيث يتم التأكد من الجودة عند كل مرحلة من مراحل العملية الإنتاجية.

تمارين:

(٧-٢٧) عند تقديم فترة الثقة بين نسبتين، استخدم في حساب الخطأ المعياري قيم P_1, P_2 لتقدير π_1, π_2 على التوالي. ولكن عند تقديم اختبارات الفروض، استخدمنا قيمة المقدر التجميعي P في حساب الخطأ المعياري. اشرح هذا الفرق في الطريقتين.

(٧-٢٨) ماهي الشروط الخاصة بالمجتمع، بإجراء المعاينة المطلوبة لاستخدام التوزيع الطبيعي عند إنشاء فترات الثقة وعند اختبارات الفروض المتعلقة بين نسبتين؟

(٧-٢٩) لماذا يعد من الضروري معرفة توزيع المعاينة للفرق P_1-P_2 ؟

(٧-٣٠) بفرض أننا سحبنا العينات $n_2=100,n_1=150$ من المجتمعات 2,1 وسجلنا 15,12 حالات نجاح على التوالي.

(آ) حدد تقديرات لنسب المجتمعات π_2,π_1.

(ب) حدد ، وبدقة إذا أمكن ذلك ، توزيع المعاينة لـ P_1-P_2.

(جـ) احسب فترة الثقة 95% لـ$\pi_1-\pi_2$. هل هذه الفترة تظهر فرقا بين π_2,π_1 ؟ وضح ذلك.

(د) عند اختبار : $H_a : \pi_1-\pi_2 \neq 0$ مقابل $H_o : \pi_1-\pi_2 = 0$

حدد قيمة P (P-Value) .

(هـ) هل الخطأ المعياري الذي حسب في (جـ) يختلف عن الخطأ المعياري الذي حسب في (د) ؟ وضح سبب الإجابة بنعم أو لا .

(٧-٣١) بالرجوع إلى التمرين (٧-٣٠) وفي اختبارات الفروض . كم يكون الفرق بين استخدام النسبة التجميعية P في حساب الخطأ المعياري [كما هي موضحة بالصيغة(7.30)] بدلا من استخدام القيم P_2, P_1 لتقدير π_2, π_1 [كما في الصيغة (7.23)] ؟ قارن بين حسابات الخطأ المعياري في كل من (جـ)، (د) ثم علق على النتائج.

(٧-٣٢) بالرجوع إلي تمرين (٧-٣٠). بفرض أن حجم العينات كانت $n_2=20,n_1=40$: وأن عدد حالات النجاح كانت4,3 على التوالي. باعادة العمل مع أسئلة ذلك التمرين ، هل نفس الأسلوب يكون مناسبا؟ وضح ذلك.

(٧-٣٣) مصنع آلات تصوير رئيسي يواصل بحوثه الربع سنوية مع عملائه في محاولة لرقابة قدرتهم على اداء خدمة التصوير بصورة جيدة. في الربع الرابع، وفي عينة عشوائية من 150 عميل تبين أن 42 عميل يؤدوا الخدمة بمتوسط زمني قليل. أحدثت تغيرات في سياسة الخدمة بهدف تخفيض متوسط زمن الخدمة وفي الربع التالي من استخدام هذه التغيرات، تبين في عينة عشوائية من 177 عميل أن منهم 32 عميل يؤدوا الخدمة بمتوسط زمني ضئيل جداً.

(أ) احسب فترة الثقة95% للفرق بين نسبتي المجتمعين قبل وبعد تغير السياسة.

(ب) حدد ما إذا كانت فترة الثقةفي (أ) تظهر نقصا في نسبة العملاء اللذين وجدوا متوسط زمني ضئيل جداً في أداء الخدمة.

(جـ) هل دليل العينة هذه يظهر بوضوح أن نسبة العملاء الجدد غير المقتنعين بتلك التغيرات في سياسة الخدمة ستكون منخفضة ؟ اشرح ذلك.

(٧-٣٤) يقر الناخبون في إحدى الولايات أن النساء يختلفن تماما عن الرجال في تفضيلهم لأحد المرشحين الحكوميين. بالتحديد 640 من 1000 سيدة يفضلن المرشح الديموقراطي بينما 416 من 800 رجل يفضلن نفس المرشح.

(أ) احسب فترة الثقة95% للفرق بين نسبتي النساء والرجال المفضلين لهذا المرشح الديموقراطي.

(ب) اعتمادا على فترة الثقة في (أ) هل يمكنك أن تكتشف أن هناك فرقا بين الناخبين الذكور والإناث ؟ وضح ذلك.

(جـ) هل دليل العينة يظهر وبوضوح أن نسب النساء والرجال اللذين يفضلوا المرشح الديموقراطي هي نسبة مختلفة ؟

(٧-٣٥) وكالة للدعاية والإعلان تراقب فاعلية إعلاناتها التجارية في التليفزيون، وذلك بمواصلة اللقاءات التي تجريها مع عينات عشوائية من المشاهدين. في أحد هذه اللقاءات ومن مقابلة 418 مشاهد لنشرة الأخبار المحلية على القناة 12 تذكر 188 مشاهد أنهم شاهدوا الإعلان التجاري. أما في عينة أخرى من 338 مشاهد لنشرة الأخبار المحلية على القناة 5 أقر منهم 172 أنهم شاهدوا الإعلان التجاري.

(أ) احسب فترة الثقة95% للفرق بين نسبتي المشاهدين في القناتين للإعلانات التجارية. هل هذه الفترة تظهر وجود فرقا ؟ وضح ذلك.

(ب) إلى أي مدى تناقض بيانات العينتين الادعاء بعدم وجود فرق بين النسبتين مقابل أن هناك فرقا ؟

(جـ) بغض النظر عن إجابتك في (أ) ، (ب)، لماذا يجب على وكالة الإعلان الاستمرار في الرقابة على فاعلية إعلاناتها التجارية ؟ وضح ذلك.

(٧-٣٦) أراد مدير ادارة الأفراد لتجمع كبير من عدة شركات، مقارنة مدى التقدم الوظيفي للمعينين الجدد بعضهم يحمل درجة الماجستير في إدارة الأعمال والباقي يحملون مؤهلات مختلفة. وجد أنه بعد مرور خمس سنوات تم ترقية 158 إلى مناصب عليا من بين 263 ممن يحملون درجة الماجستير، بينما رقي1188 من بين 2177 ممن يحملون مؤهلات مختلفة.

(أ) هل هذه البيانات تظهر أن حملة الماجستير حققوا معدلا أكبر في الترقية عن حملة المؤهلات الأخرى؟.

(ب) صف المجتمع أو العملية الذي يمكن أن ينطبق عليه استدلاك في (أ).

(جـ) هل يمكن لمدير إدارة الأفراد أن يفترض أن النتيجة التي توصل إليها في (أ) سوف تطبق خلال العامين القادمين؟ وضح ذلك .

(٧-٦) الاستنتاج الإحصائي المتعلق بتباينين اعتمادا على عينات عشوائية مستقلة :

Statistical Inferences for Two Variances Based on Independent Random Samples

غالبا ما تظهر حاجتنا للمقارنة بين تباينات مجتمعين (أو عمليتين). فمثلا، في كثير من العمليات التصنيعية يكون التركيز على اختلافات العملية الانتاجية أكثر أهمية من التركيز على متوسط العملية.

فيما يتعلق بالإستنتاج الإحصائي حول تباينات مجتمعين σ_1^2 ، σ_2^2 ، يكون من المناسب رياضيا أن نستخدم النسبة σ_1^2 / σ_2^2 كأساس لهذا الاستنتاج. فإذا كانت هذه النسبة تساوي واحد، فهذا يعني تساوي تباينات المجتمعين. جدير بالذكر أن أفضل احصاء لـ σ_1^2 / σ_2^2 هو S_1^2 / S_2^2 ، أي نسبة تباينات العينتين، وتوزيع المعاينة لهذا الإحصاء لم يقابلنا حتى الآن. الاستنتاج الاحصائي المتعلق بمقارنة تباينات مجتمعين يعتمد على ما يعرف بتوزيع F.

(٧-٦-١) توزيع المعاينة لنسبة S_1^2 / σ_1^2 إلى S_2^2 / σ_2^2: توزيع F:

The Sampling Distribution of the Ratio of S_1^2 / σ_1^2 to S_2^2 / σ_2^2 :The F Distribution

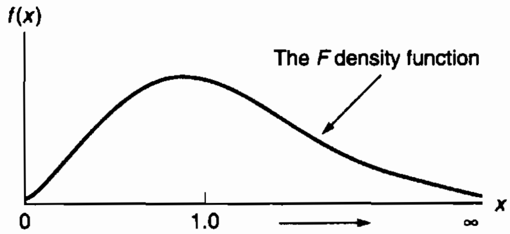
بفرض أننا سحبنا عينات عشوائية من مجتمعين، كل مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي. لكل عينة نتناول نسبة تباين العينة إلى تباين المجتمع الذي سحبت منه، أي: S_1^2 / σ_1^2 ، S_2^2 / σ_2^2 . بفرض أننا كونا إحصاءاً عبارة عن نسبة من هذه القيم على الصورة:

$$F = \frac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2} \qquad (7.32)$$

توزيع المعاينة لهذا الإحصاء يعرف على أنه توزيع: F ، **F distribution**.

مثلما كان توزيع T وتوزيع كاي تربيع دالة في درجات الحرية، فإن توزيع F أيضاً هو دالة في درجات الحرية، ولكن بخلاف توزيعT وتوزيع كاي تربيع، فإن توزيع F له نوعين من درجات الحرية: درجات حرية مقترنة بتباين العينة S_1^2 في البسط، ودرجات حرية مقترنة بتباين العينة S_2^2 في المقام . ويرمز لدرجات الحرية بـγ_1, γ_2 على التوالي، وعلى ذلك فدرجات الحرية في البسط والمقام هي على التوالي : $\gamma_1=n_1-1$, $\gamma_2=n_2-1$. ويتحدد توزيع F تماما بدلالة درجات الحرية ولا يتوقف على أي معالم أخرى.

أي متغير عشوائي يتبع توزيع F لا يمكن أن يأخذ قيما سالبة، وهذا واضحا من الصيغة (7.32)، حيث يلاحظ أن مكوناتها لا يمكن أن تكون سالبة. يتمركز توزيعF حول القيمة واحد، ويرجع ذلك إلى أن تباينات المجتمعين يتم تقديرهما بتباينات العينتين، وبالتالي فمن المتوقع أن يكون كل من S_1^2 / σ_1^2 ، S_2^2 / σ_2^2 قريبا من القيمة واحد، لذلك نجد أن النسبة $(S_1^2/\sigma_1^2)/(S_2^2/\sigma_2^2)$ تقترب أيضا من الواحد الصحيح. وتوزيع F هو توزيع ملتوي إلى اليمين ومداه نظريا من الصفر إلى مالانهاية وشكل (٧-٧) يوضح توزيع F.



شكل (٧-٧): شكل توزيع F

وتوزيعF مثل توزيع T وتوزيع كاي تربيع، نجده متوجدا في معظم البرامج الإحصائية الجاهزة، بالإضافة إلى كونه مجدولا بتوسع. وحيث أن توزيع F يعتمد على قيمتين من درجات الحرية، فإن هذا يقتضي إعداد مجلد كامل لجداولF. في هذا الكتاب نجد جزء من جداولF عند توليفات مختلفة من درجات الحرية تناظر الاحتمالات : .01, .025, .05, .10, .90, .95, .975, .99 وذلك في جدول E بالملحق. لاحظ أن هناك جدول منفصل لكل احتمال من هذه الاحتمالات.

لاستخدام هذا الجدول، نحدد أولا الاحتمال المرغوب فيه (محدد بالمساحة A وهي المساحة التي تقع على يسار القيمة الجزيئية المطلوبة)، بعد ذلك نبحث عن درجات حرية البسط$\gamma_1=n_1-1$ من بين قمم الأعمدة، ونبحث عن درجات حرية المقام $\gamma_2=n_2-1$ من بين قمم الصفوف. قيمة F التي تنتج من تقاطع درجتي حرية البسط والمقام هي القيمة الجزيئية المطلوبة ، حيث أن المساحة التي تقع على يسار تلك القيمة تمثل الاحتمال المرغوب فيه.

كمثال، نفرض أن $n_2=20, n_1=16$ ونرغب في إيجاد القيم الجزيئية (أي الجدولية) التي تناظر الاحتمالات .95,.025.. هنا درجات حرية البسط $\gamma_1=n_1-1=15$ ودرجات حرية المقام($\gamma_2=n_2-1=19$). عند A=.025، نجد أن القيمة الجزيئية هي .36.. وعند A=.95 نجد أن القيمة الجزيئية هي 2.23. هذا يعني أن احتمال أن متغير عشوائي يتبع توزيع F بدرجات حرية19,15 احتمال أن يأخذ قيمة لا تزيد عن .36 هو025. وأن احتمال أن هذا المتغير يأخذ قيمة لا تزيد عن 2.23 هو .95..وقيم F الجزيئية هذه يرمز لها بالرمز : $f_{.025,15,19}=.36$ ، $f_{.95,15,19}=2.23,$ وهي موضحة بيانيا في شكل(٧-٨) . أو يمكن أن تكتب بصورة رمزية أخرى كما يلي:

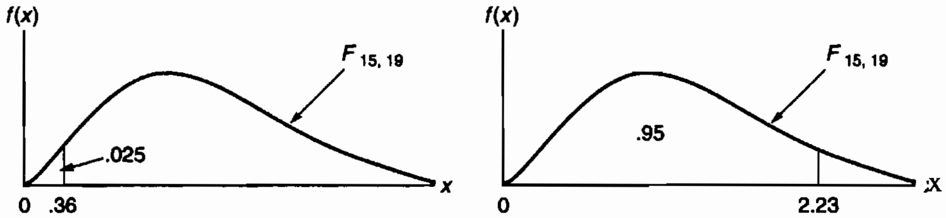
$P(F_{15,19}\leq .36)=.025$

$P(F_{15,19}\leq 2.23)=.95$

لاحظ أنه يمكن استخدام قاعدة الاحتمال للحوادث المكملة على الصورة:

$P(F_{15,19}) > .36) =.975$

$P(F_{15,19} >2.23) =.05$



شكل (٧-٨) : توضيح قيم F عند درجات الحرية 19,15

استخدام الحاسب الآلي:

مثلما حدث مع توزيع T ومع توزيع كاي تربيع، يمكن أيضا استخدام برنامج Minitab لتوليد القيم الجزيئية المطلوبة لتوزيع F . وكما رأينا من قبل، يستخدم الأمر INVCDF مصحوبا بالمساحة الاحتمالية التي تقع على يسار القيمة الجزيئية المطلوبة، ثم الأمر الفرعي F مصحوبا بدرجات حرية البسط والمقام بهذا الترتيب. القيم الجزيئية المبينة في شكل(٧-٨) تم توليدها ببرنامج Minitab كما يلي:

```
MTB  > INVCDV     .025  ;
SUBC > f 15  19
       0.0250        0.3606
MTB  > INVCDV   .95   ;
SUBC > f 15  19
       0.9500      2.2341
```

(٧-٦-٢) فترة الثقة واختبارات الفروض حول σ_1^2/σ_2^2 :

Confidence Intervals and Hypothesis Testing for σ_1^2/σ_2^2

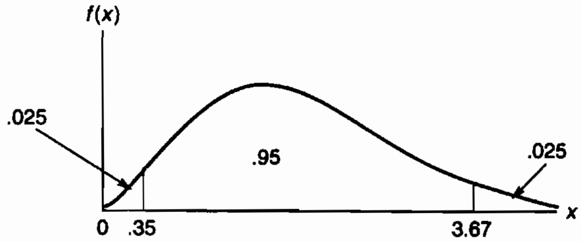
كما أشرنا من قبل فإن أفضل إحصاء لـ σ_1^2/σ_2^2 هو S_1^2/S_2^2 وأن الاستنتاج الإحصائي حول σ_1^2/σ_2^2 يعتمد على توزيع F.

فترة الثقة لـ σ_2^2 / σ_1^2 :

سنتذكر المثال المتعلق ببرنامج الرياضيات الصيفي. أحجام العينات والانحرافات المعيارية كانت$n_1=10$, $S_1=9.4$ لمجموعة الاختبار، $S_2=8.5, n_2=20$ للمجموعة الضابطة. نفرض أننا نرغب في تحديد فترة ثقة95% للنسبة σ_2^2 / σ_1^2 وأن العينات التي سحبت هي عينات عشوائية مستقلة من مجتمعات تتبع التوزيع الطبيعي وعليه فإننا سنتعامل مع توزيع المعاينة للإحصاء:

$$F=\frac{S_2^2 / \sigma_2^2}{S_1^2 / \sigma_1^2}$$

سوف يتضح حالا السبب في شكل هذه الصياغة. من المناقشة التي تمت في الفصل(٧-٦-١)، علمنا أن توزيع المعاينة هو توزيع F بدرجات حرية 19=1-20 للبسط، ودرجات حرية للمقام9=1-10. وكما سبق، تتحدد فترة الثقة بإيجاد المدى الذي يستوعب 95% من توزيع المعاينة هذا. بمعنى آخر، تتركز المساحة في المنتصف بحيث يقع025. من المساحة على يسار كل ذيل لمنحنىF ذو درجات حرية 9,19. من جدول E بالملحق نجد أن القيم الجزيئية هي 3.67,.35. (لاحظ أننا عمليا استخدمنا درجات الحرية 20 للبسط لأنها الأقرب إلى القيمة 19 في الجدول). هذه القيم الجزيئية موضحة في(شكل٧-٩).



شكل (٧-٩) : قيمF عند فترة الثقة 95%

ومعنى المدى من 35. إلى 3.67 بعبارة إحتمالية هو:

$$P(.35 < F < 3.67) = .95$$

وبالتعويض عن: $F=(S_2^2 / \sigma_2^2)/(S_1^2 / \sigma_1^2)$ في العبارة الإحتمالية السابقة نجد أن:

$$P\left(.35 < \frac{S_2^2 / \sigma_2^2}{S_1^2 / \sigma_1^2} < 3.67\right) = .95$$

ويمكن إعادة كتابتها على الصورة:

$$P\left(.35 < \frac{S_2^2}{S_1^2} \times \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 3.67\right) = .95$$

وبضرب الحدود التي بداخل القوس في S_1^2، ثم بعد ذلك القسمة على S_2^2، تحصل على:

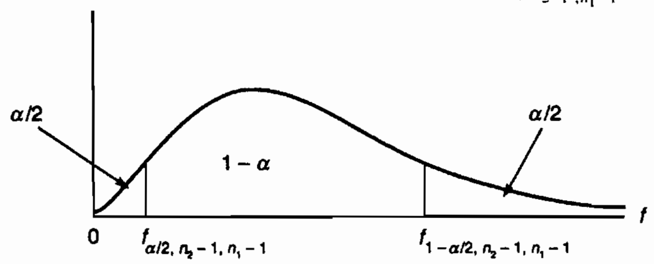
$$P\left(\frac{.35\ S_1^2}{S_2^2} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{3.67\ S_1^2}{S_2^2}\right) = .95$$

وعلى ذلك نجد أن المدى من (S_1^2 / S_2^2 .35) إلى (S_1^2 / S_2^2 3.67) عبارة عن فترة عشوائية (تذكر أن الإحصاء S_1^2 / S_2^2 هو متغير عشوائي) تحتوي على σ_1^2 / σ_2^2 بإحتمال قدره 0.95.

والمعنى لهذه الفترة العشوائية هو نفسه المعنى الذي وضع من قبل. فإذا كررنا سحب عينات عشوائية كل بحجم 10 طلاب لمجموعة الإختبار وأخرى كل بحجم 20 طالب للمجموعة الضابطة وفي

كل مرة تسحب فيها العينات تحسب قيمة خاصة S_1^2 / S_2^2 (ومن ثم نحسب مدى خاص عبارة عن فترة عشوائية مثل الفترة من (S_1^2 / S_2^2 .35) إلى (S_1^2 / S_2^2 3.67) ومن ثم فمن المتوقع أن نجد 95% من هذه الفترات الخاصة تحتوي على النسبة المجهولة σ_1^2 / σ_2^2 . وفيما يتعلق ببيانات المثال الحالي نجد أن: $S_1^2=(9.4)^2=88.36$ وأن $S_2^2=(8.5)^2=72.25$، وبالتالي فإن فترة الثقة للنسبة σ_1^2 / σ_2^2 يكون حدها الأدنى مساوياً: $(.35)(9.4)^2/(8.5)^2=.428$ وحدها الأعلى مساوياً: $(3.67)(9.4)^2/(8.5)^2=4.488$.

بإتباع الخطوات السابقة، يمكن تعميم هذه الطريقة وذلك لتحديد فترة الثقة للنسبة σ_1^2 / σ_2^2 عند أي مستوى ثقة. إعتبر فترة الثقة $100(1-\alpha)\%$ للنسبة σ_1^2 / σ_2^2 ودعنا نمركز $(1-\alpha)$ من المساحة تحت منحنى توزيع F والذي له درجات حرية للبسط n_2-1 ودرجات حرية للمقام n_1-1. القيمة الجزئية التي تقع في الجانب الايمن يرمز لها بالرمز $(f_{1-\alpha/2,n_2-1,n_1-1})$ والقيمة الجزئية التي تقع في الجانب الأيسر يرمز لها بالرمز $(f_{\alpha/2,n_2-1,n_1-1})$ وهذه القيم موضحة في شكل (٧-١٠).



شكل(٧-١٠): قيم F الجزيئية عند فترة ثقة $100(1-\alpha)\%$ للنسبة σ_1^2 / σ_2^2

بمعلومية أحجام عينات عشوائية مستقلة n_2, n_1 مسحوبة من مجتمعات تتبع التوزيع الطبيعي، نجد أن الصيغة العامة لفترة الثقة $100(1-\alpha)\%$ للنسبة σ_1^2 / σ_2^2 هي:

$$(f_{\alpha/2,n_2-1,n_1-1})\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\right) \text{ to } (f_{1-\alpha/2,n_2-1,n_1-1})\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\right) \tag{7.33}$$

مايجب أن ننتبه له عند حساب القيم الجزيئية أننا نستخدم درجات حرية البسط والمقام بصورة عكسية كما هو موجود في النسبة σ_1^2 / σ_2^2 .

مثال (٧-١٠)

في مثال (٧-٦) افترضنا أن البيانات كانت عن عينتين عشوائيتين من مجتمعين مستقلين يتبعا التوزيع الطبيعي. لهذه البيانات، حدد فترة الثقة 98% للنسبة σ_1^2 / σ_2^2 أي نسبة تباين المجتمع ذو المستوى الأول إلى تباين المجتمع ذو المستوى الثاني. إعتماداً على هذه الفترة، هل هناك سبباً مقنعاً للإعتقاد بأن تباينات المجتمعين مختلفين وغير متساويين؟

الحـــل

قبل أن نشرع في تقدير فترة الثقة، دعنا نتأمل شكل (٧-٣). إذا كانت التباينات بين المستويين هي حقاً مختلفة، فإن تشتت عينة المفردات في أحد المستويين يجب أن تكون مختلفة وبوضوح عن تشتت المفردات في المستوى الآخر. كما ذكرنا في الحل للمثال (٧-٦) أنه يظهر وبوضوح أن التشتت في كلا المستويين تقريباً نفس الشئ أي أن تباينات المجتمعين غير مختلفين.

فيما يتعلق بفترة الثقة 98%، يلاحظ أن مخرجات الحاسب الألي في مثال (٧-٦) أن:

$S_2=2.45, n_2=16, S_1=2.28, n_1=16$. بتركيز 0.98 من مساحة توزيع F الذي له n_2-1=15 درجة حرية للبسط، n_1-1=15 درجة حرية للمقام، تاركين 01. من المساحة عند كل ذيل من المنحنى وكنتيجة لذلك نجد أن القيم الجزيئية هي: $f_{.01,15,15}=.28,\ f_{.99,15,15}=3.52$

عندئذ ومن الصيغة (7.33) تصبح فترة الثقة 98% للنسبة σ_1^2 / σ_2^2 هي:

$$(.28)\frac{(2.28)^2}{(2.45)^2} \quad \text{to} \quad (3.52)\frac{(2.28)^2}{(2.45)^2} \quad \text{or} \quad .24 \quad \text{to} \quad 3.05$$

لتقدير ما إذا كان- وإعتماداً على هذه الفترة- هناك سبب مقتع للإعتقاد بأن تباينات المجتمعين مختلفين، أعتبر ما يلي: إذا كان المجتمعين متشابهين وغير مختلفين، فإن نسبتيهما σ_1^2 / σ_2^2 تصبح واحد وحيث أن القيمة واحد متواجدة داخل الفترة من 24. إلى 3.05 فهذا يعني أنه إعتماداً على تلك البيانات، لا يوجد سبباً مقنعاً للإعتقاد بإختلاف تباينات المجتمعين.

إختبارات الفروض لـ σ_1^2 / σ_2^2 :

بينا في مثال (٧-١٠) كيف تستخدم فترة الثقة في إختبار الإدعاء بأن تباينات المجتمعين متساوية عندما تتم المعاينة من مجتمعات مستقلة وتتبع التوزيع الطبيعي، بمعنى: إذا كان $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ فإن $\sigma_1^2 / \sigma_2^2=1$. أي إذا كان الواحد الصحيح يقع داخل فترة الثقة، فإن بيانات العينة لا تناقض هذا الإدعاء. بالطبع يمكننا أيضا إستخدام أسلوب القيمة P (P-Value) كما وضحناه من قبل.

بفرض أننا نرغب في إختبار الفرض العدمي:

$$H_o: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$$

مقابل الفرض البديل:

$$H_a: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$$

من البند (٧-٦-١)، نعلم أن توزيع المعاينة للإحصاء:

$$F = \frac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2} \qquad \textbf{(7.34)}$$

هو توزيع F بدرجات حرية n_2-1, n_1-1. الآن، إذا كان الفرض العدمي صحيحاً، فإن الإحصاء الموضح بالصيغة (7.34) يصبح نسبة بين تباينات عينتين وهو أفضل إحصاء للنسبة σ_2^2 / σ_1^2. وهكذا، إذا كان الفرض العدمي صحيحاً، وأن العينات العشوائية سحبت مستقلة من المجتمعين اللذين يتبعان توزيعات طبيعية، فإن توزيع المعاينة للإحصاء:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \qquad \textbf{(7.35)}$$

هو توزيع F بدرجات حرية n_1-1 للبسط، ودرجات حرية n_2-1 للمقام.

بصفة أساسية، أسلوب القيمة P (P-Value) هو نفسه كما وضح من قبل، بمعنى آخر، فإننا نحدد أولاً قيمة الأحصاء الموضح بالصيغة (7.35)، بعد ذلك نحدد إحتمال أن يتطرف هذا الإحصاء عن هذه القيمة في إتجاه الفرض البديل. وقيم P موجودة في معظم البرامج الإحصائية الجاهزة. أما فيما يتعلق بجدول E، فإننا نأخذ قيمة P بالتقريب في معظم الأحوال بسبب محدودية هذا الجدول والمثال التالي يوضح أسلوب القيمة P.

مثال (٧-١١)

معدن معين يصنع حالياً وفق طريقة تقليدية. اقترحت طريقة جديدة للتصنيع بموجبها يتم إضافة مادة معينة أثناء العملية التصنيعية، حيث تعتقد إدارة المصنع أن هذه المادة سوف تزيد من متوسط قوة الكسر لهذا المعدن ولكنها تخشى من أن الإختلافات في قوة الكسر ربما أيضاً تزيد. ست عشرة قطعة من المعدن تم إختيارها عشوائياً من إنتاج كلا الطريقتين وأخضعت كل قطعة للضغط حتى شوهد الكسر عليها. فيما يلي قوى الكسر لعينة القطع (بالكيلو جرام على السنتيمتر المربع):

الطريقة التقليدية	50	38	50	58	46	51	50	45	35	51	51	45	41	40	56	42
الطريقة الجديدة	45	27	42	48	40	43	45	49	44	51	54	58	65	76	25	38

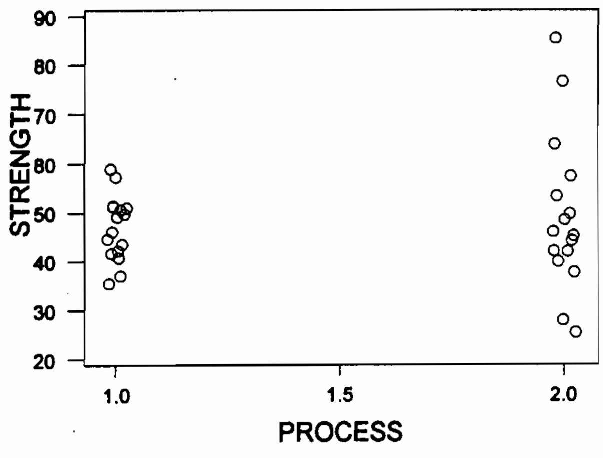
مفترضاً أن المعاينة تمت من مجتمعين يتبعا التوزيع الطبيعي. هل بيانات تلك العينات تؤدى بنا إلى مصداقية ما تخشاه إدارة المصنع من إزدياد إختلافات قوة الكسر؟

الحل

قبل أن نبدأ في تحليل البيانات بالصورة المنهجية، دعنا أولاً نعرض تلك البيانات بيانياً كما فعلنا ذلك من قبل في الأشكال (٧-٢، ٧-٤). وقد حصلنا من الحاسب الآلي على الشكل البياني رقم (٧-١١). قوى الضغط للعينة المنتجة وفق الطريقة التقليدية عرفت على أنها العملية 1 بينما للطريقة الجديدة عرفت على أنها 2. من هذا الشكل، يتضح تماماً أن التشتت الرأسي في العمليتين ليس واحداً، حيث نجد أن هناك تشتتاً أكثر في قوى الكسر للقطع المنتجة وفق الطريقة الجديدة (العملية 2) عن التشتت المشاهد في العملية 1. من هذا الشكل وحده يتضح أن ما تخشاه إدارة المصنع قد ثبت صحته. في الواقع، فإن تباينات العينتين هما: $S_1^2 = 41.3625$ ، $S_2^2 = 248.25$, ومن البديهي أن هذه القيم تظهر إختلافاً كبيراً لدرجة تجعل أنه من غير المعقول قبول الإدعاء بتساوي تباينات العمليتين. ولكن أحياناً يكون التخمين خطراً، لذا فإن التحليل المنهجي أو الرسمي يجب إستخدامه من قبل أن نثب إلى النتيجة.

ولكي نبدأ في التحليل المنهجي، نفرض أننا نختبر الفرض العدمي: $H_o: \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$

مقابل الفرض البديل: $H_a: \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1$



شكل (٧-١١): قوى الكسر بيانياً لمثال (٧-١١)

حيث σ_1^2 ، σ_2^2 هما تباينات المجتمعين التقليدي والجديد على التوالي. يلاحظ أنه إذا كانت بيانات العينة تناقض إدعاء الفرض العدمي (أي: $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$) فإنه يتضح أن σ_1^2 تكون أقل من σ_2^2 وهذا يعني أن σ_2^2 أكبر من σ_1^2 وهو الأمر الذي تخشاه إدارة المصنع.

من البيانات السابقة، نحدد قيم تباينات العينتين وهي $S_2^2 = 248.25$ ، $S_1^2 = 41.3625$ وبالتالي تصبح قيمة الإحصاء F هي:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{41.3625}{247.25} = .167$$

وحيث أن $n_2=16, n_1=16$ فإن قيمة P هي نفسها كإحتمال أن المتغير العشوائي F (بدرجات حرية بسط 15 ودرجات حرية مقام 15) أن يأخذ قيمة أقل من (في إتجاه الفرض البديل) .167، أو بمعنى آخر:

$$\text{P-value} = P(F_{15,15} < .167)$$

ومن الحاسب الآلي، نجد أن قيمة P هي.0006. وقيمة P هذه حصلنا عليها ببرنامج Minitab وذلك باستخدام الأمر CDF (حيث نحدد قيمةF) يتبع ذلك الأمر الفرعي F (حيث نحدد درجات الحرية للبسط والمقام) كما يلي:

```
MTB  > cdf   .167;
SUBC > f      15    15
        0.1670    0.0006
```

وبدون حاسب آلي، فإن أفضل ما يمكن أن نفعله هو الحصول على قيمة لـP باستخدام جدول E. عند درجات الحرية $\gamma_1 = 15$, $\gamma_2 = 15$, نبحث عن قيم F في الجدول حتى نصل إلى أقرب قيمة لـ.167 هذه القيمة نجدها .28 عندما تكون A=.01 وهذا يعني أن: $P(F_{15,15} < .28) = .01$، لذا فإن احتمال أن $F_{15,15}$ يأخذ قيمة أقل من .167 يجب أن يكون أقل من .01 أي:

$$\text{P-value} = P(F15,15 < .167) < .01$$

ومن الواضح أن قيمة P صغيرة بدرجة كافية، لذلك فإن بيانات العينة تناقض ادعاء الفرض العدمي مثلما كان ذلك واضحا في شكل (٧-١١). وهذا يدعم الاعتقاد الذي تخشاه إدارة الصنع من أن إضافة تلك المادة الجديدة سوف يزيد من اختلافات قوة الكسر.

أسلوب فترة الثقة يعطي نفس النتيجة التي توصلنا إليها، فعند مستوى ثقة98%، نجد أن القيم الجزئية هي: $f_{.01,15,15}=.28$,$f_{.99,15,15}=3.52$. ومن الصيغة (7.33) تصبح فترة الثقة على الصورة:

$$(.28)\left(\frac{41.3625}{248.25}\right) \quad \text{to} \quad (3.52)\left(\frac{41.3625}{248.25}\right)$$

أو من 0.047 إلى 0.586 وحيث أن هذه الفترة لا تحتوي على الواحد، فإن ادعاء الفرض العدمي بأن$\sigma_1^2 / \sigma_2^2 = 1$ لا تدعمه ولا تؤيده بيانات العينة أي لا تؤيد الادعاء بتساوي تباينات المجتمعين.

(٧-٦-٣) الفروض وأهميتها: The Assumptions and Their Importance

الفرض الأساسي والضروري لمحتويات هذا الفصل، هو أن تكون العينات العشوائية قد تم اختيارها مستقلة عن بعضها من مجتمعات تتبع التوزيع الطبيعي. توزيع المعاينة للإحصاء $(S_1^2 / \sigma_1^2) / (S_2^2 / \sigma_2^2)$ هو توزيع F بشرط أن تكون المجتمعات لها توزيع طبيعي، وهذا

الشرط يشبه كثيرا شرط الاعتدالية الضروري للاستنتاج الإحصائي المتعلق بمتوسطي مجتمعين اعتمادا على عينات مستقلة، أو المتعلق بتباين مجتمع واحد. ولكن بخلاف توزيعT، فإن توزيع F شديد الحساسية لشرط الاعتدالية. فإذا كان توزيع أحد المجتمعين مختلفا كثيرا عن الاعتدالية (الطبيعي) فإن الاستنتاج الإحصائي حول σ_1^2 / σ_2^2 اعتمادا على توزيع F يكون غير مناسبا. وإذا كانت هناك معلومات كافية متاحة عن المجتمعين، فإنه يمكن استخدام الطرق البيانية التي وردت في الفصل الثاني، وذلك لتقييم الاعتدالية (الطبيعي) لتلك المجتمعات، أما عدا ذلك فإنه يمكن استخدام طريقة ليليفورس الموضحة في الفصل(١٤) . وعلى كل حال فإنه ينصح دائما باختيار عينات عشوائية متساوية الحجم.

تمارين:

(٧-٣٧) حدد القيم الجدولية التالية:

(a) $f_{.05,5,8}$ (b) $f_{.05,11,18}$ (c) $f_{.95,11,18}$

(d) $f_{.99,11,18}$ (e) $f_{.01,5,28}$ (f) $f_{.90,5,28}$

(g) $f_{.95,5,28}$ (h) $f_{.99,5,28}$

ثم لخص أثر التغيرات في درجات الحرية (البسط والقام) والإحتمال على قيم توزيع F.

(٧-٣٨) بفرض أن المتغير العشوائي X له توزيع F بدرجات حرية 15,10:

(أ) ما مدى القيم الممكنة لـX؟ أشرح.

(ب) اوجد احتمال أن X تقل عن 0.22

(ج) اوجد احتمال أن X تزيد عن 2.54

(د) اوجد قيمة X بحيث يقع على يمينها 97.5% من المساحة.

(هـ) اوجد قيمة X بحيث يقع على يسارها 97.5% من المساحة.

(٧-٣٩) بفرض أن المتغير العشوائي X له توزيع F بدرجات حرية 5,10:

(أ) ما مدى القيم الممكنة لـX؟ اشرح.

(ب) اوجد احتمال أن X تقل عن 0.24.

(ج) اوجد احتمال أن X تزيد عن 4.73.

(د)اوجد قيمة X بحيث يقع يمينها 90% من المساحة.

(هـ)اوجد قيمة X بحيث يقع يسارها 90% من المساحة.

(٧-٤٠) العينات العشوائية $n_2=13, n_1=7$ هي عينات مستقلة سحبت من مجتمعات تتبع التوزيع الطبيعي. الإنحراف المعياري في هذه العينات هو$S_1=21.7$, $S_2=37.7$.

(أ) حدد فترة الثقة 95% لنسبة تباينات المجتمعين، أي σ_1^2 / σ_2^2 . واعتمادا على هذه الفترة، هل يمكنك القول بوجود فرق بين تباينات المجتمعين ؟ اشرح ذلك.

(ب) عندما تحسب القيمة P، هل بيانات العينة تظهر وبقناعة أن σ_1^2 أقل من σ_2^2؟ اشرح ذلك.

(٧-٤١) بالرجوع إلى تمرين (٧-٤٠). دعنا نعكس نسبة تباينات المجتمعين، بحيث تصبح σ_2^2 / σ_1^2 وأجب عن الجزء (ب) في تمرين (٧-٤٠). هل العينة تدل بوضوح على أن σ_2^2 هو أكبر من σ_1^2 ؟. وعلى ذلك فهل من المهم تحديد أي تباين مجتمع يوضع في البسط وأيهما يوضع في المقام عند صياغة هذه النسبة ؟ فسر ذلك.

(٧-٤٢) مستثمر يرغب في المقارنة بين مخاطر نوعين مختلفين من الأسهم B,A. مخاطر أي نوع من الاسهم تقاس بالاختلافات التي تحدث في تغيرات سعرة اليومي. يعتقد المستثمر أن المخاطرة مع السهمB أكبر مما هي مع السهمA. سجلت تغيرات سعرA خلال عينة عشوائية من 21 يوما وتغيرات سعر B خلال عينة عشوائية من 16 يوما وحصلنا على النتائج التالية:

السهم A	السهم B
$\overline{X}_A=.32$	$\overline{X}_B=.41$
$S_A=.25$	$S_B=.45$

(أ) بفرض أن العينتين مستقلتين وأنهما سحبا من مجتمعات تتبع التوزيع الطبيعي، فهل بيانات العينات تناقض الأدعاء بعدم وجود فروق بين المجتمعين، ومن ثم يتدعم أعتقاد المستثمر؟ وضح ذلك.

(ب) بالرجوع إلى الفروض المذكورة في (أ). هل تعتقد أنه يمكن تصديق هذه الفروض؟ اشرح ذلك.

(٧-٤٣) بالرجوع إلى تمرين(٧-١٥) والذي كنا فيه نقارن بين مناطق الاختبار ومناطق التحكم بالنسبة إلى خطة تسويق جديدة.

(أ) اعتمادا على الشكل البياني في (أ) من تمرين(٧-١٥)، هل ترى أن هناك فرقا في اختلاف المبيعات بين مناطق الإختبار والتحكم؟ وضح ذلك.

(ب) حدد فترة الثقة 95%لـ σ^2 test/σ^2control . هل هذه الفترة تظهر فرقا في الإختلافات ؟ وضح ذلك.

(٧-٤٤) بالرجوع إلى تمرين(٧-١٧) وفيه كنا نقارن بين وسيلتي إنتقال إلى مكان العمل.

(أ) اعتمادا على الشكل البياني في (أ) من تمرين(٧-١٧)، هل ترى أن هناك فرقا في اختلاف تلك الوسيلتين؟ اشرح ذلك.

(ب) حدد فترة الثقة 95% لـ σ^2train / σ^2auto . هل هذه الفترة تظهر فرقا في الإختلافات ؟ وضح ذلك.

(٧-٤٥) بالرجوع إلى تمرين(٧-١٨) وفيه كنا نقارن بين متوسط زمن التعطل لنوعين من آلات التصوير.

(أ) اعتمادا على الشكل البياني في (أ) من تمرين (٧-١٨)، هل ترى أن هناك فرقا في اختلاف أزمنة التعطل بين ذلك النوعين ؟ وضح ذلك.

(ب)حدد فترة الثقة 95% لـ(σ^2 suny / σ^2 saban). هل هذه الفترة تظهر فرقا في الإختلافات؟ وضح ذلك.

(٧-٤٦) بالرجوع إلى تمرين (٧-١٩) المتعلق بتدريب العاملين على عملية تجميع منتج ما.

(أ)اعتمادا على الشكل البياني في (أ) من تمرين(٧-١٩)، هل ترى أن هناك فرقا في اختلاف طريقتي التجميع؟ وضح ذلك.

(ب) هل دليل العينة يظهر وبقناعة أن أختلافات أزمنة التجميع في ظل الطريقة الحديثة هو أقل من تلك التي في ظل الطريقة التقليدية؟ برر أجابتك باستخدام التحليل الإحصائي المناسب.

(٧-٤٧) بالرجوع إلى تمرين (٧-٢٠) والذي يتناول معدلات الكسر في إنتاج المصابيح الكهربائية.

(أ)عتمادا على الشكل البياني في (أ) من تمرين(٧-٢٠)، هل ترى أن هناك فرقا في اختلاف نظامي النقل؟ اشرح ذلك.

(ب) هل دليل العينة يظهر وبقناعة أن الإختلافات في نسب الفقد في المصابيح كل يوم مع نظام النقل الآلي القديم هي أكبر مما هي عليه مع نظام النقل الآلي الجديد؟ وضح اجابتك باستخدام تحليل احصائي مناسب.

(٧-٧) الأستنتاج الأحصائي المتعلق بمجتمعين أو عمليتين: مثال شامل A Comprehensive Example

يقوم أحد البنوك بتعيين المتدربين الجدد على أساس برنامج تدريبي يعقد مرتين في السنة، يقدم لهم بعض المفاهيم الأساسية في البنوك مثل السياسة النقدية، التمويل، التسويق، الإدارة، الأقتصاد. يقاس النجاح التدريبي في الأجل القصير بمقارنة وتقييم درجات الأختبار القبلي والأختبار البعدي للمتدربين في الجزء النظري (الأكاديمي) من البرنامج، بمعنى أن كل متدرب يعقد له إختبار قبل وبعد المشاركة في البرنامج. كفاءة هذا البرنامج تقاس بمدى التحسن في هذه الأختبارات.

المتدربين هم خريجين من كليات وجامعات متنوعة، ودرجاتهم العلمية في مجالات متنوعة. عملية التعين لا ترتكز على متوسط درجة التقدير. عدد سنوات الخبرة العملية للمتدربين داخل البنك تتفاوت جوهريا ما بين صفر، 15 سنة. أيضاً أعمارهم تتفاوت على نطاق واسع من 21 سنة إلى 52 سنة وهكذا، فإن الفروق بين مجالات الدرجة العلمية للمتدربين، بين متوسط درجات التقدير، سنوات الخبرة، الأعمار كلها من الممكن أن تكون مصدراً للأختلافات في درجاتهم القبلية والبعدية.

مدير إدارة الأفراد بالبنك هو المسئول عن متابعة فاعلية وكفاءة البرنامج التدريبي. لقد قام المدير بدراسة درجات الأختبار القبلية والبعدية لعينة من 28 متدرب ألتحقوا حديثاً بالبرنامج. كما أهتم أيضاً بمعرفة هل المتدرب الحاصل على درجة إدارة الأعمال يكون أفضل في آداء الأختبارات عن المتدربين الحاصلين على درجات اخرى، وهذه النقطة يكون لها اعتبار خاص عند التعيين. أيضاً أهتم مدير إدارة الأفراد بمعرفة أثر كل من متوسط درجة تقدير التخرج، سنوات الخبرة، العمر، ولكن هذه المعلومات لم تكن متاحة في الوقت الذي اجريت في هذه الدراسة. درجات الأختبار القبلي والبعدي لعدد 28 متدرب والزيادة في هذه الدرجات، درجة التخصص العلمي(إدارة أعمال أو اخرى) كلها أعطيت في جدول (٧-١).

الشكل (٧-١٢) يوضح أن درجات الأختبار البعدي هي أكبر من درجات الأختبار القبلي. إزدواج الدرجات رسمت متتالية ووصلت فيما بينها بخط رأسي ومن الواضح الدرجات البعدية أكبر من الدرجات القبلية في كل زوج من ازواج الدرجات.

جدول (٧-١) : النتائج القبلية والبعدية للمتدربين حسب نوع المؤهل

Trainee	Degree	Pretest Score	Post test Score	Change
1	Business	35	44	9
2	Business	49	66	17
3	Business	38	51	13
4	Business	41	63	22
5	Business	45	62	17
6	Business	51	66	15
7	Business	36	57	21
8	Business	41	63	22
9	Business	41	60	19
10	Business	43	63	20
11	Business	38	60	22
12	Business	43	58	15
13	Business	31	55	24
14	Business	33	52	19
15	Business	46	75	29
16	Business	33	50	17
17	Other	44	55	11
18	Other	33	54	21
19	Other	44	58	14
20	Other	42	63	21
21	Other	38	58	20
22	Other	47	65	18
23	Other	41	63	22
24	Other	38	67	29
25	Other	41	64	23
26	Other	42	57	15
27	Other	34	62	28
28	Other	34	52	18

جدول (٧-٢) يوضح التحليل الوصفي للدرجات القبلية والبعدية والتغير في الدرجات لكل مشترك. متوسط الدرجات القبلية والبعدية هي 59.39, 40.07 علي التوالي وهكذا متوسط التحسن في الدرجات حوالى 19.3 كنتيجة للبرنامج التدريبي(زيادة 48%)٠

حيث ان البيانات مجمعة في صورة أزواج من الدرجات لكل متدرب ، فإن تحليل العينات ذات القراءات المزدوجة الذي يركز على الفروق بين أزوج القراءات قبل وبعدالاختبار يعد ملائماً هنا٠ المدرج التكراري للفروق بين أزواج القراءات معطى في شكل (٧-١٣)٠ التوزيع ذو قمة وحيدة ملتوي قليلا إلى اليسار. فرض الأعتدالية للفروق بين ازواج القراءات يجب الا يكون مشكلة في إستخدام تحليلT٠

شكل (٧-١٢) يليه جدول(٧-٢): يلخصا الإحصاءات الوصفية

FIGURE 7.12
Graph of pretest and posttest scores for 28 management trainees

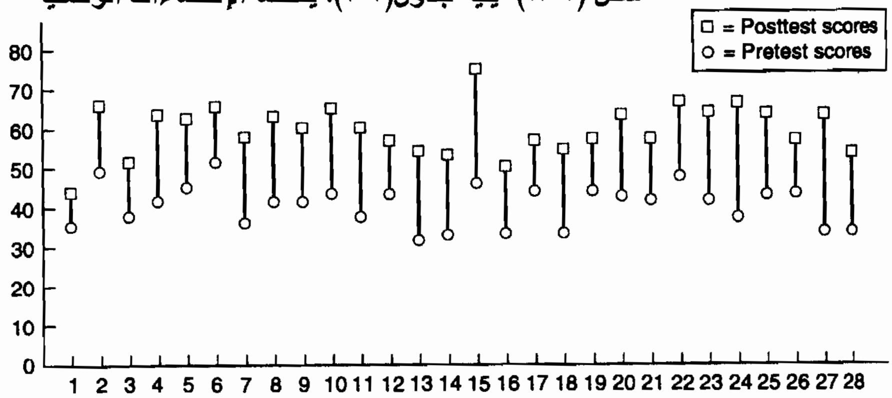


TABLE 7.2
Descriptive Summary of Pretest Scores, Posttest Scores, and Increases in Score

	N	MEAN	MEDIAN	TRMEAN	STDEV	SEMEAN
pre-test	28	40.071	41.000	40.000	5.206	0.984
posttest	28	59.39	60.00	59.38	6.41	1.21
Change	28	19.321	19.500	19.346	4.930	0.932

	MIN	MAX	Q1	Q3
pre-test	31.000	51.000	35.250	43.750
posttest	44.00	75.00	55.00	63.00
Change	9.000	29.000	15.500	22.000

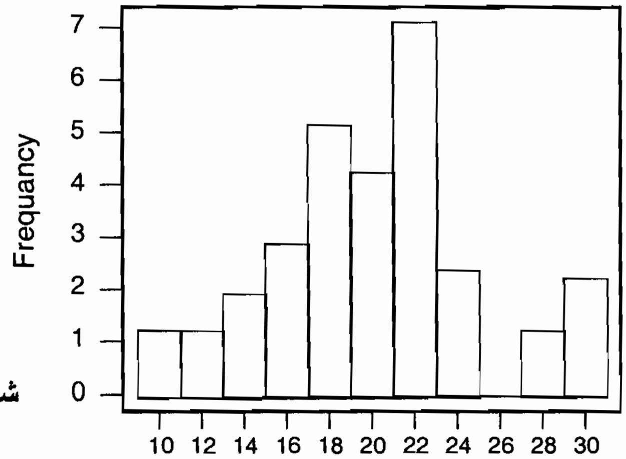
جدول (٧-٣) يعطي فترة الثقة95% لمتوسط التغير في الدرجات للمجتمع وثيق الصلة بالموضوع (أي كل المتدربيين الحاليين وفي المستقبل إذا كانت عملية التعيين والتدريب مستمرة بدون تغير). عند درجة ثقة 95%، يمكن القول أن متوسط التحسن للمجتمع يقع داخل حدى الثقة(17.410 to 21.233).

وحيث ان حدي الثقة لا تحتوي على صفر، فليس من المقبول الأدعاء بعدم وجود تحسن فعلي. بالطبع متوسط التحسن يمكن ان يتحرك خارج هذه الحدود إذا كان هناك تغيراً حقيقياً في عملية التعين والتدريب.

جدول(٧-٣): فترة الثقة95% لمتوسط التغير في درجات الأختيار بإستخدام ميني تاب

	N	MEAN	STDEV	SEMEAN	95.0 PERCENT C.I
Change	28	19.321	4,930	0.932	(17.410,21.233)

قيمة P (P-Value) عند إختبار الفرض العدمي بعدم وجود تحسن مقابل الفرض البديل بوجود تحسن، معطاه في جدول(٧-٤). القيمة P وهي 0,0000 تشير إلى مناقضة قوية للفرض العدمي.



شكل (٧-١٣): المدرج التكراري للفرق بين ازواج القراءات

جدول (٧-٤): مخرجات ميني تاب

TEST OF MU = 0.000 VS MU G.T. 0.000

	N	MEAN	STDEV	SE MEAN	T	P VALUE
Change	28	19.321	4.930	0.932	20.74	0.0000

جدول (٧-٥): ملخص بالأحصاءات الوصفيه

Descriptive Summary of Pretest and Posttest Scores by Degree

	Degree	N	MEAN	MEDIAN	TRMEAN	STDEV
pre-test	0	12	39.83	41.00	39.80	4.47
	1	16	40.25	41.00	40.14	5.84
posttest	0	12	59.83	60.00	59.90	4.80
	1	16	59.06	60.00	59.00	7.54
Change	0	12	20.00	20.50	20.00	5.31
	1	16	18.81	19.00	18.79	4.74

	Degree	MIN	MAX	Q1	Q3
pre-test	0	33.00	47.00	35.00	43.50
	1	31.00	51.00	35.25	44.50
posttest	0	52.00	67.00	55.50	63.75
	1	44.00	75.00	52.75	63.00
Change	0	11.00	29.00	15.75	22.75
	1	9.00	29.00	15.50	22.00

الآن ماذا عن درجة تأثير المؤهل التعليمي؟ جدول(٧-٥) يعطي تحليلا وصفيا لدرجات الأختبار لكل من طلبة إدارة الأعمال في مقابل الدرجات العلمية في مجالات أخرى(1:إدارة أعمال، 0:أخرى). هذا الجدول يظهر أختلافات بسيطة جدا-وقد لا توجد- بين المجموعتين.

إجراء T التجميعي تم تنفيذه ليلحق بالنتائج المبدئية المستمدة من التحليل الوصفي. حيث أن مؤهل إدارة الأعمال يبدو أنه الأكثر أحتمالاً في إظهار فروق في درجات الأختبار القبلي، فإن إختبار T التجميعي يركز على هذا المتغير. النتائج موضحة في جدول(٧-٦). فترة الثقة95% للفرق بين متوسطي المجموعتين وهو(4.4 , 3.6-) يتضمن القيمة الصفرية للفرض العدمي. القيمة P وهي0.83 كبيرة جداً لدرجة أنه من الناحية الواقعية لا يوجد سبباً للشك في أي فرق بين متوسطي المجموعتين. هذه الدراسة تظهر أنه لا يوجد سبباً لتفضيل أن تكون الأغلبية من إدارة الأعمال عن المؤهلات العلمية الأخرى في قرارات التعيين.

جدول(٧-٦): تحليل T التجميعي لمتوسط درجات الأختبار القبلي: إدارة الأعمال مقابل التخصصات الأخرى

TWOSAMPLE T for per - test

Degree	N	MEAN	STDEV	SE MEAN
1	16	40.25	5.84	1.5
0	12	39.83	4.47	1.5

95 PCTCI FOR MU 1 - MU 0 : (-3.6 , 4.4)

TTEST MU 1 = MU 0 (VS NE) : T = 0.21 P = 0.83 DF = 25

(٧-٨) ملخص SUMMARY

في هذا الفصل ناقشنا الطرق الأحصائية المستخدمة للمقارنة بين معالم مجتمعين أو عمليتين أخذاً في الأعتبار المتوسطات، النسب، التباينات. فاعلية هذه المقارنات تعتمد على أسلوب جمع البيانات، وهي أهم سمة في أي دراسة إحصائية. المبدأ العام في أي تصميم إحصائي هو أن نتحصل على بيانات العينة بالطريقة التي تصغر الأختلاف العشوائي وذلك بالتحكم كلما أمكن ذلك في العوامل الغير محددة والمسببة للأختلاف.

عند المقارنة بين متوسطين، فإننا نعتبر المجتمعين أو العمليتين وكأنهم يمثلوا مستويين متمايزين للعامل موضوع الأهتمام، هناك خطتين أساسيتين يسمحا بالحصول على البيانات: عينات مستقلة وعينات ذات قراءات مزدوجة. الفرق بين هاتين الخطتين أنه مع الخطة الثانية نجد أن تأثير المتغير الخلفي أو الخفي يتم التحكم فيه بعملية الأزدواج(قطاعات). في كل التطبيقات العملية، نجد أن الأستنتاجات الأحصائية الخاصة بالفرق بين متوسطي مجتمعين تعتمد على توزيعT. وكما في الفصل السادس، نستخدم التحليل البياني كخطوة أولى في إختبارات الفروض. المقارنة بين نسبتين تعتمد على عينات عشوائية مستقلة مسحوبة من مجتمعين. إجراءات فترة الثقة وإختبارات الفروض تعتمد على التوزيع الطبيعي المعياري، كما كان الأمر في حالة مجتمع واحد الذي نوقش في الفصل السادس.

في هذا الفصل قدم توزيع معاينة جديد للمقارنة بين تبايني مجتمعين. وهو يعتمد عينتين عشوائيتين مسحوبتين من مجتمعين يتبع كل منهما التوزيع الطبيعي. هذا التوزيع الجديد يتبع توزيعF. وتوزيعF يتركز حول القيمة1 (واحد) وهو توزيع ملتوي إلى اليمين ومدى قيمته نظريا تتراوح من الصفر إلى اللانهاية.

المراجع References

1 - W.E. Deming. *Out of Crisis*. Combridge MA: MCT Center for Advanced Engineering Study. 1986

2 - R. Larsen and M. Marx. *Introduction to Mathematical Statistics,* 2nd ed. Englewood cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1985 .

3 - J.Mc Clave and F. Dietrich. *Statistics*. 6th ed. New York,Macmillan,1994.

تمارين إضافية

(٧-٤٨) محلل تسويقي قد تم تعينه لمهمة تقسيم السوق إلى مجموعات من المؤسسات التي تستوعب طلبات متشابهة من المنتج، ولكي يقوم بهذه المهمة فإنه يستعين بنتائج دراسة السوق. هذا المحلل يعتقد أن مؤسسات البنوك يجب أن توضع في نفس مجموعة مؤسسات التأمين. نتائج الدراسة كانت على النحو التالي. مفترضاً أن العينات مستقلة ومسحوبة من مجتمعين كل منهما له التوزيع الطبيعي وأن تباينات المجتمعين متساويين.

التأمين	البنوك
$\overline{X}_2 = 22.1$	$\overline{X}_1 = 16.6$
$S_2 = 10.9$	$S_1 = 12.3$
$n_2 = 40$	$n_1 = 40$

(أ) أحسب فترة الثقة 95% لتحديد ما إذا كان الأختلاف موجود بين متوسط مستويات الطلب لمؤسسات البنوك والتأمن.

(ب) إذا كانت بيانات العينات تشير إلى أختلاف محسوس، فهل هذا يشير بالضرورة إلى ان مؤسسات البنوك والتأمين يجب ألا يوضعا في نفس قطاع التسويق؟ فسر ذلك.

(جـ) هل أي من الفروض التي عمل بها في الإجابة عن (أ) متحققة؟ أشرح ذلك.

(٧-٤٩) بالرجوع إلي التمرين (٧-٤٨).

(أ) معتمدا على فترة الثقة 95% لـ σ_1^2 / σ_2^2، هل تستنتج أن هناك فرقاً بين أختلافات الطلب لهذين النوعين من المؤسسات؟ إشرح ذلك.

(ب) أجب على (جـ) كما في التمرين (٧-٤٨) في ضوء التحليل الذي قمت به في (أ) من هذا التمرين.

(٧-٥٠) فحصت دراسة حديثة درجة آداء شركات المحاسبة في مراجعة حسابات عملائها، وكان أحد العناصر ذات الأهتمام الخاص في تلك الدراسة، هو نسبة المراجعة التي تقوم بها الشركة. في ثمان من شركات المحاسبة الكبرى، كان متوسط نسبة المراجعة44.6% بإنحراف معياري 16.4%. اما في 22 شركة محاسبة أصغر من ذلك، كان المتوسط 33.9% بأنحراف معياري 10.8%.

(أ) يعتقد الباحث أن متوسط نسبة المراجعة في الشركات الكبرى هو اكبر من متوسط نسبة المراجعة في الشركات الصغرى لأسباب عديدة. هل دليل العينة يؤكد صحة هذا الأعتقاد؟ افترض أن تباينات المجتمعات متساوية.

(ب) هل الفرض بتساوي تباينات المجتمعات يبدو متحققاً هنا؟ دعم إجابتك. ملحوظة: أستخدم فترة ثقة 95%.

(٧-٥١) بالرجوع إلى تمرين (٦-٢٥) بالفصل السادس المتعلق بتكاليف الرعاية الطبية لضحايا الحوادث واللذين كانوا يرتدون أحذمة الآمان(كانت التكاليف بالدولار هي): 2436 5932
732 1029 698 582 242 1135 508 761 597 643 186 862 307
في عينة عشوائية أخرى من ضحايا الحوادث وكانوا لا يرتدون احذمة الآمان وحجمها 15 كانت التكاليف بالنسبة لهم بالدولار هي: 819 1845 946 1438 3946 8629
2938 548 950 6924 694 1593 973 2207 1631
مفترضاً أن تلك العينتين مستقلتين.

(أ) عبر عن هذه البيانات بيانياً. هل يتضح لك أن إرتداء أحذمة الآمان أدى إلى إختلاف في تكلفة الرعاية الطبية في المتوسط؟ وضح ذلك.

(ب) هل دليل العينة يناقض الإدعاء بعدم وجود فروق؟ دعم إجابتك.

(جـ) إعتماداً على الشكل البياني في (أ) هل ترى فرقاً في تباين من يرتدون ومن لا يرتدون أحذمة الآمان؟ دعم إجابتك مستخدماً فترة الثقة 95%.

(٧-٥٢) بالرجوع إلى التمرين(٦-٢٦) بالفصل السادس. سحبت شركة المياة عينة عشوائية أخرى حجمها 20 من المقيمين في يوم آخر أثناء أزمة نقص المياه وفيما يلي حجم الأستهلاك بالجالون:

214	189	192	196	228	262	236	249	175	213
187	234	206	229	194	206	237	243	219	224

الأستهلاك في يوم آخر كما أعطى قي التمرين(٦-٢٦) كانت على الصورة:

238	212	248	196	175	245	265	195	180	235
246	223	218	240	236	228	214	208	220	252

مفترضاً أستقلال تلك العينتين.

(أ) أرسم تلك البيانات بيانيا. هل يتضح لك أن إستهلاك المياه في هذين اليومين متشابهين في المتوسط؟ أشرح ذلك.

(ب) اجب عن (ب)، (جـ) كما في التمرين (٧-٥١).

(٧-٥٣) المدير المسئول عن اجهزة الكمبيوتر عليه أن يوزع شحنة أجهزة كمبيوتر على قسمين بالشركة: تحليل التسويق، وبحوث التسويق. سياسة المدير في توزيع هذه الشحنة تعتمد على زمن تشغيل أجهزة الكمبيوتر في العام الماضي في كل قسم على مدار 12 شهراً السابقة، كانت تكاليف تشغيل الكمبيوتر في كل قسم بالدولار على النحو التالي:

الشهر	قسم التحليل	قسم البحوث
1	1780	2440
2	2120	2010
3	2440	2780
4	1860	2290
5	2760	3190
6	2020	2240
7	1680	1550
8	1550	1530
9	2780	2790
10	2660	3000
11	2540	2710
12	1930	2090

(أ) أرسم هذه البيانات • اعتماداً على هذا الرسم، هل ترى فرقاً في مستوى متوسط التكاليف في كلا القسمين؟ أشرح •

(ب) هل دليل العينة يناقض الادعاء بعدم وجود فرق بين مستوى متوسط التكاليف في كلا القسمين؟ برر إجابتك بالتحليل المناسب •

(٧-٥٤) شركة يتم إنتاجها في مصنعين: مصنع بلتيمور، ويعتقد أنه أقل أنتاجية إذ يستغرق وقتاً أطول في المتوسط في عملية التجميع عن مصنع كانساس. وفي محاولة للتحقق من هذا الشك أو الأعتقاد، سجلت أزمنة التجميع لعينة عشوائية من 16 وحدة انتجت في كل مصنع. من البيانات التاريخية يعتقد أن أختلاف أزمنة التجميع في كلا المصنعين متشابهة. البيانات(بالساعات) لخصمت على النحو التالي:

بلتيمور	6.1	5.4	6.2	6.1	6.4	6.8	6.7	6.4	6.6	6.9	5.6	5.7	6.9	6.8	6.4	7.2
كانساس	5.1	6.2	5.8	6.3	4.9	5.7	5.6	4.8	4.9	6.1	5.9	5.8	5.4	6.2	5.7	6.8

(أ) ارسم هذه البيانات • هل ترى فرقاً في الأنتاجية بين هذين المصنعين في المتوسط؟ اشرح •

(ب) هل دليل العينة يؤكد بقناعة هذا الشك؟ دعم إجابتك •

(جـ) هل الفرض الخاص بتساوي التباينات في المصنعين يبدو متحققا هنا؟ دعم إجابتك • (ملحوظة: استخدم فترة الثقة95%) •

(٧-٥٥) نفذ إستقصاء بالعينة على منطقتين متجاورتين لدراسة نسب خريجي المدارس الثانوية واللذين التحقوا بالجامعة • في منطقة سوليفان وجد88 من 171 من خريجي المدارس الثانوية قد التحقوا بالجامعة، اما في منطقة مونتجومري فوجد 131 من220 قد التحقوا بالجامعة •

(أ) هل دليل العينة يشير إلى إختلاف محسوس بين المنطقتين في نسب من التحقوا بالجامعة ؟ دعم إجابتك.

(ب)إفترض أنه في عينة من 220 وتمثل خريجي المدارس الثانوية في المنطقتين معاً هذا العام إلتحق منهم 171 بالجامعة، هل إستنتاجك في (أ) يختلف الآن ؟

(٧-٥٦) يبحث إتحاد المستهلكين في تكاليف الأصلاح لنوعين من السيارات. سجلت تكاليف الأصلاح على عينة من ثمان سيارات من كل نوع بالدولار وكانت:

النوعx	النوع y
88	339
221	101
149	189
44	181
310	244
720	388
121	199
310	479

(أ) أرسم تلك البيانات ، أعتماداً على ذلك الرسم ، هل ترى إختلافاً في متوسط التكاليف للنوعين x, y ؟ ماهي الأشياء الأخرى التي تثير إنتباهك في الرسم ؟ وضح ذلك.

(ب) مفترضاً أن العينتين سحبتا عشوائياً وباستقلال من مجتمعين لهما التوزيع الطبيعي ، حدد إلى اي مدى يكون دليل العينة هذا مدعماً للأدعاء القائل بعدم وجود فروق في متوسط التكاليف لهذين النوعين من السيارات.

(٧-٥٧) يهتم مدير أحد المطاعم بإستخدام قوائم طعام مختلفة الشكل ، أملا في أن يزداد أنفاق الزبون على مشهيات الأطعمة ، خاصة وأنها مربحة. لقد كان مهتماً بتغير شكل قائمة الطعام ، لكن مفردات القائمة الأساسية لن تتغير. في أختبار نفذ مساء أحد أيام السبت ، اعطي100 زبون قائمة الطعام الحالية وأعطي 100 زبون آخرين قائمة الطعام بالشكل الجديد المقترح ، لخصت النتائج بتحديد نسبة الزبائن اللذين طلبوا مشهيات الأطعمة ، متوسط الأنفاق على المشهيات للزبائن اللذين طلبوها وكذلك الأنحراف المعياري للإنفاق على المشهيات وكانت على النحو التالي:

	القائمة الحالية	القائمة المقترحة
نسبة من طلبوا مشهيات	$P_1 = 0.52$	$P_2 = 0.66$
متوسط الإنفاق للزبائن اللذين طلبوا مشهيات	$\overline{X}_1 = \$5.58$	$\overline{X}_2 = \$5.70$
الإنحراف المعياري للإنفاق على المشهيات	$S_1 = .40$	$S_2 = 0.44$

(أ) هل بيانات العينة تعطي دليلا كافياً للقول بأن نسبة طلب المشهيات هي الأكبر مع القائمة المقترحة ؟ دعم إجابتك.

(ب) هل بيانات العينة تعطي دليلاً كافياً للقول بأن متوسط الإنفاق على المشهيات هي الأكبر مع القائمة المقترحة ؟ دعم إجابتك. (أفترض تساوي تباينات المجتمعين).

(جـ) معتمداً على فترة الثقة95%، هل يمكنك الأدعاء بعدم وجود اختلاف في الأنفاق على المشهيات في كلا القائمتين ؟ وضح ذلك.

(د) معتمداً على التحليل في (أ)، (ب) هل القائمة الجديدة مفيدة ؟ ناقش ذلك بإختصار.

(٧-٥٨) في 29 أكتوبر من عام 1990 نشرت إحدى مجلات الإدارة تقريرها السنوي عن بداية الرواتب السنوية للرجال والنساء الحاصلين على درجة الماجستير في إدارة الأعمال MBA من أفضل كليات الإدارة وكانت:

الكلية	رجال	نساء
MET	$77539	$58500
Columbia	65009	54917
Dartmouth	57393	54643
Rochester	46521	40367
Cornell	53762	54433
Virginia	67397	54306
UCLA	62785	51147
Stanford	80412	74925
Berkeley	54322	52934
Michigan	54058	51702

(أ) أرسم تلك البيانات . هل ترى أختلافاً في متوسط الرواتب بين الرجال والنساء ؟

(ب)عندما تعامل هذه البيانات على أنها عينات ، إلى أي مدى تناقض هذه البيانات الأدعاء بعدم وجود فرق بين متوسط بداية الرواتب ؟

(جـ) إلى أي مدي يكون دليل العينة مناقضاً بوجود فرق قدره 5000$ بين متوسط رواتب الرجال والنساء مقابل الأدعاء بوجود فرق اكبر من هذا المبلغ ؟

(٧-٥٩) محلل في قسم شئون العاملين باحدى الشركات يرغب في دراسة تغيب العاملين في مصنعين كبيرين تمتلكهما الشركة . هذا الرجل يرغب بالتحديد في مقارنة متوسط عدد أيام التغيب خلال ثلاث سنوات في المصنعين . هذا الرجل يعتقد أن عدد سنوات الخدمة لكل موظف هي العامل المؤثر في الدراسة التي يجريها .

(أ)ساعد هذا المحلل في تصميم خطة المعاينة المناسبة .

(ب) هل يمكنك أن تفكر في عوامل اخرى قد يكون لها تأثير في عدد أيام التغيب؟ وضح ذلك .

(٧-٦٠) أجرى باحث في قسم بحوث التسويق مقابلة مع 16 مطعم بيتزا في مدينة ريتشموند ومع 16 مطعم بيتزا في مدينة فرجينيا وقام بتسجيل سعر البوصة المربعة (بالسنت) لفطيرة بيتزا الجبنة الكبيرة ولفطيرة بيتزا بيبروني الكبيرة وذلك لحساب الأختلافات بين السعر للبوصة المربعة والسعر للوحدة الواحدة ككل . نتائج العينة لخصت على النحو التالي:

	ريتشموند		فرجينيا	
	المتوسط	الإنحراف المعياري	المتوسط	الإنحراف المعياري
فطيرة الجبنة	4.092	0.810	3.975	0.893
فطيرة بيبروني	4.690	0.952	4.557	0.912
عدد الوحدات المجانية	7 من 16		10 من 16	

(أ) لكل نوع من أنواع البيتزا ، إحسب فترة الثقة95% للفرق بين متوسط السعر في كل من ريتشموند وفرجينيا ، مفترضاً تساوي تباينات المجتمعين . هل ترى أن هناك إختلافاً بين متوسط السعر في المجتمعين؟ وضح ذلك .

(ب) هل إفتراض تساوي تباينات المجتمعين متحققاً هنا؟ دعم إجابتك (ملحوظة:أستخدم فترة الثقة 95%)

(جـ) هل هذه العينة تعطي دليلاً كافياً للقول بأن نسبة البيتزا التي تقدم مجاناً في مطاعم ريتشموند أقل مما تقدمه مطاعم فرجينيا؟دعم إجابتك .

(د) ما هو الفرض الضروري اللازم لأجابتك في (جـ)؟ وهل هو متحقق هنا؟ دعم إجابتك .

(٧-٦١) قام احد الأساتذة بتقيم آداء طلاب الفرقة الثانية و الثالثة في مادة نظم المعلومات . بيانات العينة التالية تظهر الدرجات التي حصلوا عليها في أول اختبارين .

الفرقة الثالثة			الفرقة الثانية		
رقم الطالب	إختبار1	إختبار2	رقم الطالب	إختبار1	إختبار2
1	68	75	1	60	53
2	68	60	2	62	52
3	68	82	3	62	68
4	70	63	4	64	63
5	70	72	5	64	73
6	72	75	6	66	62
7	72	78	7	68	58
8	76	65	8	70	53
9	76	78	9	70	52
10	76	65	10	72	58
11	78	67	11	72	60
12	80	93	12	74	72
13	82	70	13	76	60
14	84	67	14	78	68
16	88	82	15	80	68
17	90	78	17	86	88
18	94	78	18	88	75
19	94	85	-	-	-

(أ) أرسم درجات كل من طلاب الفرقة والثانية كل على حدة(منفصلين). نفذ ذلك الرسم مرة بالنسبة للأختبار الأول ثم بالنسبة للأختبار الثاني. هل يتبين لك أن آداء الفرقة الثالثة أفضل من أداء الفرقة الثانية؟ وضح ذلك.

(ب) إلى أي مدى يناقض دليل العينة الأدعاء بأن متوسط الآداء واحد لكل من الفرقتين الثالثةوالثانية مقابل الفرض بأن متوسط الفرقة الثالثة هو الأعلى؟ نفذ تحليلا مناسباً على الأختبار الأول ثم كرر ذلك على الأختبار الثاني.

(جـ) بالنسبة لطلاب الفرقة الثالثة، هل بيانات العينة تعطي دليلا كافياً للقول بأن هناك فرقا في متوسط مستوى صعوبة الأختبارين؟ دعم إجابتك.

(د) بالنسبة لطلاب الفرقة الثانية، هل بيانات العينة تعطي دليلا كافيا للقول بأن هناك فرقاً في متوسط صعوبة الأختبارين؟ دعم إجابتك.

(هـ) أكد إجابتك في (جـ)، (د) بتحديد فترة الثقة 95%.

(٧-٦٢) هذا التمرين يوضح أزمنة الأستجابة في محطة المطافي في فرجينيا. زمن الإستجابة عرف على أنه عدد الدقائق التي تنقضي من وقت الإستدعاء هاتفياً وحتى مغادرة سيارة المطافي للمحطة. البيانات التالية تمثل أزمنة الأستجابة لكل المكلمات الهاتفية خلال ستة أشهر وكل مكالمة صنفت إلى مكالمة حريق او غير حريق.

حريق:

14	12	5	7	15	11	5	9	11	7	0	10
9	15	8	10	6	12	8	13	14	24	10	11
3	9	9	4	13	5	5	14	6	12	3	13
13	7	9	0	4	6	7	6	4	12	13	4
					-	-	3	11	6	7	20

غير حريق:

8	5	10	7	5	7	5	9	0	23	11	15
6	4	2	7	8	3	12	8	10	4	9	9
						5	13	3	23	13	8

(أ) أرسم بيانياً أزمنة الإستجابة لكل من مكالمات الحريق ومكالمات غير الحريق. صف أي اختلافات تراها بين توزيعات أزمنة الأستجابة لكلا النوعين من المكالمات.

(ب) معتمداً على الشكل البياني في (أ) استخدم إجراء مناسب لتحديد ما إذا كان دليل العينة يناقض الأدعاء بعدم وجود إختلاف بين متوسط زمن الإستجابة لكلا النوعين من المكالمات.

(٧-٦٣) محلل في شئون العاملين بإحدى الشركات يرغب في دراسة تغيب العاملين في مصنعين للشركة يقعا في رتيشموند، لويسفيل. في عينة من 30 عامل من كل مصنع، سجل لكل واحد عدد أيام التغيب التراكمية خلال ثلاث سنوات وكانت البيانات على الصورة التالية:

ريتشموند:

7	1	10	11	5	0	2	13	18	0	7	5	24	14	18
13	5	23	9	11	16	13	9	5	9	12	2	18	21	2

لويسفيل:

4	9	13	9	50	19	14	3	48	51	30	28	18	0	24
3	0	8	12	64	33	6	5	13	9	15	11	15	49	50

(أ) أرسم البيانات بيانا لكلا المصنعين. هل الشكل البياني يبدو أنه يشير إلى أن متوسط عدد أيام الغياب مختلفة بين المصنعين؟

(ب) معتمداً على الشكل البياني في (أ) إستخدم إجراء مناسب لتحديد ما إذا كان دليل العينة كافياً لتدعيم الرؤية بإختلاف متوسط عدد أيام الغياب في المصنعين.

(٧-٦٤) أستاذاً بأحدى الجامعات قام بتدريس إحدى المواد الأدبية لمن يرغب من الطلاب، وذلك قبل عقد الإمتحان النهائي لجميع الطلاب في محاولة منه لتقييم فاعلية هذه الطريقة. في أول إختبار سجلت درجات الطلاب اللذين حضروا تطوعاً هذه المحاضرات، وسجلت أيضاً درجات الطلاب اللذين لم يحضروا وكانت النتائج لعدد 91 طالباً على النحو التالي:

75	88	75	95	95	75	75	75	85	65	75	95
1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0

85	88	72	82	82	82	85	92	98	78	85	78
1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0
95	95	85	75	72	78	65	75	72	95	98	88
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
75	82	85	78	88	92	65	78	88	82	88	78
1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0
75	75	85	95	92	75	95	75	88	85	82	92
0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0
85	95	65	82	75	98	65	98	75	85	85	78
1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1
85	85	75	88	95	92	95	92	88	78	72	75
1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1
92	72	92	92	92	82						
0	0	0	1	1	1						

ملحوظة:

1: تشير إلى حضور الطالب للمحاضرات.

0: تشير إلى عدم حضور الطالب للمحاضرات.

(أ) صف تصميماً تجريبياً لهذه الدراسة.

(ب) إقترح عوامل أخرى يمكن أن تفسر وجود بعض الإختلافات العشوائية في هذه البيانات.

(ج) إرسم هذه البيانات. هل الشكل البياني يظهر وجود فروقاً في المتوسط في درجات الأختبار بين الطلاب اللذين حضروا أو اللذين لم يحضروا المحاضرات؟

(د) هل يؤثث على هذا التحليل الرسمي أن- في المتوسط- الطلاب تحقق درجات أعلى في الأختبار إذا ما حضروا تلك المحاضرات؟

ملحق ٧ : Appendix - 7

أوامر الحاسب الآلي عند إستخدام برنامج Minitab:

سنستخدم الأمثلة (٧-٥) و(٧-٦) و(٧-٨) لتوضيح أوامر برنامج Minitab التي نتج عنها الأشكال (٧-٢) و(٧-٣) و(٧-٦) على التوالي وكذلك المخرجات المناظرة لتلك الأمثلة.

للحصول على الشكل (٧-٢) ومخرجات برنامج Minitab للمثال (٧-٥) فإننا نستخدم منهج يسمح للحاسب الآلي برسم نقطي لعدد 14 دخل لكل ضاحية أو منطقة بصورة رأسية، وهذا المنهج يتطلب أحجام متساوية من العينات. لاحظ أن في جملة DATA، والتي تأتي بعد الأمر SET للعمود C1 (الضاحية) أرقام داخل قوسين ترمز إلى الضاحيتين 2, 1 بينما الرقم الذي يلي القوس المغلق يشير إلى عدد المشاهدات في كل ضاحية. يلي ذلك الأمر SET للعمود C2 (الدخل) ثم جملة DATA على سطرين، كل سطر يحتوي على 14 قراءة دخل لكل ضاحية. أخيراً، الأمر PLOT لرسم الدخول بيانياً على محور رأسي مقابل الضاحيتين التي تظهر على المحور الأفقي ثم الأمر TWOT الذي ينتج عنه المخرجات اللازمة لإختبار الفرض: $H_o:\mu_1 - \mu_2 = 0$ مقابل $H_a:\mu_1 - \mu_2 \neq 0$

```
MTB > name c1 = 'neiborhd' c2 = 'income'
MTB > set c1
DATA> (1 2)14
DATA> end
MTB > set c2
DATA> 86.5 49.2 54 47 60.6 57.1 29.3 51.4 39.8 34.4
DATA> 60 66.7 75.2 65.9
DATA> 58.8 30.4 38 48.5 46 32.7 34.5 48.4 41.7 60.5
DATA> 44 40.4 41.5 34.9
DATA> end
MTB > plot c2 c1
MTB > twot c2 c1
```

للحصول على شكل (٧-٣) ومخرجات برنامج Minitab للمثال (٧-٦)، فإننا نستخدم نفس المنهج كما في مثال (٧-٥) مع إستثنائين: (1)حيث أن الفرض البديل من طرف واحد، فإننا نستخدم الأمر الفرعي ALTERNATIVE، (2)حيث أن الفرض بتساوي تباينات المجتمعين فرض مقبول ومعقول، فإننا نستخدم الأمر الفرعي POOLED ليشير ذلك إلى إستخدام إحصاء T التجميعي والموضح بالصيغة (7.8). أوامر برنامج Minitab هي على النحو التالي:

```
MTB > name c1 = 'level' c2 = 'time'
MTB > set c1
DATA> (1 2)16
DATA> end
MTB > set c2
DATA> 14 12 15 15 11 16 17 12 14 13 18 13 18 15 16 11
DATA> 20 22 18 18 19 15 18 15 22 18 19 15 21 22 18 16
DATA> end
MTB > plot c2 c1
MTB > twot c2 c1;
SUBC> alternative = -1;
SUBC> pooled.
```

ويمكن إستخدام خطوات أخرى بديلة في برنامج Minitab خاصة عندما تكون أحجام العينات غير متساوية وإن كان هذا لا يمنع من استخدامها في حالة العينات متساوية الحجم وسوف نوضح ذلك من خلال بيانات تمرين (٧-١٨) وفيما يلي أوامر برنامج Minitab:

```
MTB > set c1
DATA> 7.2 3.6 5.5 4.6 3.7 3.1 2.6 7.2
DATA> end
MTB > set c2
DATA> 4.4 3.3 5.6 6.1 4.2 3.6 3.4 4.2 5 3
DATA> end
MTB > stack (c1) (c2) (c3);
SUBC> subscripts c4.
MTB > plot c3 c4
MTB > twot c3 c4
```

لاحظ أنه بعد أستخدام الأمر SET لتخزين بيانات العينتين C2,C1 على التوالي، نستخدم الأمر STACK لتكديس بيانات العينتين في العمود C3. ميزت العينتين في محتويات العمود C4، بمعنى أول ثمان أرقام (أي العينة الأولى) في العمود C4 ميزت بالعدد 1 والعشرة الثانية (أي العينة الثانية) ميزت بالعدد 2 وهذا يتيح لنا الحصول على الشكل البياني باستخدام الأعمدة C4,C3 من خلال الأمر PLOT، أيضا باستخدام نفس العمودين نحصل من خلال الأمر TWOT على مخرجات برنامج Minitab الخاصة بأختبار T اعتمادا على الصيغة (7.10). (في هذا التمرين، نجد أن الشكل البياني يوحي بعدم تساوي تباينات المجتمعين). للحصول على الشكل البياني للمثال (٧-٨) شكل (٧-٦)، نستخدم الفكرة الأساسية في شكل (٧-٢) للمثال (٧-٥) مع استثناء أننا نستخدم الأمر LPOT الذي يضع الضغط بيانيا على المحور الرأسي والموظفين على المحور الأفقي مع استخدام الرموز A,B لتميز بيانات "قبل"، "بعد" على الشكل البياني، وفيما يلي أوامر البرنامج للحصول على شكل (٧-٦).

```
MTB > name c1='when' c2='employee' c3='pressure'
MTB > set c1
DATA> (1 2)10
DATA> end
MTB > set c2
DATA> 2(1:10)
DATA> end
MTB > set c3
DATA> 148 133 152 170 155 178 185 151 180 144
DATA> 158 176 150 179 183 206 177 165 175 186
DATA> end
MTB > lplot c3 c2 c1
```

يستخدم الأمر UNSTACK (C3),(C4),(C5) بجانب الأمر الفرعي SUBSCRIPTS C1 لوضع الضغط "بعد" في العمود C4 (أول سطر في جملة DATA والتي تلي الأمر SET C3 في الأوامر الخاصة بتوليد الرسم البياني السابق)، ووضع الضغط "قبل" في العمود C5 (ثاني سطر في جملة DATA والتي تلي الأمر SET C3 في الأوامر الخاصة بتوليد الرسم البياني السابق). الآن، يستخدم

الأمر LET لإنشاء عمود جديد يمثل الفرق بين "قبل" ، "بعد": أخيرا تستخدم الأوامر TINTERVAL, TTEST (كما وضحت في الملحق 6) للحصول على مخرجات برنامج MINITAB .

```
MTB > unstack (c3) (c4) (c5);
SUBC> subscripts c1.
MTB > let c6 = c5 - c4
MTB > ttest c6;
SUBC> alternative = 1.
MTB > tinterval c6
```

الفصل الثامن

تحـــليـــــــل التبـــــــايـــن

ANALYSIS OF VARIANCE

محتويات الفصل :

الفصل الثامن

تحليـــــل التبـــايـــن

ANALYSIS OF VARIANCE

(٨-١) نظرة عامة على محتويات الفصل : Bridging To New Topics

فى الفصلين الأول والسابع ، تم تقديم بعض المبادئ الأساسية لتصميم التجارب ، وفى الفصل السابع أيضا تم استعراض كيف يمكن أن تستخدم هذه المبادئ لمقارنة مستويين من العوامل (وهى مجتمعين أو متوسطات العملية) وذلك إما بإستخدام عينات عشوائية مستقلة أو عينات عشوائية ذات قراءات مزدوجة. وغالباً ما تنشأ الحاجة لفهم الفروق بين أكثر من مستويين لعامل ما، أو لفهم الفروق بين المستويات لعوامل عديدة. ويعتبر التصميم الإحصائى للتجارب أداة هامة لهذا الغرض. وهو أيضاً أداة قوية فى دراسات العملية لإدراك الآثار على متغير الإستجابة للمستويات المختلفة لأسباب التغير الشائعة، وذلك يعطى فرصة لإجراء تحسين إضافى للعملية .

وكما عرضنا فى الفصل السابع ، يمكن أن تساعد الأساليب البيانية البسيطة فى فهم الفروق. ومن المعلوم أن الرسم البيانى وحده لا يكفى لإيضاح ما إذا كانت مستويات عامل ما تختلف إختلاف حقيقى فى تأثيرها على متغير الإستجابة. وهذا صحيح بصفة خاصة فى الدراسات التى تنطوى على أكثر من عامل واحد. في مثل هذه الحالات، يتطلب الأمر طريقة للتحليل أكثر دقة مقارنة بأختبار T التجميعي أو T للقراءات المزدوجة والذي قدم في الفصل السابع. وسوف نقدم فى هذا الفصل إختبار يسمى تحليل التباين **analysis of variance** (واختصاره ANOVA) الذى يخدم هذا الغرض. وكما يوجد فى الفصل السابع، تتعامل التصميمات الإحصائية لهذا الفصل مع عينات عشوائية مستقلة والعينات العشوائية المختارة فى قطاعات، حيث يعتبر التجميع داخل قطاعات امتداد مباشر لمفهوم الإزدواجية .

(٨-٢) مقارنة المتوسطات لأكثر من مجتمعين بالإعتماد على عينات مستقلة
Comparing More Than Two Population Means with Independent Samples

وكتعميم مقارنة متوسطى مجتمعين لأى عدد من متوسطات المجتمعات، سوف نعود مرة أخرى للمثال المذكور فى الفصل السابع المشتمل على مثمنيين لمجموعة من الأصول. تذكر أن مدير الخدمة المثمنة يشك بأن سبب الإختلاف بين المثمنين يؤدى إلى ظهور فروق غير مرغوب فيها فى قيم التثمين. ويرغب فى إدارة تجربة لتحديد ما إذا كان شكه صحيح أم لا. فإذا تم التأكد من شكه، سوف يبدأ برامج تدريبية لقياس نتائج المثمنين. وسوف نعمم هذا المثال بإفتراض أنه يوجد ثلاثة مثمنين C, B, A وقد حدد المدير 15 من الأصول المتماثلة لإستخدامها فى التجربة. وقد تم تحديد خمس أصول عشوائياً لكل مثمن. لاحظ أن هذا امتداد مباشر لتصميم العينات المستقلة الذى تم مناقشته فى الفصل السابع .

إفترض أن التجربة سوف تنتج البيانات الموضحة فى جدول (٨-١) (حيث الأرقام موضحة بآلاف الدولارات). أولاً دعنا نفحص ملخص البيانات. نجد أن متوسطات العينات الثلاثة هى 89.6 , 91.8 , 86.8 ويجب أن يسأل المدير نفسه عما إذا كانت هذه الإختلافات كبيرة بدرجة كافية للتأكيد على بدء برنامج التدريب. فإذا كانت الإجابة نعم، فيجب عليه أولاً الأخذ بعين الإعتبار ألا يكون المثمنين مختلفين حقيقة عن المتوسط وأن الإختلافات المشاهدة تعكس ببساطة تغير المعاينة العشوائية. ولمواجهة هذا الموضوع فى الفصل السابع، فقد استخدمنا إختبار T التجميعي **pooled-T** (ويعتمد الشخص الذى يستخدمه على الإفتراض القائل بأن تباينات المجتمعات متساوية) والآن لدينا ثلاثة مثمنين، لذلك نحتاج طريقة أخرى للتحليل وهى تحليل التباين .

جدول (٨-١) بيانات العينة للثلاثة مثمنين

A	B	C
90	93	92
94	96	88
91	92	84
85	88	83
88	90	87
$\bar{X}_A = 89.6$	$\bar{X}_B = 91.8$	$\bar{X}_C = 86.8$
$S_A^2 = 11.3$	$S_B^2 = 9.2$	$S_C^2 = 12.7$
$n_A = 5$	$n_B = 5$	$n_C = 5$

الإفتراضات الأساسية لتحليل التباين هى نفس الإفتراضات السابقة لإختبار T التجميعي pooled-T :

(1) إستقلال العينات العشوائية : فقد تم إختيار العينات الثلاث عشوائيا بحيث تكون جميعها مستقلة عن بعضها البعض .

(2) المجتمعات تتبع التوزيع الطبيعى : فقد تم إفتراض أن توزيع قيم التثمين لكل الأشياء المثمنة بواسطة كل مثمن على حدة كافية لتمثيلها بالتوزيع الطبيعى .

(3) تساوى تباينات المجتمعات : فقد تم إفتراض أن مجتمعات القيم المثمنة التى تتبع التوزيع الطبيعى لها تباينات متساوية. حيث :($\sigma_A^2 = \sigma_B^2 = \sigma_C^2 = \sigma^2$)حيث يعرف σ^2 بأنه التباين المشترك. وتقيس σ^2 التغير الملازم (المتأصل) داخل كل مجتمع .

(4) استقرار العمليات : عند دراسة العملية، نرغب غالباً فى مقارنة متوسطات عمليات عديدة. وبصفة عامة ، يتم إفتراض أن العمليات التى سوف يتم مقارنتها تكون مستقرة، أى بعيدة عن أسباب التغير التى يمكن تحديدها .

ومن المهم إدراك أن تحديد هذه الإفتراضات لا يمثل بالضرورة أن تكون هذه الإفتراضات متحققة. ولكن مكون هام جداً فى التحليل الإحصائى هو إختبار صحة هذه الإفتراضات. ويعتبر الفحص الدقيق لبيانات العينة كافياً لهذا الغرض .

ونرغب الآن فى إختبار الفرض العدمى القائل بأن :

$$H_O: \mu_A = \mu_B = \mu_C$$

(حيث μ_C, μ_B, μ_A متوسطات العمليات المجهولة للمثمنين C , B , A وذلك للخصائص مثل التى فى العينات) مقابل الفرض البديل .

يوجد على الأقل متوسط واحد يختلف عن الباقى : H_a

فإذا كانت البيانات كافية لإنكار صحة الفرض العدمى ، فإن ذلك يوضح أن المثمنين يختلفوا فى متوسطاتهم ، لذلك تشكل هذه النتائج أساس سليم للعمل الإدارى .

(٨-٢-١) تجزئة الإختلافات فى بيانات العينة :

من الواضح وجود إختلافات بين قيم $\overline{X}_C, \overline{X}_B, \overline{X}_A$ كما هو مبين فى جدول(٨-١) . ودائماً سوف يوجد إختلافات بين متوسطات العينات بسبب تغيرات المعاينة العشوائية ، حتى إذا كانت العينات مأخوذة من عمليات مثمنة بمتوسطات مماثلة . والسؤال الحاسم هو ما إذا كانت الفروق المشاهدة بين متوسطات العينات كبيرة بدرجة كافية للتأكيد على رفض الفرض العدمى أم لا . إذا اختلفت متوسطات العينات ، بحجم أكبر من مجرد اعتبارها تعزى إلى تغير المعاينة العشوائية ، فإننا نستنتج أن الفروق لا تعزى فقط إلى تغير المعاينة العشوائية ، ولكن ترجع أيضاً إلى فروق فى عمليات التثمين الثلاث(μ_C, μ_B, μ_A) .

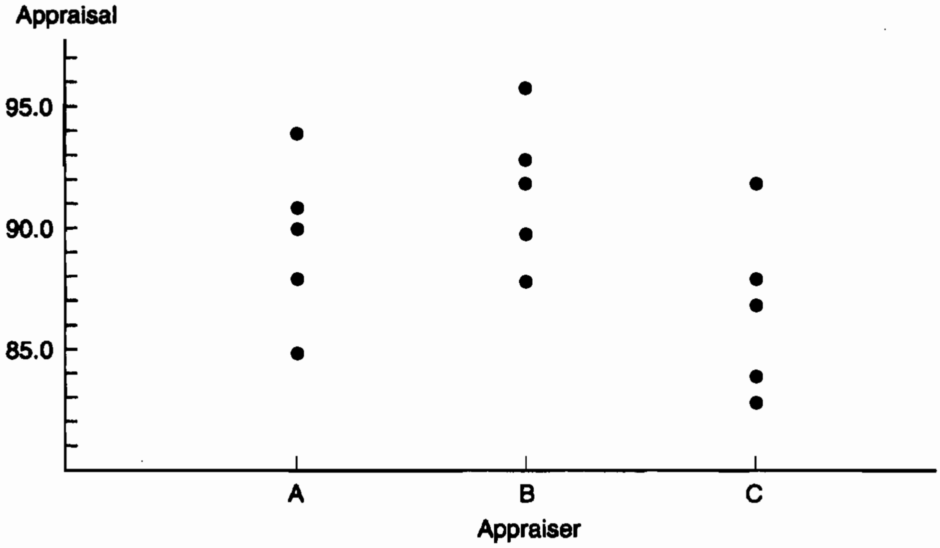
وقبل الإجابة على هذا السؤال ، نحتاج إلى مراجعة العوامل التى تسبب الفروق المشاهدة بين متوسطات العينات . وبعبارة أخرى ، نحتاج لفحص مصادر التغير المحتملة فى بيانات العينة وهي:

(١) احد مصادر الاختلاف المحتملة هو المثمنين . اذا كانت الفروق بين متوسطات العمليات الخاصة بهم موجودة ، فإن ذلك يسبب فروق بين متوسطات العينات . بمعنى آخر ، نحن بحاجة إلى فحص مصادر الأختلاف المحتملة في بيانات العينة.

(٢) وكما فى الفصل السابع ، فإن مصادر الاختلاف الأخرى فى بيانات العينة ، هى الفروق بين قيم الممتلكات والتناقض بين المثمنين . والنقطة الرئيسية هى أنه يمكن إعتبار المصدرين من المصادر العشوائية للتغير . ويعد إختلاف الأصول الذى يسبب التغير (الإختلاف) عشوائي بسبب التجمع العشوائى لخصائص المثمنين على نتائجهم المثمنة فى شكل عشوائى . ويرجع التغير فى البيانات إلى التأثيرات المتحدة لكل العوامل العشوائية والتى يطلق عليها التغير العشوائى فى العينة أو البيانات التجريبية . فعلى سبيل المثال ، إذا كانت الفروق بين قيم الممتلكات أو الأصول هامة أو إذا كان يمكن تقدير التناقض بين المثمنين فإنه قد لا يمكن تقدير الفروق بين المثمنين .

وسوف نفحص بيانياً هذه المصادر للاختلاف فى بيانات المثمنين قبل الأخذ فى الإعتبار طرق رسمية بشكل أكبر للتحليل . وقد تم توضيح مصادر الإختلاف فى بيانات المثمنين بيانياً فى شكل (٨-١) . ويمكن رؤية المصدر الأول وهو الإختلاف بين المثمنين بمقارنة مشاهدات العينة لكل مثمن لمجموعة واحدة مع تلك الأصول بالمثمنين الآخرين . فى شكل (٨-١) لاحظ أن مجموعة المشاهدات للمثمن الثانى تتجه لأن تكون أعلى من تلك الأصول بالمثمنين الأول والثالث . إفترض أنه تم وضع خط عريض على المشاهدات للثلاثة مثمنين وذلك لتغطى عملياً كل المشاهدات . فإذا كان هذا الخط موازياً لمحور السينات ، فمعنى ذلك أنه لا يوجد دليل أن الفروق موجودة بين المثمنين الثلاثة فى المتوسط . وللوهلة الأولى ، لا تظهر الحالة هذه هنا ، ولكن يجب أن نكون حريصون ونتجنب الوصول إلى نتائج سريعة .

وإذا لم تكن النتائج واضحة تماماً ، يجب التحليل بطريقة أكثر رسمية .

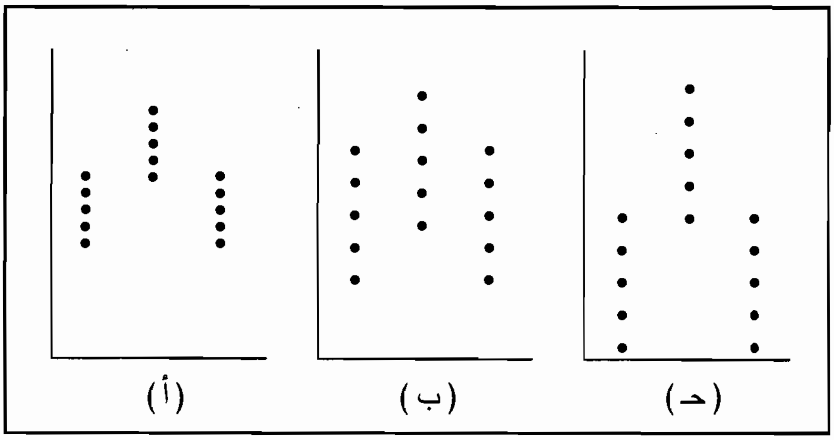


شكل(٨-١) : التحليل البيانى لبيانات المثمنين

وسوف نفحص الآن المصدر الثانى للأختلاف، وهو الخطأ العشوائي. والذى يوصف بالإنتشار داخل مجموعة المشاهدات المرتبطة بكل مثمن. ومن الواضح، أن الإنتشار هو تقريباً المساحة الرأسية من أكبر المشاهدات إلى أصغرها. ويجب ألا يكون للأختلاف داخل العينة ظاهراً بدرجة محسوسة. وإذا كان كذلك، فسوف نعيد التفكير فى قراراتنا بالنسبة لمصادر الخطأ العشوائى (الفروق في قيمة الممتلكات والتناقض بين المثمنين) حيث أنه غير هام. لذلك كلما كان الأختلاف داخل العينة كبيراً كلما ازدادت صعوبة اكتشاف الفروق بين مجموعات المشاهدات المرتبطة بالمثمنين . وفى دراسات العمليات، يمكن أن يُظهر الأختلاف الجوهرى داخل العينة أن العمليات غير مستقرة .

وفى مقارنة الفروق بين الثلاثة مثمنين ، يبدو أن الإنتشار داخل كل قيم المثمنين ظاهراً بدرجة ملحوظة. وبناءً على ذلك، فإن الرسم البيانى الموضح بالشكل(٨-١) لا يوضح ما إذا كان يوجد فروق بين المثمنين. لذلك يلزم أن نعتمد على إختبار إستدلالى أساسى لهذا الغرض. ومن المهم أيضاً الإشارة إلى أن الإنتشار داخل قيم كل مثمن يجعل تلك القيم متماثلة مع القيم الخاصة بالمثمنين الآخرين. ويمكن أن تشير الفروق الكبيرة للانتشار داخل العينة أن إفتراض تساوى التباينات هو إفتراض غير منطقى .

وكما هو مبين فى الشكل (٨-١) ، فإن الفكرة الأساسية لتحديد وجود الفروق بيانياً بين متوسطات المجتمعات أو العمليات هو إيجاد حجم الأختلاف بين العينات بالنسبة لحجم الأختلاف داخل العينة. ويوضح الشكل (٨-٢) هذه الفكرة. فى الشكل (٨-٢-أ) لاحظ أن متوسطات المجتمعات تبدو مختلفة، ومن الصعب الوصول إلى هذه النتيجة بثقة من الشكل (٨-٢-ب) . والفرق الواضح بين الشكلين هو حجم التغير العشوائى داخل مجموعة بيانات العينة. والآن خذ بعين الإعتبار الشكل (٨-٢-ج) . من الواضح مرة أخرى أن متوسطات المجتمعات مختلفة وبالرغم أن التغير العشوائي داخل المجموعات فى (٨-٢-ج) هو نفسه الموجود فى (٨-٢-ب) ، فإن الفروق بين متوسطات المجموعات هى الآن أكبر بكثير.



شكل (٨-٢)
توضيح للترجمة البيانية للتغير داخل العينات مقابل التغير بين العينات

(٨-٢-٢) أسلوب تحليل التباين : تجزئة التغير الكلى فى البيانات

وكما كان الحال فى التطبيقات السابقة، سوف ندرس المدخل البيانى كخطوة أساسية أولى فى التحليل الكلى. وننتقل الآن لطريقة أكثر دقة للاستدلال تسمى تحليل التباين. وهى امتداد مباشر لحالة عينتين مستقلتين والتي قدمت فى الفصل السابع. وتحليل التباين هو إختبار إستدلالى يستند إلى الفكرة القائلة بأنه يمكن تجزئة التغير الكلى فى بيانات العينة بطريقة ما بحيث يمكن تقدير مساهمات العوامل التى تسبب التغير. والهدف النهائى لتحليل التباين هو معرفة أى العوامل تسبب التغير فى بيانات العينة .

ونظراً لأن تحليل التباين هو إختبار إستدلالى، فنحتاج إلى إنشاء إحصائيات مناسبة لحل نفس الموضوعين المقدمين فى الجزء (٥-٤) فى الفصل الخامس، وبصفة خاصة ننشئ إحصاءة لتصف حجم التغير بين العينات. كذلك ننشئ إحصاءة لتصف حجم التغير داخل العينات. وتوضح نسبة بين هاتين الإحصائيتين أهميتهما النسبية (إحصاءة التغير بين العينات مقسومة على إحصاءة التغير داخل العينات). فإذا كانت النسبة كبيرة بدرجة ما، فإن التغير بين العينات يكون أكبر كثيراً بالمقارنة بالتغير داخل العينات. وكما فى التحليل البيانى، فإن هذا يوضح الفروق الموجودة بين متوسطات المجتمعات أو العمليات .

وسوف نعود إلى مثال الخبير المثمن. ونعرف من المناقشة السابقة أن التغير الكلى فى بيانات العينة فى جدول (٨-١) يتكون من المساهمات المركبة لعاملين هى :

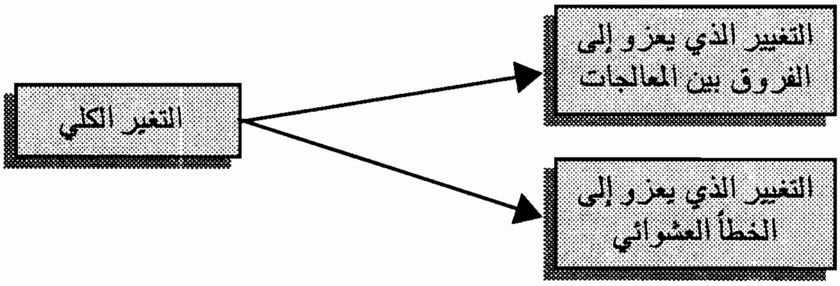
(١) الإختلافات بين المثمنين فى المتوسط .

(٢) الخطأ العشوائى .

تذكر أن الفرض العدمى يقر بأنه لا توجد فروق بين المتوسطات للثلاثة مثمنين. وللوصول إلى إحصاءة مناسبة لإختبار الفرض العدمى، نستخدم بيانات العينة لتقدير مساهمة هذين العاملين. ونرغب فى مقارنة التغير فى بيانات العينة الذى يمكن أن يعزو إلى الفروق بين الثلاثة مثمنين (التغير بسبب المثمن) بالتغير الذى يمكن أن يعزو إلى الأسباب العشوائية (التغير العشوائى). وفى هذا

الخصوص سوف نفكر كالتالى : إذا كان إختلاف المثمنين أكبر كثيراً من الاختلاف العشوائى، نميل إلى رفض الفرض العدمى، ونستنتج أنه يوجد مثمن واحد على الأقل يختلف فى المتوسط عن الباقى. وإذا كان اختلاف المثمنين هو نفسه الاختلاف العشوائى، فنميل إلى قبول الفرض العدمى، وإستنتاج أنه لا يوجد إختلاف بين المثمنين فى المتوسط .

وبصفة عامة، نطلق على المجتمعات أو العمليات محل الدراسة «المعالجات» **treatments**. فإذا كنا ندرس أثر عامل ما عند مستويات مختلفة، فإن هذه المستويات هى المعالجات. والمعالجات فى هذا المثال هى الثلاث مثمنين. ويوضح شكل (٨-٣) تجزئة البيانات إلى مكونات : التغير بسبب الفروق بين المعالجات (فى المثال الحالي هى الثلاث مثمنين) والتغير الذى يعزو إلى الأسباب العشوائية .



شكل (٨-٣)
تجزئة التغير الكلى

وكما أشرنا سابقاً، فإن إنشاء إحصاء (**statistic**) لإختبار الفرض العدمى القائل بأنه لا يوجد فروق بين متوسطات المعالجات، تعتمد على مقارنة التغير الناتج عن المعالجات بالتغير العشوائى، وهذا يتسق مع مبادئ الترجمة البيانية الموضحة فى شكل (٨-٣). وفى الأجزاء القادمة، سوف نوضح كيف نحدد مكونات التغير. وبعد أن نقوم بإنشاء تعبيرات رياضية لكل مكون من مكونات التغير، سوف نعود لإنشاء إحصاء مناسب لذلك .

تحديد حجم التغير الكلى :

بالنسبة لأغلب الأجزاء التالية، سوف نستخدم الحاسب الآلى لإجراء الحسابات فى إختبار تحليل التباين. ومع ذلك ولمساعدتك فى فهم الصيغ الأساسية لكل مكون من مكونات التغير، سوف نوضح ذلك بصحبة مجموعات من بيانات العينة. وكما تعلمنا فى الفصل الثانى، أنه يمكن تحديد التغير الكلى داخل أى مجموعة من البيانات عن طريق حساب مربع الإنحراف لكل مشاهدة من مشاهدات العينة عن المتوسط العام ثم تجميع هذه الإنحرافات المربعة. ومجموع الإنحرافات المربعة يطلق عليه مجموع المربعات الكلى **total sum of squares** ويعرف بالرمز (SST). (ويشار إليه أحياناً باسم مجموع المربعات المصحح) وبالنسبة لمثال المثمن، فإن المتوسط لكل المشاهدات هو :

$$(\overline{X} = (90+94+ \ldots\ldots + 83 + 87)\ /\ 15 = 89.4)$$

لذلك فإن مجموع المربعات الكلى لبيانات العينة هو:

$$SST = (90-89.4)^2 + (94-89.4)^2 + \ldots\ldots + (83-89.4)^2 + (87-89.4)^2 = 195.6$$

وكما تعلم من الفصل الثانى ، فإن SST هو بسط التعبير الرياضى لتباين بيانات العينة*. ماذا تعتقد أن يكون مجموع المربعات الكلى إذا كانت بيانات العينة متماثلة؟ الإجابة هى 0 (صفر) ، نظراً لأنه لا يوجد إنحراف لقيمة المشاهدات عن قيمة متوسطها. لذلك كلما ازدادت قيمة SST، كلما ازداد التغير للمجموعة الكلية لبيانات العينة .

تحديد حجم التغير الكلى الذى يرجع إلى الإختلاف بين المعالجات

أحد مكونات SST يرجع إلى الإختلافات بين متوسطات العينات للمعالجات (الثلاث مثمنين). ويتم تحديد هذا المكون بحساب مربع الإنحراف لمتوسط كل معالجة (عينة) عن المتوسط العام، وضرب كل هذه الإنحرافات المربعة فى حجم العينة المناظر، وإجراء التجميع لكل المعالجات. وتسمى الكمية الناتجة «مجموع المربعات للمعالجات» أو (مجموع مربعات المعالجات **Sum of Squares for Treatments**) ويعرف بالرمز SSTR . وبالنسبة لبيانات العينة فى جدول (٨-١) فإن مجموع مربعات المعالجات هو:

$$SSTR = n_A(\overline{X}_A - \overline{X})^2 + n_B(\overline{X}_B - \overline{X})^2 + n_C(\overline{X}_C - \overline{X})^2$$
$$= 5(89.6 - 89.4)^2 + 5(91.8 - 89.4)^2 + 5(86.8 - 89.4)^2$$
$$= 62.8$$

ماذا تعتقد أن يصبح مجموع مربعات المعالجات إذا تساوت متوسطات العينات؟ الإجابة هى 0 (صفر) وذلك لأن المتوسط العام سوف تكون له نفس القيمة. لذلك، كلما ازدادت قيمة SSTR، كلما ازداد التغير بين متوسطات العينات. والآن إفترض أنه يوجد إختلاف بين متوسطات العينات. هل ذلك يدل ضمناً على أن متوسطات العمليات للثلاث مثمنين مختلفة؟ ليس بالضرورة. إذا كان لا يوجد إختلافات بين المثمنين، فى المتوسط، فسوف تظل متوسطات العينات مختلفة بدرجة معينة بسبب التغير فى التخصيص العشوائي للأصول المطلوب تقييمها وكذلك عدم التناسق والتناقض بين المثمنين. والنقطة الهامة لك هى إدراك أن مجموع المربعات الكلي يقيس التغير الذى يسببه فروق المعالجات والخطأ العشوائى .

تحديد حجم التغير الذى يرجع إلى الخطأ العشوائى :

تذكر أن إنتشار المشاهدات داخل كل معالجة (المثمن الواحد) يعكس تغير الخطأ العشوائى. ويتم تحديد مكون الخطأ العشوائى من مكونات SST عن طريق حساب مربع الإنحرافات للمشاهدات الفردية عن متوسط العينة، ومن ثم تجميع هذه الإنحرافات لكل المشاهدات فى مجموعة البيانات الكلية. ونظراً لأن هذه الكمية تحدد مساهمة الخطأ العشوائى فإنها تسمى مجموع المربعات للخطأ، (أو مجموع مربعات الخطأ **Sum of Squares for Error**) ويعرف بالرمز SSE. وبالنسبة لبيانات العينة فى جدول (٨-١) فإن مجموع مربعات الخطأ هو :

* وكمرجع، نكرر التعبير الرياضي لتباين العينة

$$S^2 = \frac{SST}{n-1} = \frac{\sum(x_i - \overline{x})^2}{n-1}$$

تذكر انه إذا وجد لدى آلتك الحاسبة مفاتيح الدوال الإحصائية، يمكنك تحديد قيمة SST بسهولة بإدخال البيانات، والضغط على مفتاح الإنحراف المعياري للعينة، وتربيع الإنحراف المعياري ومن ثم ضرب الناتج فى (n-1) أى أن : $SST= (n-1)S^2$

$$SSE = (X_{1A} - \overline{X}_A)^2 + ... + (X_{5A} - \overline{X}_A)^2$$

عينة المثمن الأول : $(90-89.6)^2 + ... + (88-89.6)^2$

$$+ (X_{1B} - \overline{X}_B)^2 + ... + (X_{5B} - \overline{X}_B)^2$$

عينة المثمن الثاني : $(93 - 91.8)^2 + ... + (90-91.8)^2$

$$+ (X_{1C} - \overline{X}_C)^2 + ... + (X_{5C} - \overline{X}_C)^2$$

عينة المثمن الثالث: $(92-86.8)^2 + ... + (87-86.8)^2$

$$= 132.8$$

ماذا تعتقد أن يكون مجموع مربعات الأخطاء، إذا كانت جميع المشاهدات داخل كل عينة مثمن واحدة (ولكن ليس بالضرورة أن تتساوى مع تلك الخاصة بالمثمنين الآخرين)؟ ومرة أخرى ستكون الإجابة 0 (صفر) حيث لا يوجد إختلاف لمشاهدات المثمن الواحد عن متوسطه. وكلما ازدادت قيمة SSE، كلما ازداد التغير بين المشاهدات داخل كل معالجة (بمعنى، داخل كل عينة مثمن) .

لقد تحدثنا عن تجزئة مجموع المربعات الكلى. بالنسبة لبيانات المثمن، حددنا مجموع المربعات الكلى، مجموع مربعات المعالجات، مجموع مربعات الخطأ وهم : , $SST = 195.6$, $SSTR = 62.8$ $SSE = 132.8$. لاحظ أنه بإضافة مجموع مربعات الخطأ إلى مجموع مربعات المعالجات، ينتج مجموع المربعات الكلى = $195.6 = 62.8 + 132.8$. ويوضح هذا المثال طبيعة تجزئة مجموع المربعات الكلى، كما هو موضح بالشكل (٨-٣) . لذلك فإن تجزئة مجموع المربعات الكلى ينتج علاقة عامة هامة هى :

$$SST = SSTR + SSE \qquad \textbf{(8.1)}$$

ويوضح التعبير الرياضى (8.1) أن مجموع المربعات الكلى يساوى مجموع مربعات المعالجات مضافاً إليه مجموع مربعات الخطأ. وهذه العلاقة صحيحة بصفة عامة لأى عدد من المعالجات (ولأى عدد من العينات المستقلة) .

لقد ناقشنا الأسلوب البيانى لتحليل البيانات لتحديد ما إذا كان هناك إختلاف بين متوسطات المجتمعات أو العمليات أم لا. ويعتمد هذا التحليل على المقارنة الفعلية لتغير البيانات داخل العينات بالنسبة للتغير بين العينات. ولقد أنشأنا طريقة لتحديد مقدار التغير الكلى داخل العينات (SSE) وكذلك تحديد مقدار التغير الكلى بين العينات (SSTR) . وقد يكون غير صحيح أن نقارن بين قيم كل من SSTR ، SSE مباشرة، لأن كل واحد منهم مقدار كلي. لذلك كلما ازداد عدد المعالجات المأخوذ فى الإعتبار كلما ازدادت قيمة SSTR التى تمثلها. والحقيقة المجردة القائلة بأننا نقارن، مثلاً، عشرة معالجات وليست ثلاثة معالجات يجب ألا تكون عامل مأخوذ فى الإعتبار إذا ما كانت فروق المعالجات موجودة. بالمثل، كلما ازداد عدد المشاهدات داخل العينة، كلما ازدادت قيمة SSE التى تمثلها. وقبل مقارنة هذه الكميات ببعضها البعض بطريقة هادفة، فإننا نحتاج إلى تحويلها إلى متوسطات: بمعنى أنه يجب تحويل SSTR إلى متوسط التغير بين العينات وتحويل SSE إلى متوسط التغير داخل العينات .

تحديد متوسط الأختلافات داخل العينات ، بين العينات : متوسط المربعات

لقد علمنا من الفصل الثانى أن تباين العينة S^2 لأى مجموعة من بيانات العينة يعطى تقديرا لمتوسط مربع انحرافات مشاهدات المجتمع عن متوسط المجتمع . ويتم الحصول على التباين بقسمة مجموع المربعات الكلى (SST) على درجات الحرية المرتبطة به (n-1). وبأسلوب مماثل، تباين متوسطات (العينة) للمثمنين الثلاثة هو مجموع مربعات المعالجات مقسوماً على درجات حرية المعالجات . ونظراً لأنه يوجد ثلاثة مثمنين، لذلك يوجد $[2 = (3-1)]$ درجة حرية للمعالجات . وتباين متوسطات العينات هو المقدار SSTR مقسوماً على درجات حريته . ويعرف هذا المقدار بمتوسط المربعات للمعالجات (متوسط مربعات المعالجات) **mean square for treatments** ويعرف بالرمز MSTR .

وبصفة عامة، إذا كان يوجد K معالجة فإن مجموع مربعات المعالجات له (K-1) درجة حرية. لذلك، بالنسبة لمثال المثمن، SSTR له (K-1) درجة حرية أى $[2 = (3-1)]$ درجة حرية، لذلك فإن التباين الذى يعزى إلى الفروق بين متوسطات المثمنين هو :

$$MSTR = \frac{SSTR}{k-1} = \frac{62.8}{3-1} = 31.4$$

والآن نحتاج إلى وصف متوسط الاختلاف داخل العينات (بمعنى الاختلاف الذى يعزى إلى الخطأ العشوائى). ويتكون التباين داخل العينات من مجموع مربعات الخطأ مقسوماً على درجات الحرية الخاصة به. ودرجات الحرية للخطأ العشوائى هى مجموع درجات الحرية لكل عينة مستقلة. وبالنسبة لمثال المثمنين، يوجد $[4 = (5-1)]$ درجة حرية لكل عينة من الثلاث عينات المستقلة. لذلك فإن درجات الحرية للتباين داخل العينات هو 12 . وبصفة عامة فإن درجات حرية الخطأ تتحدد بالعدد الكلى للمشاهدات فى مجموعة البيانات (n) مطروحاً منه عدد المعالجات (K) . ويعرف المقدار SSE مقسوماً على درجات حريته بمتوسط المربعات للأخطاء (متوسط مربعات الأخطاء) ويعرف بالرمز MSE . لذلك فإن التباين داخل العينات هو :

$$MSE = \frac{SSE}{n-K} = \frac{132.8}{12} = 11.0667$$

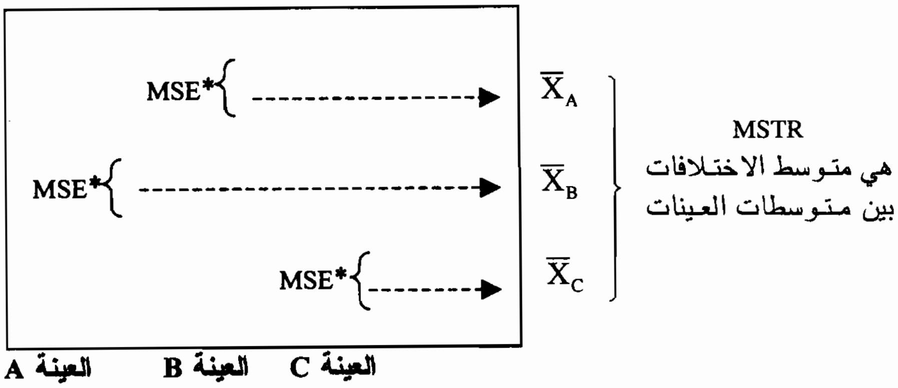
وفى الواقع ، فإن متوسط مربعات الأخطاء هو امتداد مباشر لمفهوم التباين التجميعي المستخدم فى الفصل السابع لمقارنة المتوسطات المعتمدة على عينتين مستقلتين. وتذكر أن تباينات المجتمعات الغير معلومة σ_A^2 ، σ_B^2 ، σ_C^2 تصف التغير داخل مجتمع كل مثمن. وإن تباينات العينات المماثلة تصف التغير داخل عينة كل مثمن. ونظراً لأنه تم افتراض أن تباينات المجتمعات متساوية، لذلك يمكن تقدير القيمة المشتركة σ^2 بتجميع تباينات العينات، مع الأخذ فى الإعتبار أحجام العينات الخاصة بهم كما كنا نفعل بالنسبة لعينتين مستقلتين. وفى مثال المثمنين المستخدم كتوضيح ، هذا يعنى أن :

$$MSE = \frac{(n_A - 1)S_A^2 + (n_B - 1)S_B^2 + (n_C - 1)S_C^2}{(n_A - 1) + (n_B - 1) + (n_C - 1)}$$

$$= \frac{(5-1)(11.3) + (5-1)(9.2) + (5-1)(12.7)}{4+4+4} = \frac{132.8}{12}$$

$$= 11.0667$$

وهي نفس القيمة التى حصلنا عليها للمقدار MSE . لاحظ أيضاً أن البسط، 132.8 هو القيمة المحسوبة سابقاً للمقدار SSE . ويوضح شكل (٨-٤) هذه المقادير فى تحليل بيانى لشكل (٨-١). وسوف نستخدم الآن هذه المقادير لإنشاء إختبار أكثر دقة لوصف الفروق بين المعالجات فى المتوسط.



*** MSE متوسط التغير داخل العينات**

شكل (٨-٤)

مقادير MSTR , MSE المماثلة مع تحليل التباين البياني المعروض فى شكل (٨-١)

وسيلة إختبار تحليل التباين ANOVA

والآن نقوم بإنشاء الإحصائيات التى تحدد حجم متوسط الاختلاف بين العينات MSTR وحجم متوسط الاختلاف داخل العينات (MSE) حتى تكون المقارنة ذو معنى وهدف. والوسيلة الرئيسية فى إختبار تحليل التباين هى النسبة (MSTR/MSE). وكلما ازدادت هذه النسبة، كلما ازداد التغير بين العينات بالمقارنة بالتغير داخل العينات. ومن ثم وجود دليل قوى ضد الفرض العدمى القائل بأنه لا يوجد فروق بين متوسطات المجتمعات أو العمليات.

ويجب الآن أن تعرف أن إختبار الفروض الإحصائية يتطلب أن نعرف توزيع المعاينة الذى سوف يستخدم في ظل الإفتراض المؤقت القائل بأن الفرض العدمى صحيح. وتوزيع المعاينة للنسبة (MSTR / MSE) هو توزيع F بدرجات حرية (K-1) للبسط، (n-K) للمقام، هذا إذا كان الفرض العدمى صحيح. (وقد تم تقديم توزيع F فى الفصل السابع فى الجزء (٦-٧) والإحصائية أو الوسيلة المناسبة لإختبار تحليل التباين هى :

$$F = \frac{MSTR}{MSE} \qquad (8.2)$$

وبالنسبة لمثال المثمنين ، إذا كان الفرض العدمى صحيح، فإن توزيع المعاينة لوسيلة الأختبار هو توزيع F بدرجات حرية 2 ، 12 . لاحظ أن القيم الكبيرة لهذه النسبة تبين التغير الكبير بين العينات بالمقارنة بالتغير داخل العينات. وفى الواقع إذا كان H_0 صحيحاً فإننا نتوقع أن يكون MSTR≈MSE وبالتالي فإن (MSTR / MSE≈1) بمعنى قريبة من الواحد. وإذا كان MSTR أكبر بكثير من MSE (أو أن MSTR / MSE أكبر كثيراً من الواحد الصحيح) فسوف يكون منطقياً أن يعزى التغير الكبير بين العينات إلى الفروق بين متوسطات المجتمعات، لذلك فإن دليل العينة ينكر صحة الفرض العدمى فقط فى حالة القيم الكبيرة للنسبة (F = MSTR / MSE) . وكنتيجة لذلك فإن إختبار تحليل التباين هو إختبار جانب واحد (طرف واحد). وكما هو معتاد، كلما كانت قيمة P صغيرة (P - value) كلما كان الفرض العدمى أقل قبولاً، وكلما إزدادت درجة التأكد أن هناك إختلاف بين متوسطات المجتمعات.

وسوف نكمل إختبار تحليل التباين لمثال المثمنين. وقيمة الإحصاء F هى :

$$F = \frac{31.4}{11.0667} = 2.84$$

وقيمة P (P - value) عندما تكون قيمة (F = 2.84) يمكن إيجادها باستخدام الحاسب الآلى وهى 0.098 ؛ أى أن إحتمال ملاحظة قيمة F التى تساوى 2.84 أو أكبر هى 0.098 إذا كان الفرض العدمى القائل بأنه لا يوجد فروق بين المعالجات صحيح. وعلى الرغم من وجود دليل على وجود فروق بين الثلاثة مثمنين، إلا أن الدليل ليس كافى. فإذا كان يوجد فروق بين متوسطات عملياتهم، فسوف يكون التغير العشوائى داخل العينات كبير جداً للإختبار لإكتشاف الفروق بدرجة ثقة كبيرة .

ولاحظ أنه لا يمكن الحصول على قيمة P (P-value) عندما (F = 2.84) مباشرة من الجدول. حيث يعطى جدول (E) الموجود فى الملحق القيم الجزيئية لتوزيع F المناظرة لقيم الإحتمالات 001 , 0.025 , 0.05 , 10. , 90. , 975. , 99 . وبالنسبة لدرجات الحرية (2 , 12) نجد أن $F_{.90,2,12} = 2.81$, $F_{.95,2,12} = 3.89$ ونظراً لأن القيمة 2.84 تقع بين القيمتين السابقتين. لذلك نعرف أنه يلزم أن تقع قيمة P بين 0.05 , 0.10 (وكما أوضحنا فإن P-value هى 0.098) .

الإستنتاجات العملية لمثال المثمنين أو المسعرين

ماذا يجب على المدير عمله عندما تكون النتائج غير واضحة على الإطلاق؟ فإذا كانت الإختلافات بين متوسطات عينات المسعرين كبيرة بدرجة كافية لكى يهتم المدير، فإنه يجب عليه محاولة تقليل حجم اختلافات الخطأ العشوائى فى البيانات. وهذا يمكن تحقيقه، على سبيل المثال، بالتجميع بالنسبة لقيم الأصول. (يجب أن يقيم المسعرين نفس المجموعة من الأصول). وفى هذه الحالة تدخل قيمة كل أصل فى قطاع من البيانات. وسوف يتم مناقشة التجميع فى قطاعات فى الجزء (٨-٣). وإذا لم يكن لدى المدير دليل مستقل قوى على وجود فروق بين المثمنين (المسعرين) من مصادر أخرى بخلاف هذه الدراسة، سوف يكون شئ سابق لأوانه لتنفيذ برامج تدريب جديدة. فإذا أخذ بعين الإعتبار إهمال الفروق الموجودة بين المسعرين، فإنه لا توجد حاجة لتوسيع هذه الدراسة أو تنفيذ برنامج تدريب .

إن تحديد مجاميع المربعات (SSE , SSTR , SST)، درجات الحرية ومتوسطات المربعات (MSE , MSTR)، وقيمة الاحصاء F (التى تشير فيما بعد إلى قيمة F) يكون قد تشكل إختبار تحليل التباين. وعادة يتم تجميع هذه النتائج وعرضها بجدول تحليل التباين. ويقدم جدول تحليل التباين أسلوب مناسب لتجميع المقادير وثيقة الصلة بالموضوع لإختبار الفرض العدمى المحدد. وجدول (٨-٢) هو جدول تحليل التباين لمثال المسعرين. لاحظ أنه قد تم عرض مجموع المربعات فى عمود «SS»، ثم عرض درجات الحرية فى عمود «df»، ثم عرض متوسط المربعات فى عمود «MS» وثم عرض قيمة الإحصاء F فى عمود F-value . وليست من الممارسة العملية أن يشتمل جدول تحليل التباين على قيمة P - value . ولكنها فكرة جيدة نظراً لأنها تكمل إختبار الفرض العدمى وغالباً ما تكون متاحة من إستخدام الحاسب الآلى .

جدول (٨-٢)
جدول تحليل التباين لمثال المسعرين

مصدر الإختلاف	Df	SS	MS	F-value	P-value
المسعرين	2	62.8	31.4	2.84	.098
الخطأ	12	132.8	11.0667		
التغير الكلي	14	195.6			

فى جدول (٨-٢) لاحظ أن درجات الحرية الكلية هى [(n-1) = 15-1 = 14] ودرجات الحرية الكلية هى ببساطة درجات الحرية المرتبطة بتباين العينة بأكملها التى تحوى (n = 15)مشاهدة. لاحظ أيضاً أن مجموع درجات الحرية الكلى (2+12=14) . وهذا صحيح بصفة عامة . وكما يمكن تجزئة مجموع المربعات الكلى إلى مجموع مربعات المعالجات ومجموع مربعات الخطأ، يمكن أيضاً تجزئة درجات الحرية الكلية بنفس الطريقة .

(٨-٢-٣) تعميم أسلوب تحليل التباين لعدد K من العينات المستقلة :

لتعميم التحليل السابق لأى عدد من العينات المستقلة، نعرف المقادير التالية التى يتضمنها أسلوب تحليل التباين :

المقادير اللازم حسابها لإجراء تحليل التباين لعدد من العينات العشوائية المستقلة :

K = عدد العينات المستقلة (بمعنى عدد المعالجات) .

n_j = حجم العينة للمعالجة رقم j .

$n = n_1 + n_2 + \ldots\ldots n_k$

n = العدد الكلى للمشاهدات فى العينة بأكملها .

i = دليل يشير إلى رقم المشاهدة داخل العينة $(i = 1 , 2 , \ldots . n_j)$

j = دليل يشير إلى عينة المعالجة $(j = 1 , 2 , \ldots k)$

X_{ij} = المشاهدة رقم i لعينة المعالجة رقم j فى البيانات .

$\overline{X}$ = متوسط كل المشاهدات فى البيانات كلها .

T = مجموع كل المشاهدات فى البيانات كلها .

$\overline{X}_j$ = متوسط المشاهدات فى عينة المعالجة رقم j .

T_j = مجموع المشاهدات فى العينة رقم j .

الصيغ العامة لمجموع مربعات تحليل التباين كما يلي:

$$SST = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} \left(X_{ij} - \overline{x}\right)^2 \qquad (8.3)$$

$$SSTR = \sum_{j=1}^{k} n_j \left(\overline{X}_j - \overline{X}\right)^2 \qquad (8.4)$$

$$SSE = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} \left(X_{ij} - \overline{x}_j\right)^2 \qquad (8.5)$$

درجات الحرية :

يوجد (k-1) درجة حرية خاصة بالمقدار SSTR ، ويوجد (n-k) درجة حرية خاصة بالمقدار SSE، يوجد (n-1) درجة حرية خاصة بالمقدار SST . وكما أشرنا فى مثال المسعرين، يتم تجزئة درجات الحرية كالتالى :

$$(n-1) = (k-1) + (n-k) \qquad (8.6)$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

d f الكلية = d f المعالجات + d f الخطأ العشوائى

حيث n هى العدد الكلى للمشاهدات فى بيانات العينة المبوبة، k هى عدد المعالجات.

وقد يكون مفيداً أن تتذكر أن درجات حرية المقدار SST هو عدد المشاهدات الكلى فى البيانات المبوبة مطروحاً منها واحد، ودرجات حرية المقدار SSTR هو عدد المعالجات مطروحاً منها واحد. أما درجات حرية المقدار SSE يمكن تحديده بطرح عدد المعالجات من عدد المشاهدات الكلية.

متوسط المربعات :

وكما أوضحنا، فإنه يتم تحديد متوسط المربعات بقسمة مكونات مجموع المربعات على درجات حريته المناظرة. أي أن متوسط المربعات هو :

$$MSTR = \frac{SSTR}{k-1} \qquad (8.7)$$

$$MSE = \frac{SSE}{n-k} \qquad (8.8)$$

إختبار تحليل التباين :

لإختبار الفروض :

$$H_O : \mu_1 = \mu_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots = \mu_k$$

H_a : أحد هذه المتوسطات على الأقل يختلف عن الباقى

نقارن التباين بين العينات بالتباين داخل العينات بإيجاد النسبة F (F= MSTR/MSE) . إذا كان الفرض العدمى صحيح، فإن توزيع المعاينة سيصبح توزيع F بدرجات حرية (k-1)، (n-k). وتحليل التباين هو إختبار طرف واحد، لأن الدليل ضد الفرض العدمى يتواجد فقط عندما يكون التباين بين العينات كبير (MSTR) بالمقارنة بالتباين داخل العينات MSE. كلما كانت قيمة P المماثلة لقيمة F المحددة صغيرة، كلما كان دليل العينة قوى فى مواجهة الفرض العدمى. وجدول تحليل التباين الذى يضم معلومات عن تحليل التباين لعدد K من المعالجات (عدد k عينة مستقلة) موضح فى جدول (٨-٣).

جدول (٨-٣)
جدول تحليل التباين العام لعدد k عينة مستقلة

مصدر الإختلاف	D f	SS	MS	F-value	P-value
المعالجات	k-1	SSTR	MSTR	MSTR/MSE	من الحاسب الآلي
الخطأ	n-k	SSE	MSE		
التغير الكلي	n-1	SST			

مثال (٨-١)

يستخدم مصنع للتعبئة أربعة آلات لعملية التعبئة. وقد تم تصميم الآلات لتسكب نفس وزن المنتج داخل كل حاوية. ويوجد سبب واحد يمكن أن يسبب التغير فى العملية هو الفروق بين الآلات فى متوسط الحجم المسكوب بالفعل. وفى إطار بذل الجهد لتقليل هذا التغيير، قامت مديرة المصنع بتصميم تجربة لمقارنة متوسط الأحجام المسكوبة من قبل الآلات. وقد اختارت عشوائياً عدد من الحاويات المعبأة بواسطة كل آلة وقامت بوزن المحتويات. وبيانات العينة المعطاة فى جدول (٨-٤) .

جدول (٨-٤)
بيانات العينة لعملية التعبئة (الأحجام بالأونس)

الآلـة

1	2	3	4
5.24	5.20	5.19	5.17
5.22	5.20	5.20	5.18
5.22	5.21	5.18	5.19
5.23	5.22		5.19
5.23			
$n_1=5$	$n_2=4$	$n_3=3$	$n_4=4$
$\overline{X}_1=5.2280$	$\overline{X}_2=5.2075$	$\overline{X}_3=5.1900$	$\overline{X}_4=5.1828$
$S_1^2=.00007$	$S_2^2=.00009$	$S_3^2=.00010$	$S_4^2=.00009$

(a) لخص البيانات بيانياً. ماذا تظهر البيانات بخصوص الأحجام المسكوبة عن طريق الآلات الأربعة؟

(b) إستخدم إختبار تحليل التباين لتحديد إلى أى مدى تظهر البيانات أن الآلات تسكب أحجام مختلفة فى المتوسط وذلك بطريقة دقيقة .

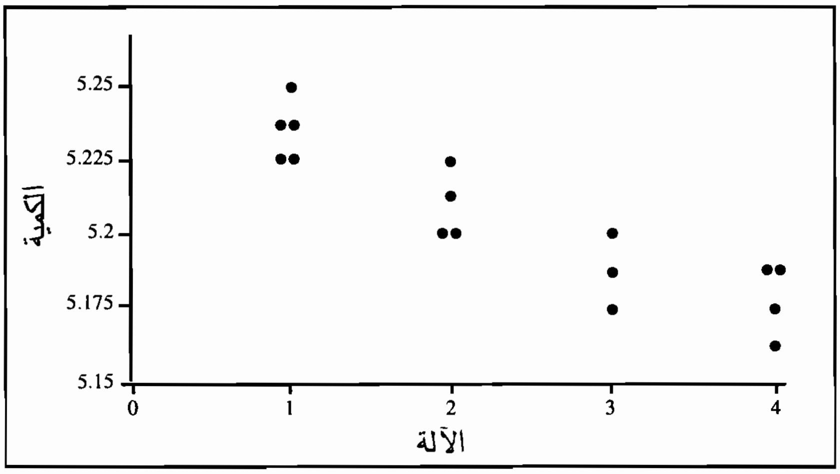
الحل

سوف نأخذ أولاً بعين الإعتبار المصادر التى يمكن أن تساهم فى تغير بيانات العينة وفى تحليل التباين، نجد أن المعالجات هى الأربعة آلات. والذى نرغب فى تحديده هو ما إذا كان يمكن أن تعزى الفروق المشاهدة بين متوسطات العينات إلى الفروق بين متوسطات العملية للأربعة آلات أم لا. والسبب المكن للتغير العشوائى هو التناقض وعدم التناسق بين الآلات؛ التغير فى المواد الخام، عمال التشغيل، والظروف البيئية، وأى تغير فى دقة عملية القياس .

(a) ومن بيانات العينة، نلاحظ أن متوسط الحجم المسكوب عن طريقة الآلة الأولى أكبر من ذلك الخاص بالآلات الأخرى، خاصة الآلات (3) ، (4) . ويتم توضيح بيانات العينة بيانياً فى شكل (٨-٥) بنفس الأسلوب المتبع فى مثال المسعرين. وللمقارنة بهذا المثال (انظر شكل ٨-١) .

ويبدو أن التغير داخل كل عينة صغير، ولكن الاختلاف بين العينات كبيراً إلى حد ما. وقد يكون

من الصعب أن نتخيل (نتصور) الحد أو الشريط الأفقى الذى يغطى فعلياً كل المشاهدات. وبناءً على ذلك، يبدو أن الفروق بين متوسطات العينات لا تعكس فقط تغير المعاينة العشوائية. ويجب ألا تندهش عند رؤية إختبار تحليل التباين فى المطلوب (b) التالي يوضح بقوة هذه الفروق، فى المتوسط، بين الأربعة آلات الموجودة بالفعل. لاحظ أن انتشار بيانات العينة للآلات الأربعة يميل إلى أن يكون متشابهاً. لذلك يجب ألا يكون هناك إهتمام زائد بالبحث عن فرض تساوى التباينات .



شكل (٨-٥)

التحليل البيانى لبيانات التعبئة

(b) بالنسبة لإختبار تحليل التباين ، نفترض أن الأحجام المسكوبة عن طريق الآلات الأربع من k=4 مجتمعات لها تباينات متساوية. وإفترض أن μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 تشير إلى متوسطات الأربعة مجتمعات .

لذلك نرغب فى إختبار الفرض العدمى التالى :

$$H_O : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$$

مقابل الفرض البديل .

H_a : يوجد على الأقل واحد من هذه المتوسطات يختلف عن الباقي

وقد استخدمنا برنامج Minitab للحصول على النتائج المعطاة فى جدول (٨-٥). وإذا كنت ترغب فى إجراء الحسابات خطوة بخطوة للمقادير المختلفة فى جدول (٨-٥) انظر ملحق (٨ ب) . ولاحظ من الجدول أن قيمة P-value هى 0.0001 (وإذا كنا نعتمد على جدول توزيع F فى الملحق، سوف نجد أن قيمة F هى 20.79 وهى أكبر من الجدولية Quintile value ($F_{993,2,12}$=5.95) . وهذا يخبرنا بأن قيمة P ستكون أقل من 0.01 . ونظراً لأن قيمة P (P-value) هى عملياً تساوى الصفر، فإن دليل العينة ينكر صحة الفرض العدمى ويؤكد بدرجة ثقة عالية النتيجة المبدئية التى حصلنا عليها استناداً إلى التحليل البيانى - حيث يوجد آلة واحدة على الأقل من هذه الآلات لا تسكب نفس حجم المنتج، فى المتوسط .

جدول(٨-٥)

جدول تحليل التباين لمثال (٨-١)

مصدر الإختلاف	Df	SS	MS	F-value	P-value
الآلات	3	.005364	.001788	20.79	.0001
الخطأ	12	.001030	.000086		
التغير الكلي	15	.006394			

الإستنتاجات العملية :

من نتائج تحليل التباين فى مثال (٨-١)، من الواضح أنه يوجد آلة واحدة على الأقل تسكب حجم منتج مختلف عن الباقى، فى المتوسط، ومن الحكمة التأكد من خلال المعاينة الإضافية أن هذه الحالة ليست مؤقتة. والخطوة الثانية المنطقية التى يجب أن تقوم بها المديرة مشاهدة الآلة 1 لأنها تبدو مختلفة عن الآلات 3 ، 4 (حيث يبدو أن الآلتين 3 ، 4 متماثلتين) . ويمكن تأكيد ذلك بإستخدام الإختبار المقدم فى الجزء (٨-٤) - وعلى ذلك يمكن أن تقوم المديرة بتقييم الأربعة آلات لإلغاء الفروق الظاهرة .

إستخدام الحاسب الآلى :

عملياً، يوجد مئات من حزم البرامج الإحصائية المتاحة التى تقوم بإجراء إختبار تحليل التباين لبيانات العينة المبوبة. ومن المهم بالنسبة لك إدراك ذلك، وعلى الرغم من أنه يمكن أن تستخدم الحزم المختلفة رموز مختلفة لمصادر التغير، إلا أنها واقعياً تعطى مجموع المربعات، درجات الحرية، متوسط المربعات، قيمة F ، والقيمة المناظرة لهذه المقادير P (p-value) .

والآن نوضح طريقة إستخدام الحاسب الآلى المعتادة لبرامج Minitab ، SAS ويوجد فى ملحق (٨-أ) المرافق لهذا الفصل تعليمات إستخدام الحزمتين لتنفيذ إختبار تحليل التباين. ونوضح فى المثال التالى نتائج تحليل التباين بإستخدام برنامج Minitab .

مثال (٨-٢)

عامل هام فى تدفئة المنازل هو حجم المادة العازلة المستخدمة فى التسقيف. وبيانات العينة التالية مقاسة بالكيلووات فى الساعة (بالمئات) المستخدمة فى شهر معين بواسطة أنظمة التدفئة لعينة بمنازل مشابهة كدالة لخمس أحجام مختلفة من المادة العازلة المستخدمة فى التسقيف (بالبوصة) .

(a) استناداً إلى التحليل البيانى، ماذا تظهر هذه البيانات بخصوص تأثير سمك المادة العازلة المستخدمة فى التسقيف على التدفئة ؟

(b) استناداً إلى إختبار تحليل التباين، هل يوجد سبب قوى للاعتقاد بأن متوسط استهلاك الطاقة يتغير لخمس أحجام المادة العازلة المستخدمة فى التسقيف؟

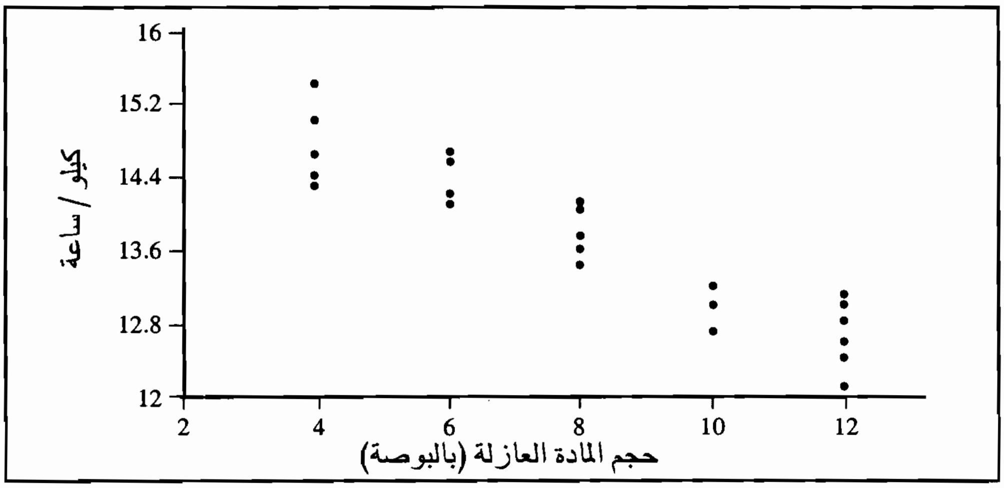
in = بوصة

4 in.	6 in.	8 in.	10 in.	12 in.
14.4	14.5	13.8	13.0	13.1
14.8	14.1	14.1	13.4	12.8
15.2	14.6	13.7	13.2	12.9
14.3	14.2	13.6		13.2
14.6		14.0		13.3
				12.7

الحل

نفترض أن كل حجم للمادة العازلة المستخدمة فى التسقيف (المعالجات) فى هذا المثال، تمثل مجتمع استهلاك الطاقة الذى حصلنا منه على العينة الموضحة. ونفترض أيضاً أن توزيعات المجتمعات لكل حجم للمادة العازلة المستخدمة فى التسقيف هو التوزيع الطبيعى بتباينات متساوية. ويعنى إستخدام المنازل المتشابهة جداً أى أن كل المنازل التي لها نفس الحجم، لديها نفس نوع نظام التدفئة ولديها نفس حجم المادة العازلة للحائط، ولديها نفس نوع مسار الجو (مسار يملأ الفراغ بين الباب أو النافذة وبين إطارهما)، وتم إنشائهم فى نفس المنطقة الجغرافية. وهذا يؤكد أن التغير فى استهلاك الطاقة الذى تسببه الفروق بين المنازل فى كل حجم للمادة العازلة المستخدمة فى التسقيف يمكن أن يعزى إلى الخطأ العشوائى. وطبقاً لذلك فإن التغير الكلى ناتج عن التغير الذى تسببه الفروق بين أحجام المواد العازلة المستخدمة فى التسقيف (المعالجات) والتغير العشوائى.

(a) ويتم توضيح التغير داخل العينات والتغير بين العينات بيانياً فى شكل (٨-٦). لاحظ أن عدد الكيلو وات / ساعة لكل شهر يتناقص بإستمرار كلما ازداد حجم المادة العازلة المستخدمة فى التسقيف. ويظهر من هذا الشكل أن الفروق موجودة بين متوسطات المجتمعات (عدد الكيلو وات / ساعة) المستخدمة للخمس أحجام للمادة العازلة المستخدمة فى التسقيف المأخوذة فى الإعتبار. بالإضافة إلى ذلك، التشتت داخل العينات للخمس مستويات لا يظهر فرق جوهرى يمكن أن يسبب قلق بخصوص إفتراض تساوى التباينات .



شكل (٨-٦)

العرض البيانى لبيانات مثال المادة العازلة المستخدمة فى التسقيف

(b) نتائج برنامج Minitab لجدول تحليل التباين لبيانات العينة موضح فى جدول (٨-٦). لاحظ أنه فى عمود source يستخدم مصدر المعالجات الرمز المجهز للإستخدام thikness (وهذا ليس خطأ فى التهجئة : لأن أسماء متغيرات برنامج Minitab محددة بثمانية أحرف) وعلى اليمين توجد قيمة F (36.46) ، وتجد أن قيمة P هى (.000) . يطبع برنامج Minitab قيمة P بثلاثة أرقام عشرية فقط. وحيث إن قيمة P صغيرة، فإنه يمكن إنكار صحة الفرض العدمي بدرجة ثقة عالية. لذلك يؤكد إختبار تحليل التباين النتيجة التى توصلنا إليها من التحليل البياني : هو أن متوسط استهلاك الطاقة غير متساوى للخمس أحجام للمادة العازلة المستخدمة فى التسقيف المأخوذة فى الإعتبار .

جدول (٨-٦)

مخرجات برنامج Minitab لمثال (٨-٢)

```
Factor        Type       Levels      Values
thikness      fixed           5           4       6     8     10     12
Analysis of Variance for kilowatt

Source          DF          SS           MS             F          P
thikness         4       9.836      2.45889         36.46      0.000
Error           18       1.214      0.06744
Total           22      11.050      0.50225
```

لاحظ أن النتائج تشتمل على معلومات إضافية تعلو جدول تحليل التباين فنجد أن تحت العنوان Factor يستخدم الرمز المجهز للإستخدام Thikness ليعرف المعالجات. وأيضاً عدد المعالجات معطى تحت عنوان Levels (5)، والعدد المجهز للإستخدام لكل حجم من المادة العازلة المستخدمة فى التسقيف موجودة تحت عنوان Values (4 , 6 , 8 , 10 and 12)

تمارين

(٨-١) إشرح ماذا نعنى بالمعالجات ؟

(٨-٢) إشرح الغرض من تحليل التباين عندما k=5 معالجات ؟

(٨-٣) إفترض أنه يوجد k=4 معالجات، وقد تم أخذ عينة حجمها ستة مشاهدات لكل معالجة :

(a) حدد المصادر الممكنة للتغير فى بيانات العينة ؟

(b) فيما يتعلق ببيانات العينة ، إشرح بماذا تصف كل مصدر من مصادر التغير ؟

(٨-٤) ناقش ما إذا كان يمكن الإستعاضة بالتحليل البيانى عن إختبار تحليل التباين أم لا؟

(٨-٥) ناقش الإحصائيات الوثيقة الصلة بموضوع إختبار تحليل التباين ؟

(٨-٦) إفترض أنه يوجد k=3 معالجات. قد تم أخذ عينة حجمها خمس مشاهدات لكل معالجة. وإفترض أيضاً أن مشاهدات العينة متماثلة تماماً بالنسبة لكل معالجة، ولكنها مختلفة عن مشاهدات العينة للمعالجات الأخرى :

(a) بدون معرفة قيم المشاهدات ، ماذا يمكن أن تكون قيمة SSE ؟

(b) بصفة عامة إشرح ماذا تقيس المقادير SST , SSTR , SSE .

(٨-٧) هناك إعتقاد بزيادة حجم المبيعات لمنتج معين عندما تعرض بعض وحداته بجوار منافذ البيع،

بالإضافة إلى مكان عرضها المعتاد، عن حجم المبيعات عندما توضع الوحدات فقط فى مكان عرضها المعتاد. والجدول التالى يمثل عينات عشوائية لحجم مبيعات 12 يوم للوحدات :

مكان واحد	98	110	112	96	94	98	106	112	92	96	108	104
مكانين	112	99	125	132	98	116	124	99	128	124	116	119

وبإفتراض أنهم عينتين عشوائيتين مأخوذتين من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعى بتباينات متساوية .

(a) إستخدم اختبار مناسب من الفصل السابع لتحديد إلى أى مدى يمكن لدليل العينة أن ينكر الإدعاء القائل بأنه لا يوجد فروق بين مستويات أحجام المبيعات فى المتوسط. دعم إجابتك.

(b) إستخدم مدخل تحليل التباين لإجابة السؤال فى الجزء (a) وقارن بين إجابتك ؟

(٨-٨) فى دراسة حديثة فى كلية صغيرة للفنون الليبرالية (التحررية)، قارنت الاستاذة التقديرات العددية النهائية التى توصل إليها طلبتها فى الإمتحان أثناء فصلين دراسيين مختلفين. فى فصل دراسي منهم (Fall 1990)، استخدمت الأستاذة امتحانات الإختيار المتعدد؛ وفى الفصل الدراسي الثانى (Fall 1991) استخدمت امتحانات المشاكل. وبسبب صغر حجم الكلية نسبياً، فلا يوجد لدى الأستاذة تبرير للاعتقاد بأنه يوجد فروق يمكن تقديرها فى قدرة طلبتها. والتقديرات النهائية للفصلين الدراسين هو كالتالى :

Fall 90	85.0	87.5	79.3	86.5	75.3	68.0	66.5	83.0	60.5
	77.5	73.5	73.0	78.5	92.5	76.5	70.8	91.5	88.5
	77.8	75.0	63.0	83.0	91.0	65.8	91.5		
Fall 91	102.0	84.5	68.7	78.5	100.0	93.3	92.7	69.7	75.3
	85.7	82.7	95.2	69.0	91.0	83.0	83.0	91.7	76.2
	79.7	78.3	79.7	88.3	88.7	65.2	92.0	87.3	85.7
	76.0								

إفترض أن هاتين العينتين المستقلتين مأخوذتين من مجتمعات تتبع التوزيع الطبيعى وتباينات متساوية.

(a) ارسم بيانات العينة بيانياً. هل ترى فروق في المتوسط فى التقديرات، بين تكوين هذين الامتحانين .

(b) استناداً إلى هذا الرسم البيانى، هل يوجد قلق لديك بخصوص إفتراض تساوى التباينات .

(c) إستخدم مدخل تحليل التباين لتحديد إلى أى مدى يمكن لدليل العينة إنكار صحة الإدعاء القائل بأنه لا يوجد فروق فى الأداء، فى المتوسط .

(٨-٩) البيانات التالية هى عينات مستقلة لصناديق معبأة بالحبوب (بالأوقية) بواسطة ثلاث آلات تعبئة متماثلة:

الآلة 1	الآلة 2	الآلة 3
20.25	20.90	20.18
20.20	20.99	20.26
20.45	21.08	20.38
20.38	--	20.32
		20.36

(a) ارسم بيانات العينة بيانياً كما فى المثال (٨-١) . هل ترى فروق بين متوسط الكمية المعبأة لثلاثة آلات ؟ اشرح .

(b) حدد المصادر التى تسبب حدوث تغير فى بيانات العينة .

(c) إستخدم التحليل البيانى لتحديد إلى أى مدى يمكن لدليل العينة أن ينكر صحة الإدعاء القائل بأنه لا يوجد فروق فى متوسط الكمية المعبأة للثلاثة آلات . دعم إجابتك .

(d) ما هى الإقتراحات الهامة لتحليلك فى الجزء (c) ؟ هل يساعدك الرسم البيانى فى الجزء (a) للتحقق من أي من هذه الإفتراضات ؟ اشرح .

(٨-١٠) الجدول التالى هو جدول تحليل تباين جزئى حيث (k=5) معالجات والمشاهدات الكلية هى (n=25) مشاهدة . أكمل الجدول ، ووضح إلى أى مدى يمكن لهذا التحليل أن يدعم الإدعاء القائل بأنه لا يوجد فروق بين المعالجات ، فى المتوسط؟ دعم إجابتك .

Source	D f	SS	MS	F-value
Treatments			10	
Error				
Total		100		

(٨-١١) إذا علمت أن $(SST = 200)$ ، $(n_4 = 4)$ ، $(n_3 = 5)$ ، $(n_1 = n_2 = 6)$, $(k = 3)$, $(SSE = 50)$. إلى أى مدى يمكن لهذه المعلومات تدعيم الإدعاء القائل بأنه لا يوجد فروق بين المعالجات ، فى المتوسط؛ دعم إجابتك .

(٨-١٢) تم وضع أربعة عينات عشوائية مستقلة لأربعة أصناف بطاريات منتجة حديثاً فى إختبار الحياة . وقد تم ملاحظة فترات البقاء أو الحياة التالية (بالساعات) .

الصنف A	الصنف B	الصنف C	الصنف D
110	118	108	117
113	116	107	116
108	112	112	116
115	117	108	119

(a) ارسم بيانات العينة بيانياً كما فى المثال (٨-١) . هل ترى فروق فى متوسط فترات البقاء للأصناف الأربعة ؟ اشرح .

(b) حدد المصادر التى تساهم فى تغير بيانات العينة .

(c) إستخدم تحليل التباين لتحديد إلى أى مدى يمكن لدليل العينة أن يدعم صحة الإدعاء القائل بأنه يوجد فروق فى متوسط فترات البقاء لهذه الأصناف الأربعة . دعم إجابتك .

(d) ما هى الإفتراضات الهامة للتحليل فى الجزء (c) ؟ هل يساعدك الرسم البيانى فى الجزء (a) للتحقق من أياً من هذه الإفتراضات ؟ اشرح .

(٨-١٣) إذا علمت أن $(MSE = 6)$, $(SST = 400)$, $(n_1 = n_2 = \dots n_5 = 6)$, $(k=5)$. إلي أى مدى

يمكن لهذه المعلومات تدعيم الإدعاء القائل بأنه لا يوجد فروق بين المعالجات، فى المتوسط؛ دعم إجابتك.

(٨-١٤) قام مهندس ببناء عدد كبير من المنازل المتشابهة بإستخدام نفس التصميم المخطط مع تعديلات تجميلية فقط لثلاثة مناطق سكنية. والبيانات التالية هى عينات لأسعار البيع (بآلاف الدولارات) للمنازل والتى بيعت فى العام الماضى.

المنطقة 1	المنطقة 2	المنطقة 3
125	129	143
132	138	139
129	142	140
136	134	144

إفترض أن هذه ثلاث عينات مستقلة مأخوذة من مجتمعات تتبع التوزيع الطبيعى بتباينات متساوية.

(a) ارسم هذه البيانات بيانياً. هل يبدو لك أنه هناك فروق فى أسعار البيع بين هذه المناطق الثلاثة، فى المتوسط ؟ اشرح .

(b) نظراً لوجود تماثل بين المنازل، إلى ماذا ترجع الفروق فى أسعار البيع داخل كل منطقة سكنية ؟ كن محدداً فى إجابتك .

(c) استناداً للرسم البيانى فى الجزء (a) هل يوجد لديك قلق بخصوص إفتراض تساوى التباينات ؟ اشرح .

(d) إستخدم إختبار تحليل التباين لتحديد إلى أى مدى يمكن لدليل العينة أن ينكر صحة الإدعاء القائل بأنه لا يوجد فروق فى أسعار البيع للمناطق الثلاث، فى المتوسط.

(٨-٣) مقارنة معالجتين أو أكثر استناداً إلى العينات المختارة فى قطاعات :
Comparing Two or More Treatments with Samples Selected in Blocks

سوف يكون هذا الجزء امتداداً لإسلوب العينات ذات القراءات المزدوجة المعروض فى الفصل السابع، الذى يحتوى على مقارنة متوسطين بالإعتماد على العينات ذات القراءات المزدوجة، ومقارنة أكثر من متوسطين استناداً إلى عينات العينة المجمعة فى قطاعات . ولمناقشة الإمتداد لأكثر من متوسطى مجتمعين، سوف يساعدنا على ذلك إلقاء الضوء مرة أخرى على مثال المسعرين أو المثمنيين. ناقشنا فى الجزء السابق أن الفروق بين الخمسة عشر أصل أو خاصية المختارة هى غير هامة نسبياً. وفى الواقع، إن التغير بين أى مجموعة من الخصائص يميل إلى أن يكون كبيراً إلى حد ما، ويجعل التغير داخل العينات كبيراً لأنه لا يمكن إكتشاف الفروق بين متوسطات المجتمعات . والمدخل الأكثر فاعلية هو أن كل مسعر يعطى تسعير ما لكل الأصول. كل مجموعة من مجموعات التسعير للمثمنيين الثلاثة لأصل معين تشكل قطاع من بيانات العينة. لذلك، فإن التجميع فى قطاعات هو امتداد لفكرة الإزدواجية المستخدمة فى الفصل السابع. ويعطى التجميع فى قطاعات الفرصة لمقارنة الصفات (apples-to-apples) للمسعرين، حيث لا يمكن أن تعزو الفروق المشاهدة للفروق بين قيم الأصول أو الخصائص. ومن ثم فإن قيم الأصول فى هذا المثال هى متغيرات مجمعة فى قطاعات .

إفترض أننا نختار خمسة أصول، ويقدر (يثمن) كل مسعر الأصول الخمسة. إفترض أيضاً أن بيانات العينة متماثلة تماماً مع تلك المعطاة فى جدول (٨-١). (سوف نستخدم نفس البيانات لتتضح فائدة التجميع فى قطاعات) وسوف نكرر بيانات العينة مرة أخرى فى جدول (٨-٧)، بتوضيح إضافى حيث قام المسعرين بتقييم نفس الخمس أصول وليس الثلاث عينات المستقلة للخمس أصول. لاحظ أنه تم إعطاء المتوسطات والمجاميع لصفوف البيانات بالاضافة إلى الأعمدة - وذلك للأصول الخمسة كما للمسعرين - .

جدول (٨-٧)

بيانات الثلاثة مسعرين والخمسة خصائص

الأصول	المسعر A	B	C	المجموع	المتوسط
1	90	93	92	275	91.67
2	94	96	88	278	92.67
3	91	92	84	267	89.00
4	85	88	83	256	85.33
5	88	90	87	265	88.33
المجموع	448	459	434	1.341	89.40
المتوسط	89.6	91.8	86.8		

إهتمامنا الأول هو المقارنة بين المسعرين الثلاثة لتحديد ما إذا كان يمكن إعتبار تقديراتهم واحدة، فى المتوسط، حيث أننا مهتمين بإختبار الفرض العدمى .

$$H_O: \mu_A = \mu_B = \mu_C$$

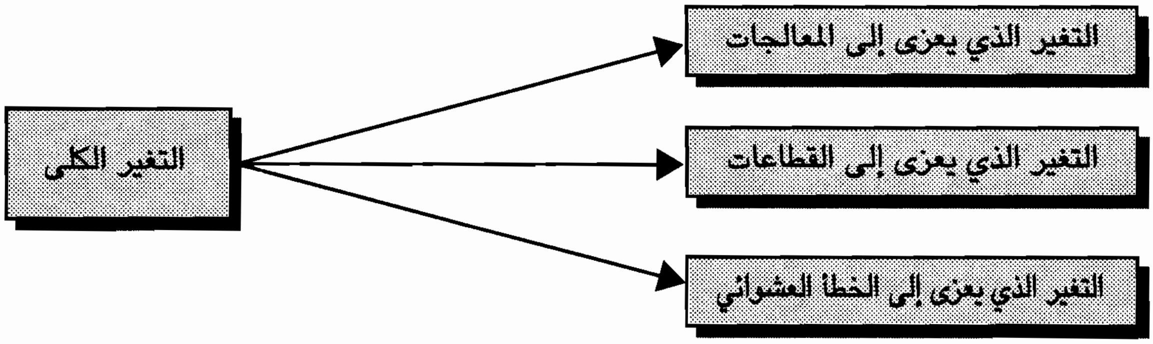
مقابل الفرض البديل .

H_a : يوجد واحد على الأقل من هذه المتوسطات يختلف عن الباقى

وهنا يختلف مدخل إستخدام الخصائص المختارة. ونظراً لأننا نعتقد أنه يمكن تقدير التغير بين قيم الخصائص، لذلك نرغب فى حسابه وندعه جانباً حتى تتضح المقارنة بين الثلاثة مسعرين بالفروق بين العينات للأصول المحددة لهم .

(٨-٣-١) تحليل التباين بالإعتماد على البيانات المجمعة فى قطاعات : تجزئة مجموع المربعات الكلى

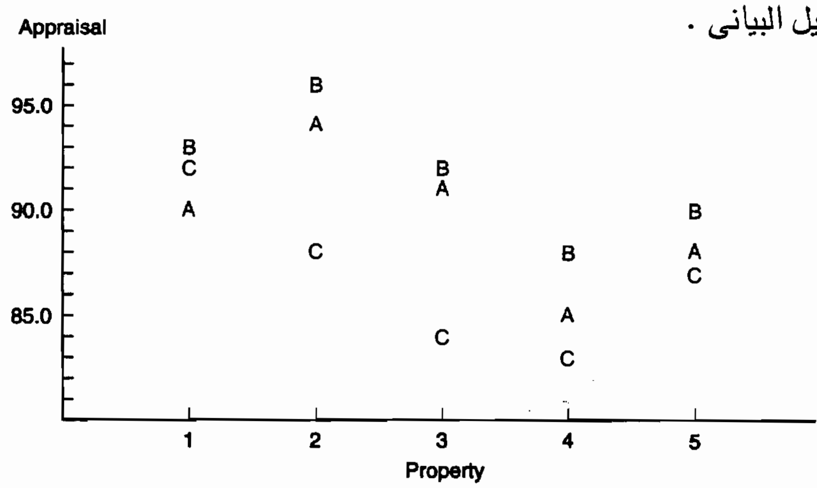
وكما كان الحال فى العينات المستقلة ، يقيس التغير الكلى التغير بصفة عامة لمجموعة البيانات الكلية بغض النظر عن السبب. وكما يوضح شكل (٨-٧) ، يمكن تجزئة التغير الكلى إلى ثلاث مكونات: التغير الذى يعزى إلى الفروق بين الخمسة خصائص (يعزى إلى القطاعات) ، التغير الذى يعزى إلى الفروق بين الثلاثة مسعرين (يعزى إلى الفروق بين المعالجات) ، والخطأ العشوائى (التغير الذى يعزى إلى الأسباب العشوائية).



شكل (٨-٧)
تجزئة التغير الكلى

والهدف الأول هو مقارنة متوسطات المعالجات. لذلك عندما نحدد تغير القطاعات (الأثر الذى يعزى إلى الفروق بين القطاعات)، فنتركه جانباً ونواصل بدقة ما كنا نفعله فى حالة العينات المستقلة. وبعبارة أخرى، يمكن إختصار إختبار تحليل التباين فى هذه الحالة لمقارنة تغير المعالجات بتغير الخطأ العشوائى. وتؤدى الفروق الكبيرة كبراً كافياً بين متوسطات العينات للمعالجات إلى نسبة كبيرة نسبياً لمتوسط مربعات المعالجات بالنسبة لمتوسط مربعات الخطأ العشوائى. وهذا يرجح أن متوسطات المجتمعات التى تمثلها المعالجات غير متساوية. وعلى الجانب الآخر إذا كانت الفروق بين متوسطات العينات للمعالجات غير قابلة للتقدير، فإن نسبة متوسطات المربعات ستكون صغيرة (تساوى تقريبا 1) ولا يكون لدينا سبب قوى للإعتقاد بأن متوسط المجتمعات مختلفة.

ويقدم شكل (٨-٨) عرضاً بيانياً لبيانات العينة الموجودة بجدول (٨-٧). وقد تم وضع قيم التقدير لكل مسعر من المسعرين الثلاثة (المعالجات) على المحور الرأسى يناظرها الأصول الملائمة (القطاعات) على المحور الأفقى. ولاحظ أن قيمة المسعر B هى الأعلى فى كل حالة. وقيم المسعر C - بإستثناء واحد- أقل بشكل متوافق من تلك القيم الخاصة بالمسعرين B, A. ويرجح توافق الترتيب بين B , A وجود فروق فى المتوسط بين متوسطات المثمنيين الثلاثة. هل ينتج كل ترتيب متوافق (متسق) للمعالجات عن العوامل العشوائية وحدها؟ ربما. نستخدم إختبار تحليل التباين لتأكيد النتيجة المبدئية التى يقرها التحليل البيانى.



شكل (٨-٨)
العرض البيانى لبيانات المسعرين مع الخصائص كقطاعات

مجموع المربعات :

وكما كان الحال فى العينات المستقلة، فإن الخطوة الأولى لإختبار تحليل التباين هو تحديد مجاميع المربعات المختلفة. وكما هو موضح فى شكل (٨-٧) يتم تجزئة مجموع المربعات الكلى (SST) إلى مجموع مربعات القطاعات (SSBL) ، مجموع مربعات المعالجات (SSTR)، مجموع مربعات الخطأ (SSE)، لذلك :

$$SST = SSBL + SSTR + SSE \qquad (8.9)$$

ويمكن تعريف مجاميع المربعات السابقة بالضبط كما تم عرضها فى الجزء السابق فيما عدا SSBL، وهو مكون من مكونات SST الذى يسبب الفروق بين القطاعات – وهى قيم الأصول . وسوف نقدم الصيغ الرياضية المستخدمة فى حساب هذه المقادير بصورة مختصرة عندما نناقش الحالة العامة. حتى هذا الوقت ، يكفى القول بأنه يتم تحديد قيمة SSBL بأسلوب مماثل لتحديد قيمة SSTR . نحسب مربع إنحراف متوسط كل قطاع (الأصل) عن المتوسط العام ، ثم نجمع هذه الإنحرافات المربعة لكل القطاعات (الخمسة أصول) ، بعد ذلك نضرب هذا المجموع فى عدد المعالجات (أى ، الثمنيين الثلاثة) .

وبالنسبة لبيانات العينة الموضحة فى جدول (٨-٧) ،

$$\begin{aligned} SSBL=3\{&(91.67-89.4)^2 + (92.7 - 89.4)^2 + (89.00 - 89.4)^2 \\ &+ (85.33 - 89.4)^2 + (88.33 - 89.4)^2\} \\ &= 100.93 \end{aligned}$$

ونظراً لأن المشاهدات فى جدول (٨-٧) متماثلة مع تلك المعروضة فى جدول (٨-١)، فإن SSTR , SST لهم نفس القيم المحسوبة سابقاً – SSRE = 62.8 ، SST = 195,6 – ومن التعبير الرياضى (8.9) يمكن تحديد مجموع مربعات الخطأ عن طريق طرح SSTR , SSBL من SST .

$$\begin{aligned} SSE &= SST - SSBL - SSTR \\ &= 195.6 - 100.93 - 62.8 = 31.87 \end{aligned}$$

ولمزيد من الإيضاح يتم مقارنة قيمة SSE التى حصلنا عليها هنا بالقيمة التى حصلنا عليها فى مثال العينات المستقلة. (وهى مقارنة هادفة نظراً لأننا استخدمنا نفس البيانات فى المثالين) وهذه القيمة الجديدة لـ SSE هى نتيجة الفرق بين مجموع مربعات الخطأ للعينات المستقلة، (SSE = 132.8) (انظر جدول ٨-٢) ومجموع مربعات القطاعات فى هذا المثال (SSBL = 100.93)، أى : (132.8 - 100.93 = 31.87) . ما معنى ذلك؟ بإستخدام العينات المستقلة، يقيس مجموع مربعات الخطأ التغير الناتج عن كل الأسباب العشوائية شاملاً التغير فى قيم الخصائص. وعند إستخدام التجميع فى قطاعات، يتم فصل التغير الذى يعزى إلى الفروق بين الخصائص عن الخطأ العشوائى. ويمثل مجموع مربعات القطاعات (SSBL=100.93) اثر تغير الخصائص التى تم فصلها عن مجموع مربعات الخطأ. وتمثل القيمة الجديدة لمجموع مربعات الخطأ (SSE = 31.87) اثر الأسباب العشوائية الباقية. وعلى ذلك يعتبر التجميع فى قطاعات طريقة لفصل التغير فى بيانات العينة الذى يسببه عامل التجميع فى القطاعات، ومن ثم يقلل الخطأ العشوائى. وعن طريق تقليل الخطأ العشوائى، نستطيع أن نكتشف بطريقة أفضل الفروق بين متوسطات المجتمعات فى حالة تواجدها .

درجات الحرية وإحصاء تحليل التباين فى ظل إستخدام القطاعات :

نظراً لأنه يوجد 15 مشاهدة فى بيانات العينة المبوبة . فسوف يظل لدى (SST) 14 درجة حرية. وحيث أنه يوجد ثلاثة مسعرين ، فيظل لدى (SSTR) درجتين حرية. وبالمثل، نظراً لأنه يوجد خمسة أصول (قطاعات)، فإن (SSBL) يصبح لديها أربع درجات حرية – وهى عدد الأصول مطروحاً منه واحد. وتذكر أن درجات الحرية لها خاصية الإضافة، لذلك يمكن الحصول على درجات الحرية للمقدار (SSE) بطرح درجات حرية كلا من SSTR , SSBL من درجات الحرية الكلية SST وهى (8 = 2 - 4 - 14) .

وكما كان الحال سابقاً، نرغب فى مقارنة التغير بين متوسطات العينات للمعالجات (MSTR) بالتغير الذى يرجع إلى الخطأ العشوائى (MSE) . وإحصاء تحليل التباين هى نسبة (MSTR) إلى (MSE) . وما سيأتي الآن هو نفس ما توصلنا إليه فى الجزء السابق. نعلم أنه إذا كان (F = MSTR/MSE) كبير بدرجة كافية عن الواحد الصحيح، فمن المنطقى أن نستنتج بثقة أن الفروق موجودة بين متوسطات مجتمعات المعالجات. وبناء على ذلك يتم إنكار صحة الفرض العدمى القائل بأن متوسطات المجتمعات متساوية عن طريق دليل العينة عندما تكون P-value صغيرة بدرجة كافية.

فيما يلي جدول تحليل التباين لمثال المسعرين فى ظل وجود خمس خصائص كقطاعات فى جدول (٨–٨) . ونظراً لأن قيمة P (p-value) صغيرة إلى حد ما، لذلك يتم إنكار صحة الفرض العدمى عن طريق دليل العينة، وبالتالي لا يمكن إعتبار المسعرين متماثلين فى المتوسط .

جدول (٨–٨)

جدول تحليل التباين لمثال المسعرين فى ظل الأصول كقطاعات

مصدر الإختلاف	D f	SS	MS	F-value	P-value
الأصول	4	100.93			
المسعرين	2	62.80	62.8/2=31.4	31.4/3.98=7.89	.0128
الخطأ	8	31.87	31.87/8=3.98		
التغير الكلي	14	195.60			

(٨–٣–٢) تعميم اسلوب تحليل التباين لعدد k من المعالجات، في عدد b من القطاعات :

والآن نعمم التحليل السابق ونقوم أولاً بتعريف المقادير التالية العامة لتحليل التباين متضمنة k معالجة فى b قطاع . وتعنى k معالجة فى b قطاع أن كل المعالجات k موجودة فى كل من b قطاع (فعلى سبيل المثال يتم تقييم الخمسة أصول عن طريق الثلاثة مسعرين) . وفى هذا المعنى يقال أن جميع القطاعات تكون كاملة. وعادة يتم عرض المشاهدات فى بيانات العينة المبوبة لعدد k من المعالجات فى b من القطاعات بحيث تمثل كل معالجة عمود بينما يمثل كل قطاع صف .

المقادير اللازمة لتحليل التباين بإستخدام القطاعات

k = عدد المعالجات (الأعمدة) .

b = عدد القطاعات (الصفوف) .

bk = العدد الكلى للمشاهدات فى بيانات العينة المبوبة ، .

i = دليل لتحديد القطاع $(i = 1 , 2 , ... b)$

j = دليل لتحديد المعالجة $(j = 1 , 2 , ... k)$

X_{ij} = المشاهدة فى القطاع i والمعالجة رقم j .

T = مجموع المشاهدات الكلية فى بيانات العينة المبوبة .

$\overline{X}$ = متوسط كل المشاهدات فى بيانات العينة المبوبة .

T_i = مجموع المشاهدات فى القطاع رقم i (صف) .

$\overline{X}_i$ = متوسط المشاهدات فى القطاع رقم i (صف) .

T_j = مجموع المشاهدات فى المعالجة رقم j (عمود) .

$\overline{X}_j$ = متوسط المشاهدات فى المعالجة رقم j (عمود) .

ويتم تجزئة مجموع المربعات الكلى إلى المكونات التالية :

$$SST = SSBL + SSTR + SSE$$

والتعبيرات الرياضية التى تعرف المقادير SSTR , SSBL , SST قد تم سردها هنا. وقد تم تقديم التعبيرات الرياضية المكافئة لها والتى يمكن حسابها بإستخدام الآلة الحاسبة فى ملحق 8 B .

$$SST = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{b} (X_{ij} - \overline{X})^2 \qquad (8.10)$$

$$SSBL = K\sum_{i=1}^{b} (\overline{X}_i - \overline{X})^2 \qquad (8.11)$$

$$SSTR = b\sum_{j=1}^{k} (\overline{X}_j - \overline{X})^2 \qquad (8.12)$$

وهناك $((n\text{-}1) = bK\text{ -}1)$ درجة حرية خاصة بالمقدار SST ، يوجد (b-1) درجة حرية خاصة بالمقدار SSBL ، ويوجد (k-1) درجة حرية خاصة بالمقدار SSTR. وكما كان الحال عند إستخدام العينات المستقلة، فإن درجات الحرية لها خاصية الاضافة. لذلك فإنه يمكن تحديد درجات حرية الخطأ بطرح درجات حرية القطاعات، ودرجات حرية المعالجات من درجات الحرية الكلية. وطبقاً لذلك فإن درجات حرية الخطأ هى :

$$df\ (error) = (bk - 1) - (b-1) - (k-1)$$

$$df\ (error) = bk - 1-b + 1-k + 1$$

$$= bk - b - k + 1$$

$$= (b-1)\ (k-1) \qquad (8.13)$$

وبتعبير لغوي، فإن درجات حرية الخطأ هي حاصل ضرب درجات حرية القطاعات ودرجات حرية المعالجات .

ويتم تحديد متوسط المربعات للمعالجات ومتوسط المربعات للخطأ بقسمة مجموع المربعات على درجات الحرية الخاصة بهم، وطبقاً لذلك فإن :

$$MSTR = \frac{SSTR}{k-1} \quad (8.14)$$

$$MSE = \frac{SSE}{(b-1)(k-1)} \quad (8.15)$$

إفترض أن $\mu_k = ... \mu_1, \mu_2,$ هي متوسطات المجتمعات التي تناظر K معالجة. لإختبار الفرض العدمي .

$$H_O: \mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_k$$

مقابل الفرض البديل

H_a : يوجد على الأقل واحد من هذه المتوسطات يختلف عن الباقي

مرة أخرى تحسب نسبة MSTR إلى MSE . وتوزيع المعاينة لهذه النسبة هو توزيع F بدرجات حرية (k-1) للبسط، (k-1) (b-1) للمقام. ويتم تحديد P-value إما باستخدام الحاسب الآلي أو بتقريبها بإستخدام جدول توزيع F الموجود في الملحق. إذا كانت قيمة الإحصاءة F أكبر من الواحد الصحيح بدرجة كافية، فإن ذلك يتبعه أن تكون (P-value) صغيرة، لذلك يوضح الإختبار أن الفروق بين متوسطات المجتمعات موجودة. جدول تحليل التباين العام لعدد K من المعالجات في عدد b من القطاعات موضح في جدول (٨-٩).

تقدم أيضا معظم حزم البرامج الإحصائية في مخرجاتها تحليل مماثل لتحديد ما إذا كان هناك إختلاف بين القطاعات أم لا، في المتوسط، ومع ذلك لا يجب أن يكون هذا التحليل جزء مكمل لإختبار تحليل التباين. وبعد كل ذلك، نختار ترتيب للقطاعات لتقييمها، ثم نضع جانبا أو نهمل الاثار المحتملة للقطاعات. ومن المفترض الإعتماد على المعرفة الشخصية بأنه يوجد فروق بين القطاعات عندما تم إختيار هذا التصميم الإحصائي. وإذا تم تدعيم هذا الإفتراض إحصائياً عن طريق إختبار تحليل التباين فإنه عادة ما يكون مقلق بدرجة قليلة .

جدول (٨-٩)

جدول تحليل التباين العام لعدد k معالجة في b قطاع

مصدر الإختلاف	D f	SS	MS	F-value	P-value
القطاعات	(b-1)	SSBL			بإستخدام الحاسب الآلي
المعالجات	(k-1)	SSTR	MSTR	MSTR/MSE	
الخطأ	(b-1)(k-1)	SSE	MSE		
التغير الكلي	bk-1	SST			

مثال (٨-٣)

ترغب إدارة مصنع كبير في التقليل من عدد مرات أعطال الآلات، وفي أحد الإستقصاءات، ترغب الإدارة في تحديد ما إذا كان هناك إختلاف بين الثلاث ورديات في المصنع من حيث عدد

مرات أعطال الآلات ، فى المتوسط . وقد تم إختيار أسبوع ما من المتوقع أن يصبح نموذجياً لتجميع البيانات . وأثناء هذا الأسبوع ، تم ملاحظة عدد مرات أعطال الآلات لكل دورية . ولقد تأكدت الإدارة بوضوح ، أنه يوجد على الأقل لبعض الأيام ، فروق يومية لعدد مرات أعطال الآلات يمكن تقديرها . وطبقاً لذلك تم إعتبار الخمسة أيام عمل كقطاعات .

(a) عبر عن بيانات العينة التالية بيانياً كما فى شكل (٨-٨) . ما هى النتيجة المرجحة حول عدد مرات الأعطال اليومية للآلات في الدوريات الثلاث ؟

	الوردية			
اليوم	A	B	C	المجموع
الاثنين	13	14	15	**42**
الثلاثاء	11	12	12	**35**
الأربعاء	11	13	12	**36**
الخميس	10	12	13	**35**
الجمعة	13	14	14	**41**
المجموع	**58**	**65**	**66**	**189**

(b) قم بإجراء إختبار تحليل التباين للبيانات المجمعة فى قطاعات لتأكيد النتيجة النهائية التى توصلت إليها فى الجزء (a) . هل يوجد سبب كافى للإعتقاد بأنه توجد فروق بين متوسطات عدد مرات أعطال الآلات فى الثلاث ورديات ؟

(c) هل يمكن تطبيق نتيجتك على المعدلات المستقبلية للأعطال للثلاث ورديات؟ ناقش .

الحل

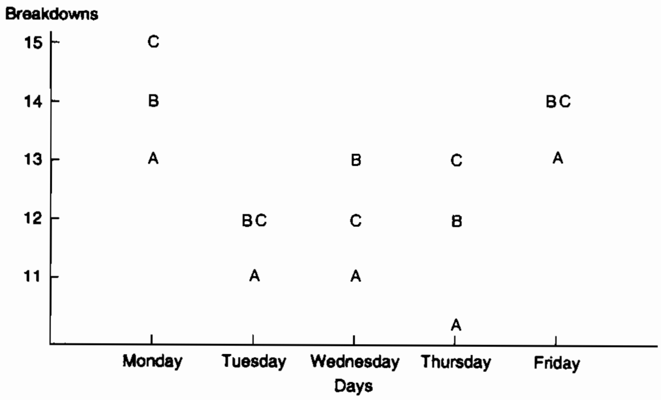
المعالجات فى هذا المثال هى الثلاث ورديات . وتعمل أيام الأسبوع كقطاعات . إفترض أن μ_A, μ_B, μ_C هى متوسطات المجتمع لعدد مرات أعطال الآلات لكل يوم للورديات A (وردية نهارية) ، B (وردية ليلية) ، C (وردية منتصف الليل) ، على التوالى . ونرغب فى إختبار الفرض العدمى .

$$H_O = \mu_A = \mu_B = \mu_C$$

مقابل الفرض البديل .

H_a : يوجد واحد على الأقل من هذه المتوسطات يختلف عن الباقى

(a) يقدم شكل (٨-٩) الأساس البيانى لتحديد ما إذا كان متوسط عدد مرات أعطال الآلات للثلاث ورديات متماثل أم لا . وقد تم وضع عدد مرات الأعطال اليومية لكل وردية على المحور الرأسى فى مقابل عدد أيام الأسبوع على المحور الأفقى . لاحظ أن الوردية A (الوردية النهارية) لديها عدد أعطال أقل من الوردية B ، الوردية C ، فى كل يوم . ويبدو أن الورديات C, B لديها تقريباً نفس عدد الأعطال لكل يوم ، فى المتوسط ، لذلك يرجح الشكل (٨-٩) أنه يمكن أن توجد فروق بين متوسطات المجتمعات للثلاث ورديات ويمكن تأكيد هذه النتيجة المبدئية بتنفيذ إختبار تحليل التباين (ANOVA) .



شكل (٨-٩)
الوصف البيانى لبيانات الأعطال للثلاث ورديات

(b) نستخدم مرة أخرى برنامج Minitab للحصول على جدول تحليل التباين الموجود فى جدول (٨-١٠) . وإذا كنت ترغب فى تتبع حساب مجموع المربعات خطوة بخطوة، انظر ملحق 8B. قيمة F هى F=12.67 ، وهى بالطبع أكبر بشكل واضح من الواحد الصحيح، وبناء على ذلك فإن قيمة P تصبح صغيرة إلى حد ما : 0.0033 . لذلك ليس من المحتمل أن يسبب الخطأ العشوائى الفروق التى نلاحظها بين الورديات. ويرجح دليل العينة أنه توجد فروق بين متوسطات المجتمعات للثلاث ورديات فى هذا الأسبوع .

(c) بالطبع ، فإن الهدف من مثل هذه الدراسة هو تحسين العملية الانتاجية في المستقبل. والنتيجة التى توصلنا إليها وهى وجود فروق غير عشوائية بين متوسطات المجتمعات للثلاث ورديات تطبق على المستقبل فقط إذا ظلت عمليات الورديات مستقرة. وحيث أنه لا توجد لدينا بيانات إحصائية لإظهار استقرار العملية فى المستقبل؛ فإن هذا يتطلب حكم الإدارة إستناداً إلى معرفتها بالعمليات. ونظراً لأنه يوجد فروق بين الورديات هذا الأسبوع ، فمن المحتمل أو المرغوب فيه أن تمتد هذه الدراسة لأسابيع عديدة لتأكيد أن الفروق المشاهدة ليست عابرة .

إذا استمرت الظروف التى كانت موجودة فى وقت اجراء الدراسة، فإن الخطوة التالية هى تحديد سبب الفروق بين الورديات. وهذا يتطلب دراسة تابعة أو لاحقة. وعلى الجانب الآخر ، إذا لم تدعم المعاينة الدورية النتيجة الحالية، فيجب على الإدارة إتخاذ الإجراءات كما لو لم يكن هناك فروق بين الثلاث ورديات. وبغض النظر عن القرار ، فيجب على الإدارة أن تسعى بإستمرار لتقليل عدد مرات أعطال الآلات خلال كل وردية عمل وذلك من خلال الصيانة الملائمة للآلة والتدريب الدورى للعاملين .

جدول (٨-١٠)
جدول تحليل التباين لمثال (٨-٣)

مصدر الإختلاف	d f	SS	MS	F-value	P-value
(القطاعات) الأيام	4	15.6			
(المعالجات) الورديات	2	7.6	7.6/2=3.8	3.8 / .3=12.67	.0033
الخطأ	8	2.4	2.4/8=-3		
التغير الكلي	14	25.6			

إستخدام الحاسب الآلى :

فى المثال التالى ، سوف نستخدم SAS لتنفيذ أسلوب تحليل التباين .

مثال (٨-٤)

تقوم وكالة للحماية البيئية بتقدير معدل السرعة سنوياً لكل سيارة متاحة للبيع فى الولايات المتحدة لمعرفة كفاءة الوقود. وترغب المنظمة في إجراء إختبارات مستقلة لتحديد ما إذا كان هناك فروق بين متوسط كفاءة الوقود بموجب حالة الطرق الفعلية لخمسة سيارات صغيرة subcompact مختلفة التى تمثل فعلياً المعدلات المقاسة من قبل وكالة الحماية البيئية. وسوف تستخدم الشركة المختبرة طريق طوله 400 ميل ويشتمل علي القيادة داخل كلا من المدينة والطريق العام. وسوف يشارك فى التجربة أربعة سائقين ومن المعتقد أن الفروق المحتملة التى يمكن نسبتها إلى السائقين أنفسهم يمكن تقديرها. لذلك يتم معاملة السائقين كقطاعات. وسوف يقود السائق كل سيارة مرة واحدة على طريق طوله 400 ميل. ويتم تحديد الترتيب الذى يقود به كل سائق الخمس سيارات بالسحب العشوائى، لذلك فإنه سيتم إعتبار أثر المعرفة لهذا الطريق من الأسباب العشوائية. وتعطي نتائج التجربة بيانات العينة التالية (الأميال لكل جالون) .

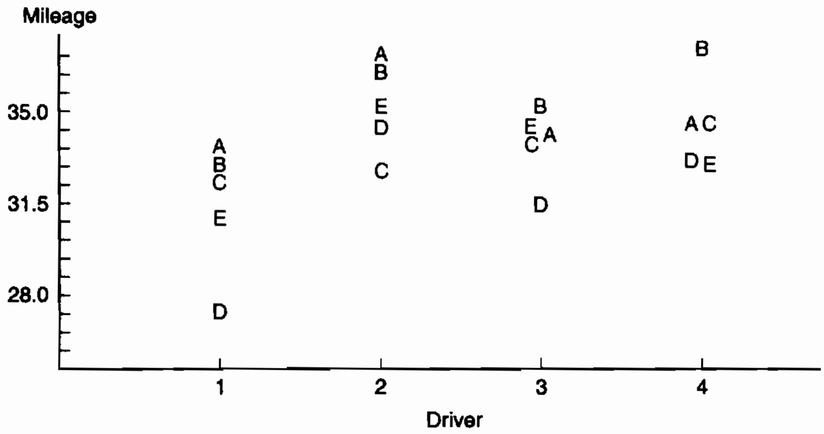
(a) عبر عن بيانات العينة بيانياً. وضح أى نتيجة يرجحها الرسم البيانى .

(b) إستخدم الحاسب الآلى لإجراء إختبار تحليل التباين والتأكيد على النتيجة المبدئية التى توصلت إليها من التحليل البيانى .

	السيارة				
السائق	A	B	C	D	E
1	33.6	32.8	31.9	27.2	30.6
2	36.9	36.1	32.1	34.4	35.3
3	34.2	35.3	33.7	31.3	34.6
4	34.8	37.1	34.8	32.9	32.8

الحل

(a) متوسطات العينة للخمس سيارات هو : ($\bar{X}_A$ =34.875) ، ($\bar{X}_B$ =35.325) ، ($\bar{X}_C$ =33.125) ، ($\bar{X}_D$ =31.45) ، ($\bar{X}_E$ =33.325) ويمكن إعتبار هذه الفروق كبيرة بدرجة كافية لتوجيه الإهتمام للمستهلكين، نظراً لأنه لدى وكالة حماية البيئة تقرير مسبق بتساوى كفاءات الوقود. هل تمثل هذه الفروق إختلاف المعاينة العشوائية أم هناك فروق حقيقية بين كفاءات الوقود؟ وكما كان الحال فى الأمثلة السابقة، قمنا برسم كفاءات الوقود بيانياً للخمس سيارات على المحور الرأسى فى مقابل السائقين على المحور الأفقى للتحديد المبدئى للفروق المكنة فى كفاءات الوقود للخمس سيارات (انظر شكل ٨-١٠) . ويرجح فحص الشكل البيانى وجود فروق فى كفاءات الوقود للسيارات. لاحظ أنه بالنسبة لكل سائق حققت السيارة A عدد أميال أكثر من الآخرين، بينما الأميال المحققة بإستخدام السيارة D كانت فى كل حالة فى الترتيب الرابع أو الخامس. ويبدو أنه من غير المحتمل أن يسبب الخطأ العشوائى كل هذه النتائج المتوافقة، ولكننا نستخدم إختبار تحليل التباين لتأكيد النتيجة المبدئية التى توصلنا إليها.



شكل (٨-١٠)

الوصف البياني لكفاءات وقود السيارات بإستخدام السائقين

(b) وحان وقت إجراء إختبار تحليل التباين ، نستخدم PROC ANOVA OF SAS لإنشاء جدول تحليل التباين، الموضح فى جدول (٨-١١) . لاحظ أنه فى هذا المثال (k=5) سيارات هى المعالجات، (b=4) سائقين هى القطاعات. والفرض العدمى هو تساوى متوسطات المجتمعات للخمس سيارات

$$H_O = \mu_A = \mu_B = \mu_C = \mu_D = \mu_E$$

ومن جدول (٨-١١) لاحظ أولاً أن نتائج الحاسب الآلي سردت مقدار يطلق عليه Model تحت عنوان «SOURCE» . ويعنى المصطلح «MODEL» دمج لأثار القطاعات (السائقين) ، المعالجات (السيارات) . وبصفة عامة يمثل «MODEL» الآثار المدمجة لكل مصادر الاختلاف بخلاف الخطأ العشوائى. لذلك فإن مجموع مربعات «MODEL» يساوى SSBL مضافاً عليه SSTR ، ودرجات حرية «MODEL» هى درجات حرية SSBL مضافاً عليها درجات حرية SSTR . ومتوسط مربعات «MODEL» هو مجموع مربعات «MODEL» مقسوماً على درجات حرية «MODEL». وأخيراً عرض الحاسب الآلي مصادر القطاعات، المعالجات ومقاديرهم اللازمة لتحليل التباين منفصلة عن بعضها البعض تحت الأسماء المعدة للإستخدام «DRIVER» ، «AUTO» على التوالي. بالنسبة للسيارات (المعالجات) ، قيمة F هى 5.09 . ونظراً لأن القيمة المصاحبة P-value صغيرة إلى حد ما 0.0124 ، فإن الفرض العدمى غير صحيح . ويرجح دليل العينة أنه يوجد فروق بين كفاءات الوقود للخمس سيارات .

جدول (٨-١١)

مخرجات برنامج SAS لمثال (٨-٤)

Analysis of variance procedure

Dependent variable : MILEAGE

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	7	79.76800000	11.39542857	6.09	0.0033
Error	12	22.44400000	1.87033333		
Corrected Total	19	102.21200000			

```
          R-Square                    C. V.      Root MSE       MILEAGE Mean
0.780417          4.067821            1.36760131                    33.62000000
Source                  DF          Anova ss      Mean Square     F Value     Pr > F
DRIVER                   3       41.67600000      13.89200000        7.43     0.0045
AUTO                     4       38.09200000       9.52300000        5.09     0.0124
```

تمارين

(٨-١٥) إشرح لماذا نأخذ فى الإعتبار القطاعات عندما نرغب فى المقارنة بين متوسطات عدد من المعالجات في الكثير من الحالات؟

(٨-١٦) ناقش مكونات التغير الكلى عندما يتم إختيار العينات فى قطاعات ؟

(٨-١٧)إذا تم الأخذ فى الإعتبار القطاعات فى دراسة محددة ولكن كان الأمر على خلاف ذلك ، فماذا نعتقد أن تكون النتيجة المحتملة لإختبار تحليل التباين بالنسبة لنتيجة المعالجات .

(٨-١٨) الآتى هو جدول تحليل تباين جزئى لعدد (k=4) معالجات مرتبة في (b = 6) قطاعات. أكمل جدول تحليل التباين وحدد إلى أى مدى تدعم هذه البيانات الإدعاء القائل بأن هناك فروق بين المعالجات ، فى المتوسط .

Source	D F	SS	MS	F - value
Blocks		75		
Treatments				
Error			3	
Total		200		

(٨-١٩) البيانات التالية هى نتيجة تجربة لمقارنة آثار ثلاثة معالجات مرتبة فى أربعة قطاعات :

القطاع	المعالجة		
	A	B	C
1	8	10	9
2	12	16	15
3	15	18	14
4	6	10	7

(a) ارسم البيانات بيانياً كما فى مثال (٨-٣) . هل ترى آثار للمعالجات ؟ اشرح .

(b) إستخدم تحليل التباين لتحديد إلى أى مدى يمكن لدليل العينة إنكار صحة الإدعاء القائل بأنه لا يوجد آثار للمعالجات ؟ اشرح ،

(٨-٢٠) تدعى شركة طاقة رائدة بأن زيت السيارات الفاخر يحسن المسافة المقطوعة بالأميال عند إستخدام البنزين. أدارت منظمة مستقلة تجربة لمقارنة الصنف الذي تبيعه الشركة (الصنفA) بثلاثة أصناف منافسة D , C , B ، ولتنفيذ التجربة استخدمت المنظمة أربعة

أنواع من زيوت السيارات فى أربعة أحجام مختلفة من السيارات (سيارة صغيرة جداً، سيارة صغيرة ، سيارة متوسطة ، سيارة كبيرة الحجم) . سوف تعامل السيارات كقطاعات بسبب الفروق الواضحة لحجم البنزين الذى تحتاجه كلاً منهم . وتتكون بيانات التجربة من الأميال لكل جالون للمسافة المقطوعة داخل كل من المدينة والطريق السريع ، كالتالى :

الحجم	النوع			
	A	B	C	D
سيارة صغيرة جدا	36	34	33	35
سيارة صغيرة	29	26	28	27
سيارة متوسطة	25	24	25	23
سيارة كبيرة	19	20	18	18

(a) ارسم الشكل البياني للبيانات ، هل ترى فروق بين عدد الأميال ، فى المتوسط للأربعة أنواع ؟ اشرح .

(b) حدد المصادر التى تسبب التغير فى بيانات العينة .

(c) إستخدم إختبار تحليل التباين لتحديد إلى أى مدى يمكن أن يظهر دليل العينة وجود أثر المعالجات؟ إشرح .

(٨-٢١) إذا علمت أن (k=5) معالجات مرتبة فى (b=4) قطاعات ، وإذا علمت أن , (MSE = 5) (SSBL = 240) , (SST = 500) إلى أى مدى يمكن لهذه البيانات أن تناقض صحة الإدعاء القائل بأنه لا يوجد أثر للمعالجات؟ إشرح .

(٨-٢٢) إذا علمت أن k = 4 معالجات مرتبة فى b = 6 قطاعات ، وإذا علمت أن , (MSTR = 50) (SSBL = 200) , (SST = 725)، إلى أى مدى يمكن لهذه البيانات تناقض صحة الإدعاء القائل بأنه لا يوجد أثر معالجات .

(٨-٢٣)طلب من شركة لبحوث التسويق مقارنة نسبة الزيادة فى المبيعات فى مدينة كبيرة على مدى العام السابق لثلاثة أنواع متنافسة من السمن النباتى الخالى من الكوليسترول . وتم إختيار ستة محلات تجارية (سوبر ماركت) من المدينة لتعمل كقطاعات وحساب التغير فى المبيعات الناتج عن الفروق الديموجرافية ، السكانية والإقتصادية بين المستهلكين . وقد تم توضيح نسبة الزيادة فى المبيعات للثلاثة أنواع (C , B , A) فى ست محلات تجارية فى الجدول التالى :

المحل	النوع		
	A	B	C
1	4.2	2.8	3.4
2	9.5	8.2	7.8
3	8.2	6.3	5.2
4	2.4	1.8	2.1
5	9.8	8.9	9.8
6	6.5	6.4	6.8

(a) مثل البيانات بيانياً، هل ترى فروق فى نسبة الزيادة، فى المتوسط لهذه الأنواع الثلاثة ؟ إشرح .
(b) حدد المصادر التى تسبب التغير فى بيانات العينة .
(c) إستخدم إختبار تحليل التباين لتحديد إلى أى مدى يمكن أن يظهر دليل العينة وجود أثر المعالجات؟ إشرح .

(٨-٢٤) فى تمرين (٨-٢٣) إفترض أن شركة بحوث التسويق أهملت الفروق الممكنة بين المستهلكين فى الست محلات وتعاملت مع البيانات كأنها تمثل ثلاث عينات عشوائية مستقلة. إستخدم تحليل التباين بدون القطاعات لترى هل يوجد إختلاف عن النتيجة التى حصلت عليها فى تمرين (٨-٢٣) .

(٨-٤) مقارنة المتوسطات عندما يكون دليل العينة منافى للفرض العدمى : إختبار شيفيه

Comparisons of Means When The Sample Evidence is Against The Null Hypothesis: Scheffe's Procedure

تذكر أن الفرض البديل فى تحليل التباين لا يحدد أى من المتوسطات يختلف عن الآخر . ولكنه يقر بأنه يوجد واحد على الأقل مختلف، لذلك لا يمكن إستخدام رفض الفرض العدمى المستند إلى إختبار تحليل التباين فى القول بأن جميع المتوسطات مختلفة. فعلى سبيل المثال، دعنا نتذكر مثال (٨-١) عندما كنا نقارن متوسط الأحجام المعبأة من قبل الآلات الأربعة. من جدول (٨-٥) (جدول تحليل التباين)، عن طريق دليل العينة لم يتم تدعيم الفرض العدمى القائل بأن الحجم المعبأ متساوى للآلات الأربعة، فى المتوسط. وهذا يعنى ضمناً إختلاف كل متوسطات الأحجام المعبأة. فيمكن أن يختلف μ_1 ولكن μ_2 , μ_3 , μ_4 يكونوا متماثلين . أو قد يكون μ_1 , μ_2 متماثلين μ_3 , μ_4 متماثلين ولكن كل زوج يختلف عن الآخر، وهكذا. ونتيجة كل هذا هو تدعيم وجود فروق بين متوسطات المجتمعات عن طريق دليل العينة. هنا نكون في إحتياج واضح لمعرفة أى هذه المتوسطات يمكن إعتبارها مختلفة، وأى من هذه المتوسطات يمكن إعتبارها متساوية .

تم إقتراح طرق عديدة لهذا الغرض. ونناقش ما يعرف بطريقة شيفيه للمقارنات المتعددة **Scheffe method for multiple comparisons** لأنه يتمتع بقيود قليلة نسبياً على إستخدامه ويفضله الكثيرون عند مقارنة مجموعة من المجتمعات . وتعتمد طريقة شيفيه على صيغة **contrast** المقابلة بين شيئين بغرض إيضاح الفرق. ضع ببساطة contrast المقابلة عند مقارنة متوسطات المجتمع فعلى سبيل المثال، إفترض أننا نرغب فى مقارنة متوسط الحجم المعبأ بواسطة الآلة الأولى μ_1 مع باقى الآلات (4 , 3 , 2) (μ_4 , μ_3 , μ_2) فى مثال (٨-١) . ونعرف المقابلة contrast بالرمز L_1 . إفترض أن contrast كالتالى :

$$L_1 = 3\mu_1 - \mu_2 - \mu_3 - \mu_4$$

لاحظ أن معاملات متوسطات المجتمعات هى (3 , -1 , -1 , -1) على التوالى لذلك فإن مجموع هذه المعاملات هو 0 (الصفر) . وهذا يعنى ضمناً أن ($L_1 = 0$) إذا كان متوسط μ_2 , μ_3 , μ_4 يساوي μ_1. بمعنى أنه إذ كان ($3\mu_1 - \mu_2 - \mu_3 - \mu_4 = 0$)، فعند حل هذه المعادلة بالنسبة للمقدار μ_1 نحصل على ($\mu_1 = (\mu_2 + \mu_3 + \mu_4) / 4$)وتقدم لنا صيغة L_1 الموضحة فرصة لمقارنة متوسط مجتمع الآلة 1 بتلك الخاصة بالآلات 2 , 3 , 4 . إفترض أننا نرغب فى مقارنة μ_2 فى مقابل μ_3 , μ_4 أو نقارن بين μ_3 , μ_4 فإن وسيلة المقابلة contrasts المماثلة يصبح كالتالى :

$$L_2 = 2\mu_2 - \mu_3 - \mu_4 \text{ and } L_3 = \mu_3 - \mu_4$$

مرة أخرى لاحظ أن مجموع معاملات المتوسطات فى L_2 , L_3 هو الصفر ، لذا وكما كان من قبل فإن $L_2 = 0$ فقط فى حالة أن تكون $\mu_2 = (\mu_4 + \mu_3) / 2$ بالمثل، $L_3 = 0$ فقط فى حالة أن تكون $(\mu3 = \mu4)$.

من هذه الأمثلة ، من المهم إدراك أن (1) يمكن إنشاء وإختبار عدد كبير من contrasts ، (2) يمكن ألا يحتوى contrast على كل المتوسطات الموجودة فى الفرض العدمى كما هو الحال عند إجراء إختبار تحليل التباين. وبصفة عامة، فإن مجموعة contrasts هى إختيار الباحث لإختبار إنعكاسات ملاحظات الباحث حول متوسطات المجتمعات فى الفرض العدمى. وبصفة عامة يمكن القول بأن :

المقابلة contrast هو مقارنة يختارها الباحث لتقديم توليفة خطية لأى عدد من متوسطات المجتمعات. ويلزم أن تكون مجموع معاملات متوسطات المجتمعات فى هذه المجموعة الخطية مساوياً للصفر.

ولأى contrast مرغوب فيه، فإن الفكرة هى إستخدام المعلومات المناسبة من بيانات العينة لتحديد ما إذا كان يمكن إعتبار contrast مختلف عن الصفر أم لا. فإذا كان contrast مختلف عن الصفر بشكل واضح، فإن مجموعة المتوسطات التى يتم مقارنتها فى contrast لا يمكن إعتبارها متساوية. فعلى سبيل المثال contrast L_1 يقارن المتوسط μ_1 بالمتوسطات μ_2 , μ_3 , μ_4 . فإذا تحول هذا con- trast ليصبح مختلفاً بشكل واضح عن الصفر، فلايمكن اعتبار هاتين المجموعتين متساويتين أو أصبح L_3 (مقارنة متوسط بمتوسط μ_3 مع μ_4) مختلف بشكل واضح عن الصفر، فلا يمكن إعتبار أن المتوسط μ_3 ، المتوسط μ_4 متساويين .

طريقة شيفيه : الإختبار العام خطوة بخطوة :

مع وجود المعلومات المناسبة من بيانات العينة، فإن الخطوات الأساسية لطريقة شيفيه لإختبار أى مقابلة contrast مرغوب فيه، موضحة داخل الاطار الآتى. وفى الواقع، هذه الخطوات مطابقة لتلك التى تستخدم فترات الثقة فى إختبارات الفروض كما قدمت فى الفصل السادس .

خطوات طريقة شيفيه

(1) تقدير contrast بإستخدام متوسطات العينة المناظرة .

(2) إيجاد التباين ومن ثم الخطأ المعيارى لقدر contrast .

(3) إستخدم تقدير contrast والخطأ المعيارى، فى تحديد فترة ثقة contrast كما تم تحديدها بإستخدام طريقة شيفيه .

(4) إذا كانت الفترة لا تشتمل على الصفر (بمعنى أن الفترة تقع بأكملها على يمين الصفر أو تقع بأكملها على يسار الصفر) ، لذلك يعتبر contrast مختلف بشكل واضح عن الصفر؛ وبخلاف ذلك، يكون العكس .

وبإستخدام الرموز العامة ، إفترض أن μ_1 , μ_2 ,..., μ_K هى متوسطات المجتمعات المطابقة للمعالجات محل الإهتمام، لذلك يتم تعريف المقابلة L contrast كالتالى :

$$L = C_1\mu_1 + C_2\mu_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots C_k\mu_k \qquad (8.16)$$

حيث المعاملات(C_1 , C_2 ,...., C_K) وبشرط أن يكون : $(C_1 + C_2 + \ldots C_K) = 0$. والمقدرغير المتحيز للمقدار L هو :

$$\hat{L} = C_1\overline{X}_1 + C_2\overline{X}_2 + ... + C_k\overline{X}_k \qquad (8.17)$$

حيث $\overline{X}_1$ ، $\overline{X}_2$ ، .... $\overline{X}_k$ هى متوسطات العينات المناظرة. ونظراً لأن $\hat{L}$ هو توليفة خطية للمتغيرت العشوائية (متوسط العينات) ، فإن تباين $\hat{L}$ كالتالى :

$$\operatorname{var}(\hat{L}) = MSE\left(\frac{C_1^2}{n_1} + \frac{C_2^2}{n_2} + ... + \frac{C_k^2}{n_k}\right) \qquad (8.18)$$

وقد تم الحصول على ذلك بإستخدام التعبير الرياضى (3.24) فى الجزء (٣-٩) .MSE هو متوسط مربعات الخطأ وتم الحصول عليه من جدول تحليل التباين؛ وهو يقدر التباين المشترك المفترض $\sigma^2 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = ... = \sigma_k^2$ والمقادير $n_1, n_2, ..., n_k$ هى أحجام العينات . وبناء على ذلك فإن الخطأ المعيارى للمقدار $\hat{L}$ يكون :

$$SE(\hat{L}) = \sqrt{\operatorname{var}(\hat{L})} \qquad (8.19)$$

وقد تم إثبات أنه بدرجة ثقة % (1-α) 100 ، فإن كل contrasts الممكن تكوينها كما هى معرفة بالتعبير الرياضى (8.16)، تقع داخل مجموعة الفترات .

$$\hat{L} - A\ SE(\hat{L}) \leq L \leq \hat{L} + A\ SE(\hat{L}) \qquad (8.20)$$

فإذا كانت البيانات معتمدة على عينات مستقلة، فيمكن تعريف المقدار A المذكور فى الصيغة الرياضية (8.20) كالتالى :

$$A = \sqrt{(k-1)F_{1-\alpha,\ k-1,\ n-k}} \qquad (8.21)$$

أما إذا كانت بيانات العينة فى b قطاع فإن المقدار A يكون كالتالى :

$$A = \sqrt{(k-1)F_{1-\alpha,\ k-1,\ (b-1)(k-1)}} \qquad (8.22)$$

لاحظ أن التعبيرات الرياضية (8.21) (8.22) ، أن المقادير $F_{1-\alpha,\ k-1,\ n-k}$ ، $F_{1-\alpha,\ k-1,\ (b-1)(k-1)}$ هى قيم الذيلين (Quantile values) لتوزيع F بدرجات حرية K-1 للبسط (جدول E فى الملحق) . الفرق الوحيد بين التعبيرين الرياضيين (8.21) ، (8.22) يكمن فى قيمة درجات الحرية الثانية، التى تمثل درجات حرية الخطأ العشوائى. لذلك يوجد (n-k) درجة حرية للخطأ للعينات العشوائية المستقلة، ودرجات حرية للخطأ العشوائى (k-1) (b-1) لبيانات العينة فى قطاعات .

مثال (٨-٥)

بالرجوع إلى مثال(٨-١) (انظر جدول ٨-٤) ، الذى يتضمن الكميات المعبأة للأربعة آلات فى مصنع الحاويات، إستخدم طريقة شيفيه بالإعتماد على درجة ثقة 95% لمقارنة μ_1 مع μ_2 , μ_3 , μ_4 . وأيضاً قارن μ_3 مع μ_4 .

الحل

من مثال (٨-١) أحجام العينات هى $(n_4 = 4)$, $(n_3 = 3)$, $(n_2 = 4)$, $(n_1 = 5)$ ومتوسطات العينات هى $(\overline{X}_1 = 5.2280)$, $(\overline{X}_2 = 5.2075)$, $(\overline{X}_3 = 5.1900)$, $(\overline{X}_4 = 5.1825)$ بالنسبة للمقارنة الأولى ، خذ فى الإعتبار L_1 contrast المعرف كالتالى :

$$L_1 = 3\mu_1 - \mu_2 - \mu_3 - \mu_4$$

ولتقدير هذا المعامل contrast بالإعتماد على بيانات العينة فى جدول (٨-٤) هو :

$$\hat{L}_1 = 3\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - \overline{X}_3 - \overline{X}_4$$
$$= (3)(5.2280) - 5.2075 - 5.1900 - 5.1825 = .104$$

وما نحاول تحديده بشكل جوهرى هو ما إذا كان التقدير 104. ، يختلف بشكل كافى عن الصفر حتى يكون لنا رأياً في أن contrast يختلف بشكل واضح عن الصفر. من جدول تحليل التباين (جدول (٨-٥)، نجد أن ($MSE = .000086$) لذلك فمن التعبير الرياضى (8.18) نجد أن التباين هو :

$$\mathrm{var}(\hat{L}_1) = .000086\left[\frac{3^2}{5} + \frac{(-1)^2}{4} + \frac{(-1)^2}{3} + \frac{(-1)^2}{4}\right]$$
$$= (.000086)(2.633333) = .0002265$$

والخطأ المعيارى هو :

$$SE(\hat{L}_1) = \sqrt{.0002265} = .015049$$

ونظراً لأنه يوجد 3 = (k-1) درجة حرية للمعالجات ، (n-k) = 12) درجة حرية للخطأ (انظر جدول ٨-٥) ، فإن القيم الجزئية (Quantile values) لدرجة ثقة 95% هى ($F_{.95,3,12} = 3.29$)، وبناء على ذلك فإن المقدار A المعرف بالتعبير الرياضى (8.21) هو :

$$A = \sqrt{(3)(3.49)} = 3.2357$$

لذلك فإن فترة الثقة محل الإهتمام كما هى معرفة بالتعبير الرياضى (8.20) هى :

$$.104 - (3.2357)(.015049) \leq L_1 \leq .014 + (3.2357)(.015049)$$
$$.104 - .0487 \leq L_1 \leq .104 + .0487$$
$$.0553 \leq L_1 \leq .1527$$

ونظراً لأن هذه الفترة لا تحتوى على الصفر ، لذلك فإن L_1 contrast يختلف بشكل ملحوظ عن الصفر. وبالتالي عندما يتم مقارنة الآلة 1 بالآلات 2 , 3 , 4 فلا يمكن اعتبارهم متساويين فى المتوسط.

بالنسبة لمقارنة المتوسط μ_3 بالمتوسط μ_4 فإن المقابلة contrast هي :

$$L_3 = \mu_3 - \mu_4$$

وقيمة المقدار $\hat{L}_3$ هو :

$$\hat{L}_3 = \overline{X}_3 - \overline{X}_4 = 5.1900 - 5.1825 = 0.0075$$

وكما كان الحال سابقاً ، نحاول تقرير ما إذا كان التقدير 0075. يختلف بشكل كافى عن الصفر حتى يكون لنا رأياً في أن عامل المقابلة contrast يختلف بشكل واضح عن الصفر. التباين والخطأ المعيارى هما كالتالى :

$$\mathrm{var}(\hat{L}_3) = .000086\left[\frac{1^2}{3} + \frac{(-1)^2}{4}\right] = (.000086)(.58333) = .0000502$$

$$SE(\hat{L}_3) = \sqrt{.0000502} = .007083$$

وحيث أن هذا هو نفس مشكلة تحليل التباين كما كان فى L_1 ، فإن المقدار A يظل كما هو . لذلك فإن الفترة المرغوب فيها هى :

$$.0075-(3.2357)(.007083) \leq L_3 \leq .0075 + (3.2357)(.007083)$$

$$.0075 - .022918 \leq L_3 \leq .0075 + .022918$$

$$- .0154 \leq L_3 \leq .0304$$

ولما كانت هذه الفترة تحتوى على الصفر ، فإن L_3 contrast لا يختلف بشكل واضح عن الصفر . وعلى ذلك ، لا يوجد سبب لإعتبار أن متوسط الحجم المعبأ بواسطة الآلات 3 ، 4 مختلف .

مثال (٨-٦)

بالرجوع إلى مثال (٨-٣) ، إستخدم طريقة شيفيه لمقارنة متوسط عدد مرات أعطال الآلات في الوردية A بتلك الخاصة بالورديات C , B بالإعتماد على درجة ثقة 99% .

الحل

على الرغم من أن هذه المشكلة متعلقة بالعينات فى قطاعات ، فإن الإختبار يكون مشابه لما تم فى مثال (٨-٥). نظراً لأن القطاعات هى خمسة أيام عمل ، وأحجام العينات متساوية وتساوى 5 . متوسطات الورديات هى :

$$\overline{X}_A = \frac{58}{5} = 11.6 \quad , \quad \overline{X}_B = \frac{65}{5} = 13 \quad , \overline{X}_C = \frac{66}{5} = 13.2$$

ويمكن تعريف contrast المرغوب فيه كالتالى :

$$L_1 = 2\mu_A - \mu_B - \mu_C$$

وبالإعتماد على بيانات العينة الحالية ، فإن تقديره هو :

$$\hat{L}_1 = (2)(11.6) - 13 - 13.2 = -3$$

ومن جدول تحليل التباين (جدول ٨-١٠) ، نجد أن MSE = .3 ونتيجة لذلك فإن :

$$\text{var}(\hat{L}_1) = .3\left[\frac{2^2}{5} + \frac{(-1)^2}{5} + \frac{(-1)^2}{5}\right] = (.3)(1.2) = .36$$

$$\text{SE}(\hat{L}_1) = \sqrt{.36} = .6$$

ومن جدول (٨-١٠): $[(b\text{-}1)(k\text{-}1) = 8]$ ، $[K\text{-}1 = 2]$ ، $[F_{.99,2,8} = 8.65]$

$$\therefore A = \sqrt{(2)(8.65)} = 4.16$$

والفترة المرغوب فيها هى :

$$- 3 - (4.16)(.6) \leq L_1 \leq - 3 + (4.16)(.6)$$

$$- 3 - 2.496 \leq L_1 \leq - 3 + 2.496$$

$$- 5.496 \leq L_1 \leq -.504$$

نظراً لأن الفترة لا تحتوى على الصفر ، فإن L_1 contrast يختلف بشكل واضح عن الصفر. ومن ثم، استناداً إلى دليل العينة الحالى، فإنه لا يمكن إعتبار أن متوسط عدد مرات أعطال الآلات في الوردية A متساوى مع تلك الأعطال بالورديات C , B .

بعض الخصائص الهامة لإختبار شيفيه :

من المثالين السابقين ، يمكن إعتبار طريقة شيفيه إختبار بسيط للفرض العدمى .

$$H_0 : L = 0$$

حيث L هو أى contrast مناسب . وتضمن الطريقة أنه عند إستخدام إختبار تحليل التباين، فإنه يتم إنكار صحة الفرض العدمى القائل بأن متوسطات المجتمعات متساوية عن طريق دليل العينة، وسوف يتم إيجاد contrast واحد على الأقل متضمن نفس بيانات العينة يختلف بشكل واضح عن الصفر. ولكن الفكرة الرئيسية لطريقة شيفيه هو استخدام درجة ثقة % $(1-\alpha)$ 100 لكل فترات contrasts التى يرغب الباحث أخذها فى الإعتبار كمجموعة. ويتم تحديد درجة ثقة معينة عن طريق قيمة A فى التعبير الرياضى (8.21) أو (8.22). وللتوضيح، فى مثال (٨-٥) تم استخدام درجة ثقة 95% لكل من الفترتين المستخدمتين فى L_2, L_1 contrasts . لذلك يمكن أن يكون لدينا درجة ثقة 95% بأن تقع كل contrasts داخل فترات الثقة الخاصة بها .

ولتقديم توضيح إضافى لطريقة شيفيه ، دعنا ندرس ما يلى. قد تتساءل لماذا يجب علينا إستخدام طريقة شيفيه فى كل الأحوال. إذا كان إختبار تحليل التباين يؤدى إلى رفض الفرض العدمى، فلماذا لا تقوم بعمل المقارنات المزدوجة لمتوسطات المجتمعات بإستخدام إختبار T المذكور فى الفصل السابع؟ بالطبع ، يمكن عمل ذلك. ولكل مقارنة مزدوجة يمكن أن نختار درجة ثقة % $(1-\alpha)$ 100 . ولكن إذا تم عمل مقارنات مزدوجة عديدة فإن درجة الثقة للفترات الناتجة ستكون أقل بشكل ملحوظ من درجة الثقة % $(1-\alpha)$ 100 لفترة واحدة. وهذا صحيح لأنه لكل مقارنة مزدوجة ، فإن $(1-\alpha)$ هو الرقم الذى يقع داخل الفترة (1 , 0) ، وحاصل ضرب عاملين أو أكثر من مثل هذه العوامل سيكون دائماً أقل من أى عامل من العوامل على حدة. وبالنسبة لطريقة شيفيه ، فإن درجة الثقة هى % $(1-\alpha)$ 100 لكل الفترات كمجموعة . ومن الأفضل بشكل واضح أخذ درجة ثقة % $(1-\alpha)$ 100 لكل مقارنة مزدوجة لمتوسطات المجتمعات، حيث تطبق درجة الثقة لكل زوج وليس على المجموعة للمقارنات المزدوجة .

تمارين

(٨-٢٥) إفترض أن متوسطات العينات لعدد k = 3 عينات مستقلة هو :

$$(\overline{X}_3 = 14.9) \quad , \quad (\overline{X}_2 = 12.3) \quad , \quad (\overline{X}_1 = 14.5)$$

إذا كانت المشاهدات الكلية هى (n = 15) ، وأحجام العينات الثلاثة متساوية، وإذا كان (MSE = 2) ، قارن بين متوسطات المجتمعات التالية بالإعتماد على درجة ثقة 95% .

(a) متوسط المجتمع 2 مقابل متوسطات المجتمعات 1 ، 3 .

(b) متوسطات المجتمعات 1 ، 3 .

(٨-٢٦) إفترض أن متوسطات العينات لعدد k = 4 معالجات مرتبة داخل b = 5 قطاعات هى :

($\overline{X}_1 = 25.2$, $\overline{X}_2 = 30.8$, $\overline{X}_3 = 26.7$, $\overline{X}_4 = 29.9$) وإذا كـان (MSE = 5) . قـارن بين متوسطات المجتمعات التالية بالإعتماد على درجة ثقة 95% .

(a) متوسطات المجتمعات 1 ، 3 مقابل متوسطات المجتمعات 2 ، 4 .

(b) متوسطات المجتمعات 1 ، 3 .

(c) متوسطات المجتمعات 2 ، 4 .

(٨-٢٧) بالرجوع إلى تمرين (٨-٩)، إستخدم إختبار شيفيه لمقارنة متوسط الحجم المعبأ عن طريق الآلات 1 ، 2 ، 3 فى مقابل تلك الخاص بالآلة 2 . إستخدم فترة ثقة 95% .

(٨-٢٨)بالرجوع إلى تمرين (٨-١٢)، إستخدم طريقة شيفيه لمقارنة الآتي: (إستخدم فترة ثقة 95%):

(a) متوسط فترات البقاء للبطاريات A ، C مقابل تلك الخاصة بالبطاريات B ، D .

(b) متوسط فترات البقاء للبطاريات A ، C .

(c) متوسط فترات البقاء للبطاريات B ، D .

(٨-٢٩) بالرجوع إلى التمرين (٨-٢٣) إستخدم إختبار شيفيه لمقارنة الآتى: (إستخدم فترة ثقة 95%)

(a) متوسط نسبة الزيادة فى المبيعات للنوع A مقابل تلك الخاصة بالأنواع B ، C .

(b) نسبة الزيادة فى المبيعات للأنواع B ، C .

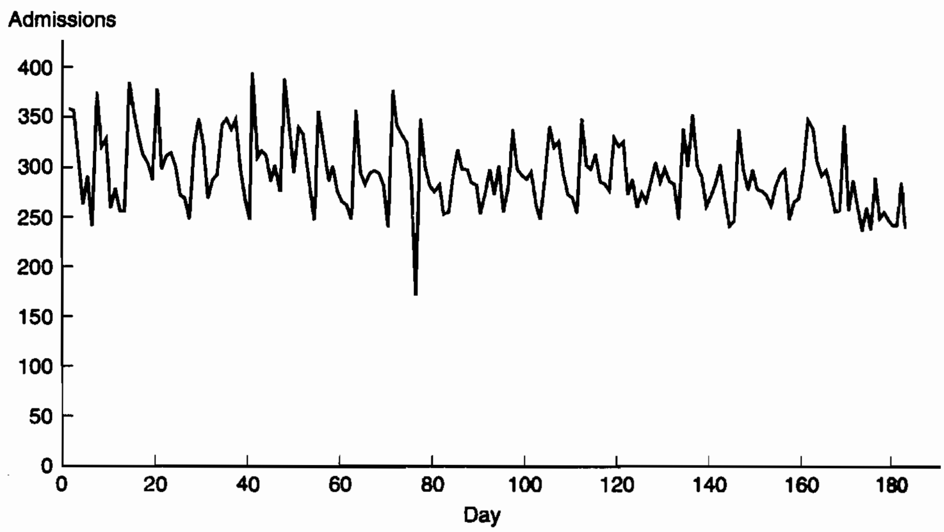
(٨-٥) تحليل التباين : مثال شامل : Analysis of Variance: A Comprehensive Example

يرغب مدير أحد المستشفيات الكبيرة فى معرفة الكثير عن دخول المرضى غرفة الطوارئ، وذلك فى جهود لتحسين واجبات العمل بها. والسؤال الرئيسى الموجه لهذه الدراسة هو ما إذا كان يجب أن تتنوع مستويات التوظف لكل يوم من أيام الأسبوع أم لا. ونظراً لأن المستوى المناسب للتوظف يعتمد على عدد المرضى الداخلين غرفة الطوارئ، فإن متغير الدراسة لهذه الدراسة هو العدد اليومى للمرضى الداخلين لغرفة الطوارئ. والعامل الأولى محل الإهتمام هو يوم من أيام الأسبوع. وقد أخذت البيانات من السجل الواقعي لغرفة الطوارئ المحتفظ به بإنتظام من قبل المستشفى. وفترة الملاحظة هى ستة أشهر تبدأ من 1 مايو 1991 وتنتهى فى 31 أكتوبر 1991 .

نظراً لأن هذه الدراسة معتمدة على الوقت ، فمن المهم إختبار استقرار عملية الدخول على مر الزمن. ويوضح الرسم البيانى لدورة الدخول اليومى فى شكل(٨-١١) أن الدخول إلى غرفة الطوارئ مستقر إلى حد ما فى فترة الملاحظة، فيما عدا لعينة يوم واحد من أيام الأسبوع المكنة. وهذا الإنخفاض الكبير فى البيانات يجعلها بعيدة عن القيم الأخرى.

ونظر المدير إلى العدد الكلى للداخلين يومياً خاصة المنخفض في يوم من أيام الأسبوع . ويقدم شكل (٨-١٢) مدرجات تكرارية للعدد الكلى للداخلين يومياً لكل يوم من أيام الأسبوع . ويظهر كل مدرج تكراري على المحور الرأسي؛ وتدل M على المتوسط المعلوم لكل يوم من أيام الأسبوع . وعلى الرغم من توافق المدى مع التوزيع ، فيبدو أن التغير بين العينات كبير بالمقارنة بالتغير داخل العينات. وهذا ما يرجحه المدير بأن العدد الكلى للداخلين يختلف فى كل يوم من أيام الأسبوع . ويظهر أن أكبر دخول يحدث يوم الاثنين. ويبدو الدخول أيام الثلاثاء والأربعاء والخميس متساوى وأقل من ذلك الخاص بيوم الاثنين. ويميل الدخول لأن ينحرف مرة أخرى فى كل يوم إبتداء من يوم الجمعة حتى يوم الأحد. وتقع القيم المنخفضة بشكل كبير فى يوم السبت. ومن خلال البحث، وجد أن هذا هو الشكل المنطقى، بدون وجود أى أسباب خاصة للتغير. لذلك، تميل لأن تمثل القيمة المنخفضة فى نهاية التوزيع العادي (الشائع) للعدد الكلى للداخلين يوم السبت .

ويقدم جدول (٨-١٢) ملخص رقمى للعدد الكلى للداخلين فى كل يوم من أيام الأسبوع. لاحظ أن المتوسطات تختلف بأسلوب متسق مع المشاهدات التي تظهر من المدرج التكرارى. ومدى المتوسطات يبدأ من أكبر مدى 345.3 فى يوم الاثنين إلى أقل مدى 268.8 فى يوم الأحد. لذلك، فإن متوسط عدد الداخلين فى أيام الاثنين هو حوالى 28% وهو أعلى من الخاص بأيام الأحد. وإختلاف هذا المقدار، إذا كان حقيقى، سيكون كافياً لتأكيد الحكم على مستويات التوظف لكل يوم من أيام الأسبوع .



شكل (٨-١١)
الرسم البيانى لدورة الدخول اليومى الكلى عبر الزمن

شكل (٨-١٢) المدرجات التكرارية للدخول الكلى لأيام الأسبوع

```
      MONDAY         TUESDAY        WEDNESDAY       THURSDAY       FRIDAY         SATURDAY       SUNDAY
MIDPOINTS..............+..............+...............+..............+..............+..............+...........+
 420.000)
 408.000)
 396.000)*
 384.000)****
 372.000)***
 360.000)***            **             ***             *
 348.000)M****          ***
 336.000)**             *              *****           *              *
 324.000)*              *******        ***             ********       *
 312.000)               M*****         M***            M*****         ***            **
 300.000)**             **             *******         ****           *******        ***            *
 288.000)*              *              **              ***            M*****         ******         ********
 276.000)*              ***            **              *              **             M********      ***
 264.000)               *                              **             ***            ***            M****
 252.000)*                                                            *              **             *******
 240.000)                              *                              *                             **
 228.000)
 216.000)
 204.000)
 192.000)
 180.000)                                                                            *
 168.000)

              LEGEND FOR GROUP MEANS:      M - MEAN COINCIDES WITH AN ASTERISK
                                           N - MEAN DOES NOT COINCIDE WITH ANY ASTERISK
```

جدول (٨-١٢) ملخص الإحصائيات للدخول اليومى الكلى لكل يوم من أيام الأسبوع

	الاثنين	الثلاثاء	الأربعاء	الخميس	الجمعة	السبت	الأحد
المتوسط	345.292	316.038	313.074	308.923	291.560	277.269	268.846
الإنحراف المعيارى	37.072	25.629	27.237	22.269	21.900	25.209	16.856
الخطأ المعيارى	7.567	5.026	5.242	4.376	4.380	4.944	3.306
الحد الأقصى	398.000	357.000	366.000	357.000	338.000	310.000	297.000
الحد الأدنى	255.000	267.000	244.000	262.000	246.000	180.000	240.000
n	24	26	27	26	25	26	26

وقد تم إجراء إختبار تحليل التباين المعتمد على العينات المستقلة لإختبار ما إذا كان التغير بين العينات المشاهد فى شكل (٨-١٢) ناتج عن الآثار العشوائية وحدها، فى غياب أثر أى يوم من أيام الأسبوع. والمعالجات هى أيام الأسبوع السبعة. والنتائج موضحة فى جدول (٨-١٣). ولإختبار الفرض العدمى القائل بأنه لا يوجد فرق بين متوسطات الدخول اليومية ، فإن قيمة F هى 25.70 وقيم P (P-value) المرتبطة بها هى 0.0000 لذلك إذا كانت المتوسطات اليومية لعملية الدخول متساوية، فلا يوجد أى فرصة لملاحظة هذه الفروق الكبيرة كما تظهرها الدراسة. لذلك يتم إنكار صحة الفرض العدمى عن طريق البيانات . ويدعم هذا الدليل الكافى وجود فروق بين متوسطات كل يوم من أيام الأسبوع .

جدول (٨-١٣) جدول تحليل التباين للدخول الكلى اليومى لكل يوم من أيام الأسبوع

Analysis of Variance Procedure

Dependent Variable: ADMITS

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	PR > F
Model	6	101790.6719	16965.1113	25.70	0.0000
Error	173	114216.2779	660.2097		
Corrected Total	179	216006.9498			

R-SQUARE	C.V.	Root MSE	ADMITS Mean
0.471238	8.4899	25.69454611	302.650

Source	DF	Anova SS	Mean Square	F Value	Pr > F
DAY	6	101790.6719	16965.1113	25.70	0.0000

وقد تم إستخدام طريقة شيفيه لتأكيد نموذج معين من الفروق بين المتوسطات اليومية التى تظهر من واقع المدرج التكرارى لكل يوم من أيام الأسبوع. وبصفة خاصة، يوجد ثلاث مقارنات محل الإهتمام: (1) يوم الاثنين فى مقابل باقى أيام الأسبوع؛ (2) من يوم الثلاثاء حتى يوم الخميس مقابل من يوم الجمعة حتى يوم الأحد؛ (3) يوم الجمعة مقابل يومى السبت والأحد. ويقدم جدول (٨-١٤) نتائج شيفيه. وتعرض هذا النتائج بوضوح أن متوسط الدخول فى يوم الاثنين يختلف عن متوسطات كل الأيام الأخرى. وبالإضافة إلى ذلك، فإن متوسط الدخول للأيام من يوم الثلاثاء حتى يوم الخميس كمجموعة تختلف بشكل واضح عن متوسط الدخول للأيام من يوم الجمعة حتى يوم الأحد. ولا يوجد فرق واضح بين متوسط الدخول فى يوم الجمعة عن ذلك الخاص بيومى السبت والأحد.

جدول (٨-١٤) نتائج طريقة شيفيه لاختبار Contrsts لأيام الأسبوع

Contrast	value of Statistic	Standard Error of Statistic	Interval Based on 95% Confidence
$L_1 = 6\mu_1 - \mu_2 - \mu_3 - \mu_4 - \mu_5 - \mu_6 - \mu_7$	$\hat{L}_1 = 269.042$	$SE(\hat{L}_1) = 33.8045$	$174.59 \le L_1 \le 417.49$
$L_2 = \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 - \mu_5 - \mu_6 - \mu_7$	$\hat{L}_2 = 100.360$	$SE(\hat{L}_2) = 12.3463$	$56.00 \le L_2 \le 144.72$
$L_3 = 2\mu_5 - \mu_6 - \mu_7$	$\hat{L}_3 = 37.005$	$SE(\hat{L}_3) = 12.5068$	$-7.93 \le L_3 \le 81.94$

وتقدم هذه الدراسة أساس قوى لتعديل واجبات التوظف. ومن الواضح أن إحتياجات التوظف تختلف بإختلاف كل يوم من أيام الأسبوع، لأن نظام تغيير الدخول لكل يوم من أيام الأسبوع يمكن إدراكه وهو أيضاً مستقر. والنقد الذى يمكن أن يوجه إلى هذه الدراسة هى أنها تغطى الأشهر من مايو حتى أكتوبر. لذلك، لا يوجد أساس إحصائى يرجح أن تستمر النماذج المشاهدة للدخول للأشهر الأخرى. ويلزم أن نرجع كل نتيجة فى هذا الخصوص إلى الخبرة.

(٨-٦)ملخص : Summary

فى هذا الفصل ، تم توسيع نطاق الطرق المستخدمة فى الفصل السابع بتقديم إختبار إحصائى يطلق عليه اسم تحليل التباين. وكما كان الحال فى إختبار T المقدم فى الفصل السابع، فإن تحليل التباين هو إختبار إستدلالى لتحديد الفروق (فى المتوسط) بين عدد من المجتمعات أو العمليات عن طريق تجزئة التغير الكلى فى بيانات العينة المبوبة بطريقة ما تجعلنا نستطيع تقدير مساهمة العوامل التى تسبب التغير. ويتم إستخدام توزيع F فى إختبار تحليل التباين .

وبصفة عامة، نطلق على المجتمعات أو العمليات أو مستويات عامل العملية محل الدراسة اسم المعالجات treatments. وأساليب الحصول على البيانات فى هذا الفصل هى أيضاً إمتداد لأسلوبين رئيسيين سبق ذكرهما فى الفصل السابع - وهما العينات المستقلة، العينات المختارة فى قطاعات، حيث تمثل القطاعات المتغير الخلفي أو الخفي. وكما كان الحال فى الفصل السابع، يظل التحليل البيانى الخطوة الأولى الهامة فى تحديد الفروق بين المعالجات.

المراجــع :

1. R. B. Miller and D. W. Wichern, *Intermediate Business Statistics : Analysis of Variance, Regression and Time Series.* New York : Holt, Rinehart & Winston. 1977 .

2. J. Neter, W. Wasserman, and M. Kutner, *Applied Linear Statistical Models,* 2nd ed. Homewood, IL: Richard D. Irwin, 1985 .

3. L. Ott. *An Introduction to Statistical Methods and Data Analysis.* 4th ed. Belmont, CA : Duxbury Press, 1993 .

تمارين إضافية

(٨-٣٠) تبين إحصائيات الحوادث أن السائقين السكارى يتسببون فى عمل ثلثى حوادث السيارات فى الولايات المتحدة. وقد استخدمت هذه الإحصائيات لبحث إلى أى مدى يمكن أن يضعف الكحول قدرة الفرد على أداء الوظائف الروتينية لقيادة السيارة. صف أسلوب المعاينة لإنجاز هذه المهمة ووضح كيف يجب تنفيذ هذه التجربة ؟

(٨-٣١) ترغب شركة تأمين فى تحديد ما إذا كان هناك فروق واضحة فى متوسط عدد الأيام التى يعانى فيها المرضى من نفس المرض للمقيمين فى منطقة بها أربعة مستشفيات رئيسية. صف بوضوح التصميم الإحصائى لإنجاز هذا الهدف ؟

(٨-٣٢) تتكون عملية التعبئة من ثلاث آلات متماثلة حيث تقوم بسكب الحجم المحدد من المنتج داخل حاويات متساوية الحجم. وقد أخذت عينات عشوائية دورياً من الآلات لإختبار تساوى متوسط الحجم المسكوب عن طريق الآلات. لفترة معينة من الوقت، ثم تسجيل بيانت العينة فى الجدول التالى :

الآلـــــــــــــــــــــــة		
A	B	C
16	18	19
15	19	20
15	19	18
14	20	20
	19	19
	19	

(a) مثل البيانات بيانياً. هل يظهر لك أى فروق فى متوسط الحجم المعبأ للآلات الثلاثة؟ اشرح .

(b) إستخدم إختبار تحليل التباين لتحديد إلى أى مدى يمكن أن يظهر دليل العينة أنه توجد فروق فى متوسط الأحجام المعبأة. دعم إجابتك .

(٨-٣٣) فى تمرين (٨-٣٢) ، إستخدم طريقة شيفيه بدرجة ثقة 95% لمقارنة متوسط الحجم المعبأ عن طريق الآلة A مقابل تلك الخاص بالآلات B ، C وقارن أيضاً المتوسطات للآلات B ، C .

(٨-٣٤) درس طالب متخرج حديثاً طول الفترة الزمنية التى يأخذها عند السفر بإستخدام السيارة من نقطة بداية محددة إلى نقطة نهاية محددة بإستخدام ثلاثة طرق مختلفة. وكل الطرق داخل منطقة كبيرة بالعاصمة. فترة القياس في الدراسة واحدة، كذلك حالة الطقس واحدة. والبيانات المشاهدة بالدقائق هى كالتالى :

الطريق 1	الطريق 2	الطريق 3
18.63	18.30	20.53
23.17	18.77	21.92
20.25	21.93	17.43
18.08	22.32	18.22
18.10	21.00	19.20
16.83	18.30	16.13
17.47	18.77	18.30
19.88	21.00	17.60
16.37	22.32	16.40
18.67	21.00	19.65
18.08	21.93	18.32

إفترض أن هذه هى ثلاث عينات مستقلة مأخوذة من مجتمعات تتبع التوزيع الطبيعى بتباينات متساوية .

(a) مثل البيانات بيانياً. هل يظهر لك أى فروق بين هذه الطرق فيما يتعلق بمتوسط طول الفترة الزمنية ؟ إشرح .

(b) إستناداً إلى الرسم البياني ، هل يوجد لديك قلق بخصوص الإفتراضات التى قمت بوضعها؟ إشرح .

(c) إشرح لماذا يوجد تغير فى طول الفترة الزمنية لكل طريق .

(d) إستخدم إختبار تحليل التباين لتحديد إلى أى مدى يمكن لدليل العينة إنكار صحة الإدعاء القائل بأنه لا توجد فروق بين أطوال الفترات الزمنية لهذه الطرق ، فى المتوسط .

(٨-٣٥) طلب من معمل إختبار مقارنة قدرة التحمل لأربعة أنواع مختلفة من كرات الجولف . وقد صمم المكتب تجربة حيث تم إختيار ثمانى كرات من إنتاج كل مصنع عشوائياً وعرض آلة تقوم بضربهم بقوة ثابتة . والمقياس محل الإهتمام هو عدد المرات التى تضرب فيه الكرة قبل تحطم غلافها الخارجى . وقد تم الحصول على البيانات فى الجدول التالى :

النوع			
A	B	C	D
205	242	237	212
229	253	259	244
238	226	265	229
214	219	229	272
242	251	218	255
225	212	262	233
209	224	242	224
204	247	234	245

(a) مثل البيانات بيانياً . هل تظهر لك أى فروق بين متوسطات الأنواع الأربعة؟ اشرح .

(b) إستخدم إختبار تحليل التباين لتحديد إلى أى مدى يمكن لدليل العينة إنكار صحة الإدعاء القائل بأنه لا توجد فروق بين متوسطات الأربع أنواع . دعم إجابتك .

(٨-٣٦) نرغب فى تحديد ما إذا كان حجم الكربون المستخدم فى مصنع للصلب له تأثير على مقاومة الشد للصلب . وقد تم بحث خمس نسب مختلفة للكربون وهى .2% ، .3% ، .4% ، .5% ، .6% ولكل نسبة كربون ، تم اختيار خمس عينات من الصلب عشوائياً من نفس مجموعة الإنتاج وقد تم قياس المقاومة لهم . وقد تم الحصول على بيانات العينة فى الجدول التالى ، حيث المقاومة مقاسة بالكيلو جرام لكل سنتيمتر مربع :

حجم الكربون				
.2%	.3%	.4%	.5%	. 6%
1.240	1.420	1.480	1.610	1.700
1.350	1.510	1.470	1.590	1.790
1.390	1.410	1.520	1.580	1.740
1.280	1.530	1.540	1.630	1.810
1.320	1.470	1.510	1.560	1.730

(a) مثل البيانات بيانياً. هل يظهر لك أى فروق فى متوسط مقاومة الشد ؟ إشرح .

(b) إستخدم إختبار تحليل التباين لتحديد إلى أى مدى يمكن أن يدعم دليل العينة الإدعاء القائل بأنه يوجد أثر لمكون الكربون على مقاومة الشد للصلب . إشرح .

(٨-٣٧) فى تمرين (٨-٣٦) إستخدم طريقة شيفيه بدرجة ثقة 99% لمقارنة الآتى :

(a) المتوسط لنسب الكربون 5% ، 6% .

(b) متوسط نسبة الكربون 6% مقابل تلك الخاصة بنسب الكربون 3% ، 4% ، 5% .

(c) المتوسط لنسب الكربون 2% ، 3% .

(٨-٣٨) لتحديد ما إذا كان هناك فروق فى متوسط إنتاج ثلاث أنواع من القمح ، تم تقسيم قطعة أرض زراعية متجانسة إلى ثلاثة قطع متساوية . وقد تم تقسيم كل قطعة إلى خمس قطع فرعية متساوية وقد تم زراعتها بنوع واحد من القمح . وفى موسم الحصاد ، المقياس محل الإهتمام هو الإنتاج (بالبوشل لكل أكر) . والآتى هو جدول تحليل تباين جزئى لهذه المشكلة .

Source	d f	SS	MS	F value
Treatments		32		
Error				
Total		100		

أكمل جدول تحليل التباين وحدد قوة هذا الدليل فى مواجهة الإدعاء القائل بأنه لا توجد فروق فى متوسط الإنتاج . دعم إجابتك .

(٨-٣٩) تم اختيار عدد من مديرى الشركات عشوائياً من أربعة مناطق جغرافية معروفة فى الولايات المتحدة لتحديد ما إذا كانت المنطقة لها أثر واضح على متوسط الرواتب السنوية لمديرى الشركات . وقد تم ملاحظة الرواتب السنوية التالية (بآلاف الدولارات) :

الغرب	الجنوب الشرقى	الغرب الأوسط	الشمال الشرقى
90	110	75	210
265	235	195	125
350	85	120	95
140	150	240	345
170	95	90	80

مثل البيانات بيانياً . واستناداً إلى ما تراه ، هل تعتقد أن هناك أى نقط رئيسية لم تؤخذ فى الإعتبار فى بيانات العينة؟ وبعبارة أخرى ، قدم دليل يدعم أو يناقض ما إذا كان يمكن إستخدام أسلوب تحليل التباين لتحديد ما إذا كان للمنطقة تأثير على متوسط الأجور استناداً إلي البيانات المعطاة . كن متأكداً عند إعطاء تدعيم واقعى فى أى حالة .

(٨-٤٠) فى مصنع كبير ، نرغب فى تحديد ما إذا كان يوجد أى أثر للعمال المختلفين الذين لديهم نفس مستوى المهارة على عدد الوحدات المتوقع إنتاجها فى فترة محددة من الزمن . وقد تم

إدارة تجربة بحيث تم اختيار خمس عمال عشوائياً وسجل عدد الوحدات المنتجة لكل عامل لستة فترات متساوية من الزمن، وتم تسجيل النتائج كالتالى :

العامل				
1	2	3	4	5
45	52	39	57	48
47	55	37	49	44
43	58	46	52	55
48	49	45	50	53
50	47	42	48	49
44	57	41	55	52

(a) مثل البيانات بيانياً، هل تظهر لك أى فروق فى متوسط عدد الوحدات المنتجة عن طريق هؤلاء العمال ؟ اشرح .

(b) إلى أى مدى يمكن لدليل العينة إنكار صحة الفرض العدمى القائل بأنه لا توجد فروق فى المتوسط ؟ دعم إجابتك .

(c) ما هى الإفتراضات الضرورية لإجراء التحليل فى الجزء (b) ؟ هل يساعدك الرسم البيانى فى الجزء (a) مع واحد من هذه الإفتراضات؟ إشرح .

(٨-٤١) فى تمرين (٨-٤٠) ، إستخدم طريقة شيفيه بدرجة ثقة 95% لمقارنة الآتى :

(a) المتوسطات للعمال 2 ، 4 .

(b) المتوسطات للعامل 2 مقابل تلك الخاص بالعمال 1 ، 3 .

(٨-٤٢) نظراً لإرتفاع أسعار البنزين، تم تصميم أجهزة عديدة تدعى بأنها تزيد متوسط عدد الأميال المقطوعة عند تركيبها بالسيارة وقد إختارت منظمة إختبار ثلاثة من هذه الأجهزة لإختبارها. وترغب المنظمة فى مقارنة عدد الأميال التى تقطعها السيارة التى تحتوى على هذه الأجهزة بعدد الأميال التى تقطعها السيارة التى لا تحتوى على هذه الأجهزة. وقد إختارت المنظمة خمس أنواع من السيارات لهذا الإختبار. وللتحكم فى الاختلافات، خططت المنظمة لإستخدام نفس السائق فى التجربة كلها. وقد تم الحصول على البيانات التالية (الأميال لكل جالون) :

السيارة	بدون جهاز	جهاز A	جهاز B	جهاز C
1	18.2	18.9	19.1	20.4
2	27.4	27.9	28.1	29.9
3	35.2	34.9	35.8	28.2
4	14.8	15.2	14.9	17.3
5	25.4	24.8	25.6	26.9

(a) مثل البيانات بيانيا. هل تظهر لك أى فروق فى متوسط عدد الأميال ؟

(b) لماذا نحتاج لوضع السيارات فى قطاعات هنا ؟ إشرح .

(c) إستخدم مدخل تحليل التباين فى تحديد قوة دليل العينة مقابل الإدعاء القائل بأنه لا توجد فروق فى متوسط عدد الأميال بإستخدام أو بدون إستخدام هذه الأجهزة .

(٨-٤٣) فى تمرين (٨-٤٢) إستخدم طريقة شيفيه بدرجة ثقة 95% لمقارنة :

(a) متوسط عدد الأميال المقطوعة بإستخدام الأجهزة A ، B ، C مقابل ذلك الخاص بدون إستخدام أجهزة .

(b) متوسط عدد الأميال المقطوعة بإستخدام الجهاز C وتلك الخاصة بدون إستخدام أى أجهزة.

(c) متوسط عدد الأميال المقطوعة بإستخدام الأجهزة A ، B مقابل تلك الخاصة بإستخدام الجهاز C .

(٨-٤٤) فى تمرين (٨-٤٢) ، إفترض أنك لم تأخذ فى الإعتبار أن نوع السيارة مصدر من مصادر التغير فى عدد الأميال المشاهدة. وضح ما إذا كان هذا الحذف له أى تأثير على إجابتك فى الجزء (c) فى تمرين (٨-٤٢) .

(٨-٤٥) تنتج السجائر المشتعلة كميات من أول أكسيد الكربون يمكن تقديرها . عند إستنشاق دخان السيجارة، يتحد أول أكسيد الكربون مع هيموجلوبين الدم ليكون كربوكسيهيموجلوبين car-boxhemoglobin وفى دراسة حديثة، رغب الباحثين فى تحديد ما إذا كان تركيز الكربوكسيهيموجلوبين القابل للتقدير، يقلل من قدرة المرضى الذين يعانون من الإلتهاب الشعبى المزمن وإنتفاخ الرئة على أداء التمارين الرياضية. وقد تم إختيار سبعة مرضى، فى بيئة محكمة، وطلب منهم أداء تمرين المشى لمدة 12 دقيقة، وان يتنفس كل واحد منهم، واحد من أربعة غازات مخلوطة: الهواء ، الأكسجين ، الهواء + أول أكسيد الكربون CO ، الأكسجين + أول أكسيد الكربون . وقد كان حجم أول أكسيد الكربون المستنشق كافى لرفع تركيز الكربوكسيهيموجلوبين بنسبة 9% لكل معرض للتجربة. ولضبط إستنشاق أول أكسيد الكربون طلب من السبعة مدخنين التوقف عن التدخين لمدة 12 ساعة قبل إجراء التجربة. وتمثل البيانات فى الجدول التالى المسافة بالأمتار التى قام بسيرها المعرضين للتجربة تحت كل ظرف فى 12 دقيقة .

المريض	الغاز المخلوط			
	الهواء	الأكسجين	الهواء +co	الأكسجين+co للتجربة
1	835	874	750	854
2	787	827	755	829
3	724	738	698	726
4	336	378	210	279
5	252	315	168	336
6	560	672	558	642
7	336	341	260	336

(a) مثل البيانات بيانياً، هل تظهر لك أى فروق فى متوسط المسافة المقطوعة بالنسبة للأربعة أنواع من الغازات المخلوطة .

(b) لماذا نحتاج لعمل قطاعات للمعرضين للتجربة ؟ إشرح .

(c) إستخدم مدخل تحليل التباين لتحديد قوة دليل العينة مقابل الإدعاء القائل بأنه لا يوجد أثر للغازات المخلوطة على المسافة المقطوعة . دعم إجابتك .

(٨-٤٦) نرغب فى تحديد ما إذا كان هناك فروق يمكن تقديرها فى متوسط الأسعار بين أربع محلات تجارية كبيرة فى مدينة معينة. وقد تم إختيار عشر وحدات من الأنواع المشتراة بإنتظام عشوائياً وقد تم ملاحظة أسعار الوحدات لكل محل تجارى وقد تم الحصول على البيانات التالية :

	المحل			
النوع	A	B	C	D
1	3.29	3.42	3.27	3.35
2	.59	.65	.59	.60
3	1.25	1.29	1.25	1.27
4	4.35	4.59	4.29	4.49
5	.89	.95	.89	0.89
6	1.85	1.79	1.89	1.89
7	.95	.89	.89	.90
8	.75	.79	.69	.79
9	2.35	2.35	2.39	2.39
10	1.49	1.55	1.55	1.49

(a) مثل البيانات بيانياً، هل تظهر لك أى فروق فى متوسط الأسعار للأربع محلات تجارية؛ إشرح .

(b) لماذا نحتاج لعمل قطاعات للوحدات ؟ إشرح .

(c) إستخدم مدخل تحليل التباين لتحديد قوة دليل العينة مقابل الإدعاء القائل بأنه لا يوجد أثر للمحل التجارى على سعر الوحدة لنوع المنتج . دعم إجابتك .

(٨-٤٧) تشتمل التمارين (٢-٢٤) ، (٢-٤٢)، (٢-٧١) على الخدمات التعليمية .Inc تقدم شركة صغيرة للأدوات الدراسية للمدارس المتوسطة والمدارس الثانوية (العليا). ويتم الحصول على العملاء من ثلاثة مصادر yellow pages (صفحة الإعلانات) ، الترشيح المهنى، ترشيح عميل سابق .

وتمثل البيانات التالية الدخل الإجمالى للمبيعات لعينة مكونة من 143 عميل مصنفة وفقاً لكل مصدر .

ترشيحات العمـــــلاء

40	300	100	120	160	140	80	110	160	180	80	710
120	220	100	250	120	20	160	120	1.340	160	280	200
560	3.940	60	600	140	840	230	160	530	200	140	480
140	120	560	120	38	180	100	220	100	220	1.040	

ترشيحات صفحة الإعلانات

950	120	75	200	100	620	320	120	140	80	130	830
180	320	90	1.220	380	60	70	1.600	80	120	160	760
850	420	150	140	20	520	260	100	100	840	480	150
230	220	220									

الترشيحات المهنية

2.200	140	480	480	150	2.840	560	530	2.470	140	160	320
80	320	180	940	580	900	1.730	100	900	360	1.560	1.050
680	4.160	200	165	300	60	1.870	390	1.920	740	140	60
140	40	540	8.320	1.020	175	1.260	710	720	1.540	4.680	1.460
400	1.120	240	360	540	1.500	3.280	880	1.120			

(a) مثل البيانات بيانياً، هل يظهر وجود فروق بين متوسطات أحجام المبيعات في الثلاث مصادر المرشحة؟

(b) إستخدم إختبار تحليل التباين لتحديد إلى أى مدى يمكن لدليل العينة إنكار صحة الإدعاء القائل بأنه لا توجد فروق فى أسعار البيع للثلاثة مصادر فى المتوسط.

(٨-٤٨)هذا التمرين هو امتداد للتمارين (٢-٢٥)، (٢-٤٣)، (٢-٧٢)، (٢-٨٦) التى تتعامل مع دراسة أسلوب العمل للمشتركين فى Low firm Northrup and Bauers ومن المفترض أن يتم تحديد عدد ساعات billable المعتمدة على القسم داخل الشركة المشاركة. والبيانات التالية عدد ساعات billable على مدى 9 شهور لكل من 43 مشارك مقترناً مع قسمه.

Hrs.	802	1,287	1,255	1,178	1,275	767	1,424
Dept.	1	1	1	2	1	1	3
Hrs.	1,328	1,223	790	1,339	1,434	1,050	796
Dept.	2	1	1	4	4	5	6
Hrs.	1,308	1,464	1,389	1,316	1,325	1,494	1,096
Dept.	6	6	7	4	8	1	1
Hrs.	1,482	1,493	1,452	1,060	1,407	1,067	934
Dept.	3	7	3	6	6	8	3
Hrs.	901	1,400	1,320	1,132	1,256	858	1,346
Dept.	1	1	7	1	3	1	8
Hrs.	885	1,084	1,065	1,211	1,379	1,340	1,098
Dept.	1	5	5	1	3	6	5
Hrs.	1,407						
Dept.	1						

حيث .Hrs عدد الساعات   .Dept القسم

دليل القسم :

1 = القضايا التجارية ، وقضايا العمل .

2 = علاقات العمل .
3 = الأملاك العقارية .
4 = البنوك والتمويل .
5 = الأعمال الإدارية .
6 = المتعلق بالشركات .
7 = التأمين والمسئولية المدنية عن المنتجات .
8 = الأموال والإئتمان .

(a) مثل البيانات بيانياً . هل يظهر لك أن متوسط عدد الساعات billable يختلف بين الثمانية أقسام؟ فإذا كان الأمر كذلك، صف الفروق .

(b) إستخدم إختبار تحليل التباين لتحديد إلى أى مدى يمكن لبيانات العينة أن تجزم بأن الأقسام تختلف من حيث متوسط عدد ساعات billable للمشاركين .

(٨-٤٩) هذا التمرين هو امتداد للتمارين (٢-٢٦)، (٢-٧٣)، (٢-٨٧) وهو امتداد أيضاً لدراسة مبيعات الأيس كريم لمؤسسة تجارية لمدة أربعة أشهر مختارة من المبيعات الكلية لعام معين . وهناك عامل واحد غالباً ما يستخدم لشرح التغير المشاهد فى مبيعات الأيس كريم لهذه المؤسسة وهو أيام الأسبوع . وعادة ما يتزايد العمل فى عطلة نهاية الأسبوع . وتشتمل البيانات التالية على أيام الأسبوع ورقم المبيعات اليومية المسجل لكل يوم من أيام الأسبوع . (وقد تلاحظ وجود إنقطاع لتسلسل الأيام . وسبب ذلك هو أن البيانات غير متاحة) .

المبيعات	373	761	412	180	242	148	221
اليوم	5	6	7	1	2	3	4
المبيعات	436	640	462	254	257	259	220
اليوم	5	6	7	1	2	3	4
المبيعات	382	737	610	246	238	342	307
اليوم	5	6	7	1	2	3	4
المبيعات	505	739	591	260	262	317	419
اليوم	5	6	7	1	2	3	4
المبيعات	335	550	884	793	379	497	407
اليوم	5	6	6	7	1	2	3
المبيعات	423	702	815	777	583	494	509
اليوم	4	5	6	7	1	2	3
المبيعات	456	587	878	674	480	322	453
اليوم	4	5	6	7	1	2	3
المبيعات	477	726	779	795	381	445	465
اليوم	4	5	6	7	1	2	3
المبيعات	443	544	869	884	700	668	349

4	5	6	7	7	1	2	اليوم
349	419	440	780	700	321	242	المبيعات
3	4	5	6	7	1	2	اليوم
385	287	438	749	600	300	311	المبيعات
3	4	5	6	7	1	2	اليوم
313	196	452	411	514	290	245	المبيعات
3	4	5	6	7	1	2	اليوم
193	301	385	643	583	343	544	المبيعات
3	4	5	6	7	1	7	اليوم
190	200	173	193	372	547	528	المبيعات
1	2	3	4	5	6	7	اليوم
274	285	168	250	495	635	306	المبيعات
1	2	3	4	5	6	7	اليوم
198	368	263	226	296	468	416	المبيعات
1	2	3	4	5	6	7	اليوم
311	324	464	544	336	498	380	المبيعات
1	2	4	5	6	7	1	اليوم

مدلول أرقام الأيام هو 1 = الاثنين ، 2 = الثلاثاء ، 3 = الأربعاء، 4 = الخميس ، 5 = الجمعة، 6 = السبت ، 7 = الأحد .

(a) ارسم بيانات المبيعات لكل يوم من أيام الأسبوع بيانياً. هل يظهر نموذج واضح؟ إذا كان الأمر كذلك ، صف هذا النموذج .

(b) نفذ إختبار تحليل التباين لتأكيد مشاهدتك فى الجزء (a) .

دراسة حالة (8-1) تحليل عوائد ضريبة الدخل :

اشتملت دراسة حالة (6-1) على تحليل عوائد ضريبة الدخل. وقد كان المجتمع يتكون من عوائد ضريبة دخل قدرها 112,201,751 المسجلة فى عام 1989 . وقد تم الحصول على البيانات من عينات عشوائية بسيطة لحوالى 75 عائد من كل خمس فئات لعوائد الضريبة من هذا المجتمع ، والآتى يمثل مدى الدخل الإجمالى المعدل (AGI) .

* $ 0 - $ 10,000
* $ 20,000 - $ 30,000
* $ 50,000 - $ 100,000
* $ 100,000 - $ 200,000
* $ 200,000 - $ 500,000

وقد تم تسجيل البيانات على data disk فى ملف يسمى CASE060 وهو يتكون من 379 صف ، حيث يقدم كل صف معلومات عن عائد واحد للضريبة . ومتغيرات الأعمدة المحددة فى الملف هى :

C_1 = تحديد الطبقة (الفئة) .

C_2 = الدخل الإجمالى المعدل .

C_3 = الإستقطاعات (الإستقطاع المعيارى = 0 ، البنود المفصولة = 1) .

C_4 = الإستقطاعات الكلية (المبلغ) .

C_5 = الدخل الخاضع للضريبة .

C_6 = الإستثناءات (الإعفاءات) الكلية (الزوج ، الزوجة ، التابعين) .

C_7 = الإئتمان الكلى (للطفل ، والعناية التابعة ، خلافه) .

C_8 = المساهمات الكلية .

C_9 = الإلتزام بالضريبة .

فى دراسة حالة (1.6) ، قد قمت بإجراء دراسة تفسيرية . وقد تضمن الإستدلال الطبقات ، ولم يكن مطلوباً إجراء إستدلال بإستخدام صيغ معروفة بالنسبة لمقارنة الطبقات لأنك لم تكن درست تحليل التباين . ومهمتك فى إستمرار دراسة حالة (1.6) تمتد لتشمل المناقشة السابقة ، وأيضاً المقارنة بين الطبقات بتطبيق الطرق التى درستها فى الفصل الثامن . وإذا كان هناك متغيرات أخرى ترغب الآن فى مقارنة الطبقات على أساسها ، لذلك يجب إستخدام تحليل التباين هنا .

ملحق (٨ أ) : Appendix - (8A)

تعليمات إستخدام الحاسب الآلى لإستخدام برنامج SAS , Minitab

سوف نستخدم مثالى (٨-٢)، (٨-٤) كنماذج لتوضيح تعليمات برامج Minitab، SAS التى تنتج مخرجات الحاسب الآلى لهذه المشاكل .

(٨- أ - ١) مثـال (٨-٢)

Minitab

لإنتاج مخرجات Minitab لمثال (٨-٢) نستخدم أوامر READ , NAME لإدخال البيانات . ويحدد أمر NAME الإسم لعمود Minitab . وقد أطلقنا C1 على «thickness ، C2 على «Kolo watt» (متغير الإستجابة). وبعد عبارة READ ، ندخل البيانات بوضع نوع كثافة المادة العازلة متبوعة بعدد ساعات الكيلو وات (بالآلاف) فى مجموعة واحدة معينة لكل سطر .

وتنتج التعليمات التالية شكل (٨-٦) ومخرجات Minitab لجدول (٨-٦)وينتج الأمر (PLOT) الشكل (٨-٦) (يتم إستخدام أسلوب مماثل لإنتاج الشكل (٨-١)، (٨-٥)) ، بينما ينتج الأمر ANOVA المخرجات فى جدول (٨-٦) . لاحظ أنه فى عبارة ANOVA نعبر عن معادلة بتنويع الإستجابة (الكيلو وات) فى الجانب الأيسر والمعالجات (الكثافة) فى الجانب الأيمن . ويتم إنهاء المعادلة بإنتهاء الفترة .

```
MTB > name C1 = «thickness» Cs = «Kilo watt»
MTB > read C1 C2
```

```
DATA > 4    14.4
DATA > 4    14.8
DATA > 4    14.8
DATA > 4    15.2
DATA > 4    14.3
DATA > 4    14.6
DATA > 6    14.5
DATA > 6    14.1
DATA > 6    14.6
DATA > 6    14.2
DATA > 8    13.8
DATA > 8    14.1
DATA > 8    13.7
DATA > 8    13.6
DATA > 8    14.0
DATA > 10 13.0
DATA > 10 13.2
DATA > 10 13.1
DATA > 12 12.8
DATA > 12 12.9
DATA > 12 13.2
DATA > 12 13.3
DATA > 12 12.7
DATA > end
MTB > LPOT C2 C1
MTB > anova C2 = C1
```

SAS

تذكر أنه فى SAS تسبق العبارات CARDS , INPUT , DATA البيانات. وتسمى عبارة INPUT المعالجات فى الشكلة (THIKNESS) ندخل البيانات بتحديد عدد المعالجات (ونستخدم ببساطة الأعداد ....1, 2, 3 لتحديد المعالجات المختلفة، متبوعة بمتغير الإستجابة. وكما كان الحال فى برنامج Minitab نضع مجموعة محددة فى كل سطر. وهذا يعنى -بالطبع- أننا نكرر رقم المعالجة عدد مرات يساوى المشاهدات الموجودة بالمعالجة.

وإذا كنا نرغب فى الوصول إلى الشكل البيانى لبرنامج SAS المماثل لشكل (٨-٦)، سوف نستخدم التعليمات التالية بعد إدخال البيانات.

```
PROC PLOT;
PLOT KILOWATT * THIK NESS;
```

لاحظ أنه كما كان الحال فى برنامج Minitab، يتم وضع المتغير الأول المذكور فى عبارة PLOT على المحور الرأسى y – axis ، بينما يتم وضع المتغير الثانى على المحور الأفقى X-axis.

وينتج الإجراء PROC ANOVA جدول تحليل التباين. ويتبع PROC ANOVA بعبارات MODEL , CLASS فى سطور منفصلة. وتحتوى عبارة CLASS على أسماء المعالجات المذكور فى عبارة INPUT (THIKNESS) وتوازن العبارة MODEL متغير الإستجابة مع المعالجات حيث يطلق عليهم معاً عبارة INPUT.

وبالنسبة لمثال(٨-٢) التعليمات التالية تنتج جدول تحليل التباين الموضح برنامج SAS، جدول تحليل التباين .

```
DATA;
INPUT THIKNESS KILOWATT
CARDS;
1    14.4
1    14.8
1    15.2
1    14.3
1    14.6
2    14.5
2    14.1
2    14.6
3    13.8
3    14.1
3    13.7
3    13.6
3    14.0
4    13.0
4    13.4
4    13.2
5    13.1
5    12.8
5    13.2
5    13.3
5    12.7
PROC ANOVA;
CLASS THIKNESS;
MODEL KILOWATT = THIKNESS'
```

Analysis of variance procedure

Dependent variable : **KILOW WATT**

source	DF	Sum squares	Mean squares	F value	Pr > F
Model	4	9.83556522	2.45889130	36.46	0.0001
Error	18	1.21400000	0.06744444		
corrected	22	11.04956522			

R-squares	c.v.	Root MSE	KILOW WATT
0.890131	1.881296	0.25970068	13.80434783

Source	DF	A nova SS	Mean squares	F value	Pr > F
THIKNESS	4	9.83556522	2.45889130	36.46	0.0001

(٨- أ - ٢) مثال (٨-٤)

Minitab

للحصول على الرسم البياني بشكل (٨-١٠) أو الأشكال البيانية فى الأشكال (٨-٨)، (٨-٩) وبالمثل جدول تحليل التباين، يمكن إستخدام نفس الأسلوب الذى ناقشناه فى ملحق 7 فى مثال (٨-٧).

وتنتج التعليمات التالية شكل (٨-١٠) وجدول تحليل التباين بإستخدام برنامج Mnitab لمثال (٨-٤). لاحظ أن عبارة DATA تلى الأمر SET للعمود C_1 (auto)، ويحدد الرقم الموجود بين القوسين الخمس سيارات، «4» التى تلى القوس المعلق توضح عدد السائقين. وبالمثل تلى عبارة DATA الأمر SET للعمود C_2 (السائق) وتعطى عدد السيارات أولاً ثم تحدد الأربعة سائقين بالأرقام داخل الأقواس. بعد الأمر SET للعمود C_3 (عدد الأميال)، ثم إستخدام خمس سطور للبيانات DATA لإدخال عدد الأميال – سطر لكل سيارة – . وينتج الأمر LPLOT الشكل البيانى الموجود فى شكل (٨-١٠). وإذا كنا نرغب فى وضع المعالجات على المحور الأفقى نضع C2 مكان C1 .

```
MTB > name c1 = 'auto' , c2 = 'driver' , c3 = 'mileage'
MTB > set c1
DATA > (1:5)4
DATA > end
MTB > set c2
DATA > 5 (1:4)
DATA > end
MTB > set c3
DATA > 33.6   36.9   34.2   34.8
DATA > 32.8   36.1   35.3   37.1
DATA > 31.9   32.1   33.7   34.8
DATA > 27.2   34.4   31.3   32.9
DATA > 30.6   35.3   34.6   32.8
DATA > end
MTB > IPLOT C3   C2   C1
MTB > a nova c3 = c2 c1 .

Factor      Type      Levels     Values
driver      fixed        4      1 2 3 4
auto        fixed        5      1 2 3 4 5

Analysis of Variance for mileage

Source      DF      SS       MS        F       P
driver       3     41.68    13.892    7.43    0.005
auto         4     38.09     9.523    5.09    0.012
Error       12     22.44     1.870
Total       19    102.21     5.380
```

SAS :

للحصول على مخرجات SAS لجدول تحليل التباين فى جدول (٨-١١)، نستخدم بدقة نفس الأومر المستخدمة فى مثال(٨-٢) . والإختلاف الوحيد هنا هو أننا نستخدم أسماء مختلفة لتعريف القطاعات، المعالجات، متغير الإستجابة. وكما كان الحال سابقاً، تحتوى CLASS على أسماء

القطاعات والمعالجات كما هى معطاة فى عبارة INPUT (DRIVER, AUTO) وتعادل عبارة MODEL أسماء متغير الإستجابة (MILEAGE) مع أسماء القطاعات والمعالجات . وكما هو الحال فى جميع أوامر SAS ، ننهى العبارات بالشولة المنقوطة (;) . وتنتج التعليمات التالية جدول تحليل التباين الموضح فى جدول (٨-11) :

برنامج SAS

```
DATA;
INPUT DRIVER AUTO MILEAGE;
CARDS;
1  1  33.6
1  2  32.8
1  3  31.9
1  4  27.2
1  5  30.6
2  1  36.9
2  2  36.1
2  3  32.1
2  4  34.4
2  5  35.3
3  1  34.2
3  2  35.3
3  3  33.7
3  4  31.3
3  5  34.6
4  1  34.8
4  2  37.1
4  3  34.8
4  4  32.9
4  5  32.8
PROC ANOVA;
CLASS DRIVER AUTO;
MODEL MILEAGE = DRIVER AUTO;
```

وإذا كنت ترغب فى الحصول على رسم بيانى SAS مماثل لشكل (8-10) سوف نستخدم التعليمات التالية بعد إدخال البيانات :

```
PROC PLOT;
PLOT MILEAGE * AUTO = DRIVER;
```

وكما كان الحال من قبل، يتم وضع المتغير المذكور أولاً فى عبارة PLOT على المحور الرأسى Y-axis ويتم وضع المتغير الثانى على المحور الأفقى X-axis وسوف تظهر على الرسم البيانى القيم المختلفة للمتغيرات المذكورة على يمين علامة (=) .

ملحق (٨ب) : Appendix - (8B)

المقادير الجبرية الأسهل حسابياً لمجموع المربعات

(٨-ب- ١) العينات المستقلة

فى معظم تطبيقات تحليل التباين ، يقوم الحاسب الآلى بإجراء الحسابات اللازمة. وفى حالة إستخدامك للآلة الحاسبة اليدوية، فإن المقادير الجبرية التالية المستخدمة فى حساب SST , SSTR – وهى المكافئة للصيغ المعطاة سابقاً – تبسط بشكل كبير جهود حساب هذه المقادير . ونظراً لأن SST = SSTR + SSE ، فإن الإجراء الأكثر شيوعاً هو حساب SST , SSTR، وبإستخدام هذه المقادير الجبرية يمكن تحديد قيمة SSE عن طريق الطرح :

$$SST = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{nj} X_{ij}^2 - \frac{T^2}{n} \quad \textbf{(8.23)}$$

$$SSTR = \sum_{j=1}^{k} \frac{T_j^2}{n_j} - \frac{T^2}{n} \quad \textbf{(8.24)}$$

وقد تبدو هذه المقادير صعبة، ولكنها فى الواقع سهلة التنفيذ. لاحظ أولاً أن التعبير الرياضى (8.23) هو مكافئ للتعبير الحسابى المستخدم فى حساب SST فى الفصل الثانى*. والفرق الوحيد هو أننا نستخدم الرمز T وليس $\sum X$ لتعريف مجموع المشاهدات فى مجموعة البيانات. ويقول التعبير الرياضى (8.23) أنه لحساب مجموع المربعات الكلى، نتبع الثلاث خطوات التالية :

خطوات حساب مجموع المربعات الكلى

(1) تربيع كل مشاهدة فى البيانات المبوبة بأكملها ؛ ومن ثم إيجاد مجموع هذه المربعات $\sum \sum X_{ij}^2$

(2) اجمع كل المشاهدات فى البيانات المبوبة كلها ويتم ايجاد مربع هذا المجموع ، ومن ثم قسمته على عدد المشاهدات فى البيانات المبوبة كلها: T^2/n .

(3) قم بطرح المقدار الثانى من الأول ينتج SST .

ويقول التعبير الرياضى (8.24) أنه لحساب SSTR نتبع أيضاً ثلاث خطوات، حيث الخطوتين الأخيرتين كتلك الخاصة بالمقدار SST :

خطوات حساب مجموع مربعات المعالجات

(1) تربيع مجموع المشاهدات فى كل عينة من K عينة وقسمة كل مجموع مربع على عدد المشاهدات فى العينة الخاصة به ، وتجميع كل المقادير الناتجة لكل العينات التى عددها K :

$\sum T_j^2 / n_j : K$

(2) مثلما كان الحال فى الخطوة 2 للمقدار SST : تجميع كل المشاهدات فى البيانات المبوبة وتربيع هذا المجموع، ومن ثم قسمته على العدد الكلى للمشاهدات فى البيانات المبوبة : T^2 / n

(3) مثلما كان الحال فى الخطوة 3 للمقدار SST : بطرح المقدار الثانى من الأول ينتج SSTR .

* $SST = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{(\sum X)^2}{n}$

وسوف نوضح هذه الحسابات بإستخدام بيانات مثال (٨-١) ، المشتمل على الحجم المعبأ (بالأونس) المسكوب بواسطة الآلات الأربع وقد تم تقديم البيانات على جدول (٨-٤) مرة أخرى ، ونعيدها هنا مرة ثالثة للتسهيل .

الآلة			
1	2	3	4
5.24	5.20	5.19	5.17
5.22	5.20	5.20	5.18
5.22	5.21	5.18	5.19
5.23	5.22		5.19
5.23			

مجاميع المعالجات والمجموع الكلى :

$$T1 = 5.24 + 5.22 + 5.22 + 5.23 + + 5.23 = 26.14$$
$$T2 = 5.20 + 5.20 + 5.21 + 5.22 = 20.83$$
$$T3 = 5.19 + 5.20 + 5.18 = 15.57$$
$$T4 = 5.17 + 5.18 + 5.19 + 5.19 = 20.73$$
$$T = 5.24 + 5.22 + ... + 5.19 + 5.19 = 83.27$$

حجم العينة الكلى :

$$n = 5 + 4 + 3 + 4 = 16$$

مجموع المربعات :

لاحظ $\left[\frac{T^2}{n} = \frac{(83.27)^2}{16} = 433.368306\right]$

$$SSE = (5.24)^2 + (5.22)^2 + ... + (5.19)^2 - 433.368306 = 0.006394$$

$$SSTR = \left[\frac{(26.14)^2}{5} + \frac{(20.83)^2}{4} + \frac{(15.57)^2}{3} + \frac{(20.73)^2}{4}\right] - 433.368306$$
$$= .005364$$

$$SSE = SST - SSTR = .006394 - .005364 = .00103$$

درجات الحرية :

المعالجات $K-1 = 4-1 = 3$

الخطأ العشوائى $= n-k = 16-4 = 12$

الكلى $= n-1 = 16-1 = 15$

متوسط المربعات :

$$MSTR = \frac{SSTR}{k-1} = \frac{.005364}{4-1} = .001788$$

قيمة F

$$MSE = \frac{SSE}{n-k} = \frac{.00103}{16-4} = .000086$$

$$F = \frac{MSRT}{MSE} = \frac{.001788}{.000086} = 20.79$$

(٨ - ب-٢) البيانات فى قطاعات :

التعبيرات الرياضية التالية لحساب SST , SSBL , SSTR المكافئة للتعبيرات الرياضية (8.10) - (8.12) على التوالى وهى أسهل بشكل كبير إذا لم تستخدم الحاسب الآلى .

$$SST = \sum_{j=1}^{K} \sum_{i=1}^{b} X_{ij}^2 - \frac{T^2}{bk} \qquad \textbf{(8.25)}$$

$$SSBL = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{b} T_i^2 - \frac{T^2}{bk} \qquad \textbf{(8.26)}$$

$$SSTR = \frac{1}{b} \sum_{j=1}^{k} T_j^2 - \frac{T^2}{bk} \qquad \textbf{(8.27)}$$

وكما رأينا سابقاً يمكن الحصول على مجموع مربعات الخطأ بعملية الطرح .

SSE = SST - SSBL - SSTR

ولوصف المقادير الجبرية المستخدمة فى الحصول على مجموع المربعات فى كلمات ، لاحظ أنه يتم تحديد مجموع المربعات الكلى ومجموع المربعات المعالجات بنفس الطريقة المستخدمة فى حالة العينات المستقلة. لاحظ أيضاً أن مقدار (T^2/bk) هو مربع مجموع المشاهدات فى بيانات العينة المبوبة الكلية مقسوماً على عدد المشاهدات الكلية فى البيانات المبوبة ، وهذا المقدار هو الذى يتم طرحه فى كل حالة. ولحساب SSBL بإستخدام التعبير الرياضى (8.26) نتبع الثلاث خطوات التالية :

خطوات حساب مجموع مربعات القطاعات

(1) تربيع مجموع كل قطاع ، جمع هذه المربعات لكل القطاعات ومن ثم قسمة هذا المجموع على K (عدد المعالجات) .

(2) مثلما كان الحال فى الخطوة 2 عند حساب SST : جمع كل المشاهدات فى بيانات العينة المبوبة الكلية وتربيع هذا المجموع ومن ثم قسمته على عدد المشاهدات الكلية فى بيانات العينة المبوبة حيث $(n= b\ k)$ وهو : (T^2/bk) .

(3) ويطرح (T^2/bk) من المقدار الذى حصلنا عليه فى الخطوة (1) ينتج SSBL .

وسوف نوضح حساب مجموع المربعات بإستخدام بيانات العينة لمثال (٨-٣) ، حيث يمثل عدد مرات أعطال الآلات اليومية على مدى خمس أيام لثلاثة ورديات. وقد تم إعادة البيانات مرة أخرى لتسهيل الحساب .

اليوم	الوردية A	B	C	المجموع
الاثنين	13	14	15	42
الثلاثاء	11	12	12	35
الأربعاء	11	13	12	36
الخميس	10	12	13	35
الجمعة	13	14	14	41
المجموع	58	65	66	189

لاحظ أنه يوجد K=3 معالجات (الورديات) ، ويوجد b = 5 قطاعات (الأيام) ، مجموع المشاهدات الكلية هو (T=189) . لذلك فإن :

$$\frac{T^2}{bk} = \frac{(189)^2}{(5)(3)} = 2,381.4$$

وبإستخدام التعبيرات الرياضية (8.25) ، (8.26) ، (8.27) ، نحدد مجاميع المربعات SST ، SSBL ، SSTR كالتالى :

$$SST = (13)^2 + (11)^2 + \dots\dots\dots + (13)^2 + (14)^2 - 2,381.4 = 25.6$$

$$SSBL = \frac{(42)^2 + (35)^2 + (36)^2 + (35)^2 + (41)^2}{3} - 2,381.4 = 15.6$$

$$SSTR = \frac{(58)^2 + (65)^2 + (66)^2}{5} - 2,381.4 = 7.6$$

ومن التعبير الرياضى (8.28) ، فإن مجموع مربعات الخطأ هو :

$$SSE = 25.6 - 15.6 - 7.6 = 2.4$$

الفصل التاسع

تحليل الإنحدار الخطي البسيط

SIMPLE LINEAR REGRESSION ANALYSIS

محتويات الفصل :

(٩-١) نظرة عامة على محتويات الفصل.

(٩-٢) العلاقة بين متغيرين : نموذج الإنحدار الخطى البسيط .

(٩-٣) تقدير معالم نموذج الإنحدار الخطى البسيط .

(٩-٤) الإستنتاج الإحصائي لنموذج الإنحدار الخطى البسيط .

(٩-٥) درجة الإعتماد على التقديرات والتنبؤات .

(٩-٦) العوامل المؤثرة فى الأخطاء المعيارية للإنحدار .

(٩-٧) الإرتباط : قياس العلاقة الخطية بين Y , X .

(٩-٨) نموذج الإنحدار البسيط : مثال شامل .

(٩-٩) ملخص .

ملحق 9 : تعليمات الحاسب بإستخدام Minitab ; SAS

الفصل التاسع

تحليل الإنحدار الخطي البسيط

SIMPLE LINEAR REGRESSION ANALYSIS

(٩-١) نظرة عامة على محتويات الفصل Bridging To New Topics

سوف نتعرف - فى هذا الفصل - على طرق لدراسة العلاقة الإحصائية بين المتغيرات. ويعرف النموذج الإحصائي - كما هو معرف فى الفصل الأول - بأنه معادلة رياضية توضح كيف يرتبط متغير ما بمتغير أو بعدة متغيرات أخرى. وبناء النماذج الإحصائية تساعدنا فى تعريف العوامل المحددة لمعظم إختلاف نواتج العمليات . كما تساعدنا أيضاً علي التنبؤ . فبفرض وجود نموذج إحصائى، يمكن التنبؤ بقيمة أحد المتغيرات عند معلومية قيم المتغير أو المتغيرات الأخرى .

بفرض أن مثمن عقارات يود تقدير القيمة السوقية لمنزل (القيمة السوقية هى القيمة المتوقعة لسعر بيع المنزل ، إذا ما تم بيعه) فيجب أن يكون لديه معلومات عن عينة مناظرة لأسعار بيع عدة منازل لها نفس خصائص هذا المنزل. والمشكلة الإحصائية هي: بالإعتماد على بيانات هذه العينة، كيف يمكن التنبؤ بسعر البيع لهذا المنزل بالتحديد .

بفرض وجود معلومات عن أسعار البيع لمجموعة من المنازل المناظرة فإن أفضل مقدر **best predicator** هو $\overline{X}$ (الوسط الحسابى لأسعار عينة المنازل المناظرة). ويكون متوسط العينة $\overline{X}$ أفضل مقدر إذ لم تتوافر معلومات أخرى غير سعر البيع. ومن خلال تقدير العلاقة بين سعر بيع المنزل وحجمه، يمكننا تحسين دقة التنبؤ بدرجة كبيرة. وتحليل الإنحدار: هو الطريقة التى تهتم ببناء العلاقة بين متغير (سعر البيع) ومتغير أو عدة متغيرات أخرى مثل (الحجم) .

وكما يوضح هذا المثال ، فإن هذا المدخل فى التنبؤ يبحث فى درجة إعتماد متغير ما على متغير آخر. ويعد تحليل الإنحدار طريقة لدراسة الارتباط **association** بين متغير ما (سعر البيع) ومتغير آخر أو أكثر (مثل الحجم) . فإذا كان الإهتمام بمتغير واحد فقط، سمى هذا الأسلوب «تحليل الإنحدار الخطى البسيط» **Simple Linear Regression Analysis** وهو موضوع هذا الفصل. بينما إذا كان الإهتمام بعدة متغيرات أخرى سمى هذا الأسلوب «تحليل الإنحدار المتعدد» **Multiple Linear Regression Analysis** وهو موضوع الفصل العاشر. ونموذج الإنحدار : هو معادلة رياضية تهتم بالتنبؤ بقيم متغير ما بالإعتماد على قيم متغير أو عدة متغيرات أخرى .

العمليات الحسابية في تحليل الانحدار تعتبر مجهدة بصورة واضحة عن تلك التي قابلناها في الفصول (٥-٨)، وفى الواقع فإن معظم تطبيقات الإنحدار الخطى المتعدد، يكون من الصعب استخراج نتائجها، بدون إستخدام البرامج الإحصائية مثل **Minitab** أو **SAS** . ومع ذلك فإننا سوف

نفترض أن الطالب يمكنه إستخدام الآلة الحاسبة لإيجاد تحليل جيد، قبل المحاولة على الحاسب. لذلك فإن معظم الأمثلة والتمارين لهذا الفصل سوف تحتوى على مجموعات صغيرة وبسيطة من البيانات. في الفصل العاشر سوف نعتمد كلية على الحاسب الآلي. حيث أن مفاهيم الانحدار المتعدد في معظمها هي امتداد للانحدار البسيط، يكون من المهم أن نتعلم جيداً هذه المفاهيم في هذا الفصل.

(٩-٢) العلاقة بين متغيرين : نموذج خط الإنحدار البسيط :

Relationships Between Two Variables: The Simple Linear Regression Model

بفرض أننا نرغب فى التنبؤ بسعر بيع أحد المنازل آخذاً فى الإعتبار حجم هذا المنزل. وبفرض أن Y تشير إلى سعر البيع ؛ X المساحة بالقدم المربع، سنشير إلى Y على أنه المتغير التابع أو متغير الاستجابة **response variable** وإلى X على أنه المتغير المفسر/المتنبئ به (المتغير الذى بنى عليه التنبؤ) **predictor variable**.

(٩-٢-١) علاقات الأرتباط مقابل علاقات السبب والنتيجة :

إذا كانت معلومية قيم X سوف تفيد فى التنبؤ بقيم Y، فإننا نقول انه يوجد إقتران أو إرتباط **assosciation** بين Y , X . ومن الأهمية فهم أن وجود الإرتباط بين متغيرين لا يعنى بالضرورة وجود علاقة السبب والنتيجة. والسببية تعنى أن التغير فى X يتسبب فى تغير مناظر فى Y بفرض ثبات جميع العوامل الأخرى المؤثرة على Y . وهذا ربما يكون حقيقيا للعلاقة بين حجم المنزل وسعر البيع، فزيادة حجم المنزل سوف تزيد قيمته إذا بقيت العوامل الأخرى ثابتة على ما هى عليه .

ويمكن أن يستخدم تحليل الإنحدار كنموذج إرتباط بين المتغيرات، ولكن لا يمكن أن نتأكد من أن هذه العلاقة سببية. والفكرة الأساسية هي تثبيت جميع العوامل الأخرى المؤثرة على المتغير التابع، مع تغيير المتغير المفسر.

شكل الإنتشار : Scatter Diagrams

نرغب الآن في إنشاء نموذج يوضح العلاقة المصاحبة (إذا كان هناك علاقة) بين Y ، X. وسوف نبدأ بتحديد مجتمع الدراسة الذي نريد تقدير أو إستنتاج معلماته. إفترض أننا سوف نقوم بمشاهدة سعر البيع وكذلك الحجم لكل منزل في مجتمع الدراسة (في الحقيقة لانستطيع عمل هذه الدراسة نظراً لأن معظم هذه المنازل لم تباع حديثاً وبالتالي لن نستطيع معرفة سعر البيع). وبرسم البيانات المشاهدة، سوف نستطيع تكوين فكرة عن العلاقة بين Y ، X.

بفرض تسجيل السعر والحجم لكل منزل فى مجتمع المنازل المناظرة، ومن خلال الرسم البيانى للبيانات المسجلة، يمكن ملاحظة طبيعة العلاقة بين Y , X . وبفرض أن الشكل البيانى (شكل ٩-١) يوضح العلاقة بين سعر البيع Y والحجم X ، هذا الشكل يسمى بالشكل الإنتشارى. والشكل الانتشاري قدم من قبل في الفصل الثاني، كوسيلة لفحص طبيعة العلاقة بيانياً بين متغيرين.

ترشيحات العمـــــلاء

40	300	100	120	160	140	80	110	160	180	80	710
120	220	100	250	120	20	160	120	1.340	160	280	200
560	3.940	60	600	140	840	230	160	530	200	140	480
140	120	560	120	38	180	100	220	100	220	1.040	

ترشيحات صفحة الإعلانات

950	120	75	200	100	620	320	120	140	80	130	830
180	320	90	1.220	380	60	70	1.600	80	120	160	760
850	420	150	140	20	520	260	100	100	840	480	150
230	220	220									

الترشيحات المهنية

2.200	140	480	480	150	2.840	560	530	2.470	140	160	320
80	320	180	940	580	900	1.730	100	900	360	1.560	1.050
680	4.160	200	165	300	60	1.870	390	1.920	740	140	60
140	40	540	8.320	1.020	175	1.260	710	720	1.540	4.680	1.460
400	1.120	240	360	540	1.500	3.280	880	1.120			

(a) مثل البيانات بيانياً، هل يظهر وجود فروق بين متوسطات أحجام المبيعات في الثلاث مصادر المرشحة؟

(b) إستخدم إختبار تحليل التباين لتحديد إلى أى مدى يمكن لدليل العينة إنكار صحة الإدعاء القائل بأنه لا توجد فروق فى أسعار البيع للثلاثة مصادر فى المتوسط.

(٨-٤٨)هذا التمرين هو امتداد للتمارين (٢-٢٥)، (٢-٤٣)، (٢-٧٢)، (٢-٨٦) التى تتعامل مع دراسة أسلوب العمل للمشتركين فى Low firm Northrup and Bauers ومن المفترض أن يتم تحديد عدد ساعات billable المعتمدة على القسم داخل الشركة المشاركة. والبيانات التالية عدد ساعات billable على مدى 9 شهور لكل من 43 مشارك مقترناً مع قسمه .

Hrs.	802	1,287	1,255	1,178	1,275	767	1,424
Dept.	1	1	1	2	1	1	3
Hrs.	1,328	1,223	790	1,339	1,434	1,050	796
Dept.	2	1	1	4	4	5	6
Hrs.	1,308	1,464	1,389	1,316	1,325	1,494	1,096
Dept.	6	6	7	4	8	1	1
Hrs.	1,482	1,493	1,452	1,060	1,407	1,067	934
Dept.	3	7	3	6	6	8	3
Hrs.	901	1,400	1,320	1,132	1,256	858	1,346
Dept.	1	1	7	1	3	1	8
Hrs.	885	1,084	1,065	1,211	1,379	1,340	1,098
Dept.	1	5	5	1	3	6	5
Hrs.	1,407						
Dept.	1						

حيث .Hrs عدد الساعات   .Dept القسم

دليل القسم :

1 = القضايا التجارية ، وقضايا العمل .

2 = علاقات العمل .
3 = الأملاك العقارية .
4 = البنوك والتمويل .
5 = الأعمال الإدارية .
6 = المتعلق بالشركات .
7 = التأمين والمسئولية المدنية عن المنتجات .
8 = الأموال والإئتمان .

(a) مثل البيانات بيانياً . هل يظهر لك أن متوسط عدد الساعات billable يختلف بين الثمانية أقسام؟ فإذا كان الأمر كذلك ، صف الفروق .

(b) إستخدم إختبار تحليل التباين لتحديد إلى أى مدى يمكن لبيانات العينة أن تجزم بأن الأقسام تختلف من حيث متوسط عدد ساعات billable للمشاركين .

(٨-٤٩) هذا التمرين هو امتداد للتمارين (٢-٢٦)، (٢-٧٣)، (٢-٨٧) وهو امتداد أيضاً لدراسة مبيعات الأيس كريم لمؤسسة تجارية لمدة أربعة أشهر مختارة من المبيعات الكلية لعام معين . وهناك عامل واحد غالباً ما يستخدم لشرح التغير المشاهد فى مبيعات الأيس كريم لهذه المؤسسة وهو أيام الأسبوع . وعادة ما يتزايد العمل فى عطلة نهاية الأسبوع . وتشتمل البيانات التالية على أيام الأسبوع ورقم المبيعات اليومية المسجل لكل يوم من أيام الأسبوع . (وقد تلاحظ وجود إنقطاع لتسلسل الأيام . وسبب ذلك هو أن البيانات غير متاحة) .

المبيعات	373	761	412	180	242	148	221
اليوم	5	6	7	1	2	3	4
المبيعات	436	640	462	254	257	259	220
اليوم	5	6	7	1	2	3	4
المبيعات	382	737	610	246	238	342	307
اليوم	5	6	7	1	2	3	4
المبيعات	505	739	591	260	262	317	419
اليوم	5	6	7	1	2	3	4
المبيعات	335	550	884	793	379	497	407
اليوم	5	6	6	7	1	2	3
المبيعات	423	702	815	777	583	494	509
اليوم	4	5	6	7	1	2	3
المبيعات	456	587	878	674	480	322	453
اليوم	4	5	6	7	1	2	3
المبيعات	477	726	779	795	381	445	465
اليوم	4	5	6	7	1	2	3
المبيعات	443	544	869	884	700	668	349

اليوم	4	5	6	7	7	1	2
المبيعات	349	419	440	780	700	321	242
اليوم	3	4	5	6	7	1	2
المبيعات	385	287	438	749	600	300	311
اليوم	3	4	5	6	7	1	2
المبيعات	313	196	452	411	514	290	245
اليوم	3	4	5	6	7	1	2
المبيعات	193	301	385	643	583	343	544
اليوم	3	4	5	6	7	1	7
المبيعات	190	200	173	193	372	547	528
اليوم	1	2	3	4	5	6	7
المبيعات	274	285	168	250	495	635	306
اليوم	1	2	3	4	5	6	7
المبيعات	198	368	263	226	296	468	416
اليوم	1	2	3	4	5	6	7
المبيعات	311	324	464	544	336	498	380
اليوم	1	2	4	5	6	7	1

مدلول أرقام الأيام هو 1 = الاثنين ، 2 = الثلاثاء ، 3 = الأربعاء، 4 = الخميس ، 5 = الجمعة، 6 = السبت ، 7 = الأحد .

(a) ارسم بيانات المبيعات لكل يوم من أيام الأسبوع بيانياً. هل يظهر نموذج واضح؟ إذا كان الأمر كذلك ، صف هذا النموذج .

(b) نفذ إختبار تحليل التباين لتأكيد مشاهدتك فى الجزء (a) .

دراسة حالة (8-1) تحليل عوائد ضريبة الدخل :

اشتملت دراسة حالة (6-1) على تحليل عوائد ضريبة الدخل. وقد كان المجتمع يتكون من عوائد ضريبة دخل قدرها 112,201,751 المسجلة فى عام 1989 . وقد تم الحصول على البيانات من عينات عشوائية بسيطة لحوالى 75 عائد من كل خمس فئات لعوائد الضريبة من هذا المجتمع ، والآتى يمثل مدى الدخل الإجمالى المعدل (AGI) .

* $ 0 - $ 10,000
* $ 20,000 - $ 30,000
* $ 50,000 - $ 100,000
* $ 100,000 - $ 200,000
* $ 200,000 - $ 500,000

وقد تم تسجيل البيانات على data disk فى ملف يسمى CASE060 وهو يتكون من 379 صف ، حيث يقدم كل صف معلومات عن عائد واحد للضريبة . ومتغيرات الأعمدة المحددة فى الملف هى :

C_1 = تحديد الطبقة (الفئة) .

C_2 = الدخل الإجمالى المعدل .

C_3 = الإستقطاعات (الإستقطاع المعيارى = 0 ، البنود المفصولة = 1) .

C_4 = الإستقطاعات الكلية (المبلغ) .

C_5 = الدخل الخاضع للضريبة .

C_6 = الإستثناءات (الإعفاءات) الكلية (الزوج ، الزوجة ، التابعين) .

C_7 = الإئتمان الكلى (للطفل ، والعناية التابعة ، خلافه) .

C_8 = المساهمات الكلية .

C_9 = الإلتزام بالضريبة .

فى دراسة حالة (1.6) ، قد قمت بإجراء دراسة تفسيرية . وقد تضمن الإستدلال الطبقات ، ولم يكن مطلوباً إجراء إستدلال بإستخدام صيغ معروفة بالنسبة لمقارنة الطبقات لأنك لم تكن درست تحليل التباين . ومهمتك فى إستمرار دراسة حالة (1.6) تمتد لتشمل المناقشة السابقة ، وأيضاً المقارنة بين الطبقات بتطبيق الطرق التى درستها فى الفصل الثامن . وإذا كان هناك متغيرات أخرى ترغب الآن فى مقارنة الطبقات على أساسها ، لذلك يجب إستخدام تحليل التباين هنا .

ملحق (٨ أ) : Appendix - (8A)

تعليمات إستخدام الحاسب الآلى لإستخدام برنامج SAS , Minitab

سوف نستخدم مثالى (٨-٢)، (٨-٤) كنماذج لتوضيح تعليمات برامج Minitab، SAS التى تنتج مخرجات الحاسب الآلى لهذه المشاكل .

(٨- أ - ١) مثـال (٨-٢)

Minitab

لإنتاج مخرجات Minitab لمثال (٨-٢) نستخدم أوامر READ , NAME لإدخال البيانات . ويحدد أمر NAME الإسم لعمود Minitab . وقد أطلقنا C1 على «thickness» ، C2 على «Kolo watt» (متغير الإستجابة) . وبعد عبارة READ ، ندخل البيانات بوضع نوع كثافة المادة العازلة متبوعة بعدد ساعات الكيلو وات (بالآلاف) فى مجموعة واحدة معينة لكل سطر .

وتنتج التعليمات التالية شكل (٨-٦) ومخرجات Minitab لجدول (٨-٦)وينتج الأمر (PLOT) الشكل (٨-٦) (يتم إستخدام أسلوب مماثل لإنتاج الشكل (٨-١)، (٨-٥)) ، بينما ينتج الأمر ANOVA المخرجات فى جدول (٨-٦) . لاحظ أنه فى عبارة ANOVA نعبر عن معادلة بتنويع الإستجابة (الكيلو وات) فى الجانب الأيسر والمعالجات (الكثافة) فى الجانب الأيمن . ويتم إنهاء المعادلة بإنتهاء الفترة .

```
MTB > name C1 = «thickness» Cs = «Kilo watt»
MTB > read C1 C2
```

```
DATA > 4   14.4
DATA > 4   14.8
DATA > 4   14.8
DATA > 4   15.2
DATA > 4   14.3
DATA > 4   14.6
DATA > 6   14.5
DATA > 6   14.1
DATA > 6   14.6
DATA > 6   14.2
DATA > 8   13.8
DATA > 8   14.1
DATA > 8   13.7
DATA > 8   13.6
DATA > 8   14.0
DATA > 10 13.0
DATA > 10 13.2
DATA > 10 13.1
DATA > 12 12.8
DATA > 12 12.9
DATA > 12 13.2
DATA > 12 13.3
DATA > 12 12.7
DATA > end
MTB > LPOT C2 C1
MTB > anova C2 = C1
```

SAS

تذكر أنه فى SAS تسبق العبارات CARDS , INPUT , DATA البيانات. وتسمى عبارة INPUT المعالجات فى المشكلة (THIKNESS) ندخل البيانات بتحديد عدد المعالجات (ونستخدم ببساطة الأعداد ....1, 2, 3 لتحديد المعالجات المختلفة، متبوعة بمتغير الإستجابة. وكما كان الحال فى برنامج Minitab نضع مجموعة محددة فى كل سطر. وهذا يعنى -بالطبع- أننا نكرر رقم المعالجة عدد مرات يساوى المشاهدات الموجودة بالمعالجة.

وإذا كنا نرغب فى الوصول إلى الشكل البيانى لبرنامج SAS المماثل لشكل (٨-٦)، سوف نستخدم التعليمات التالية بعد إدخال البيانات.

```
PROC PLOT;
PLOT KILOWATT * THIK NESS;
```

لاحظ أنه كما كان الحال فى برنامج Minitab، يتم وضع المتغير الأول المذكور فى عبارة PLOT على المحور الرأسى y – axis ، بينما يتم وضع المتغير الثانى على المحور الأفقى X-axis .

وينتج الإجراء PROC ANOVA جدول تحليل التباين. ويتبع PROC ANOVA بعبارات MODEL , CLASS فى سطور منفصلة. وتحتوى عبارة CLASS على أسماء المعالجات المذكور فى عبارة INPUT (THIKNESS) وتوازن العبارة MODEL متغير الإستجابة مع المعالجات حيث يطلق عليهم معاً عبارة INPUT .

وبالنسبة لمثال(٨-٢) التعليمات التالية تنتج جدول تحليل التباين الموضح برنامج SAS، جدول تحليل التباين .

```
DATA;
INPUT THIKNESS KILOWATT
CARDS;
1   14.4
1   14.8
1   15.2
1   14.3
1   14.6
2   14.5
2   14.1
2   14.6
3   13.8
3   14.1
3   13.7
3   13.6
3   14.0
4   13.0
4   13.4
4   13.2
5   13.1
5   12.8
5   13.2
5   13.3
5   12.7
PROC ANOVA;
CLASS THIKNESS;
MODEL KILOWATT = THIKNESS'
```

Analysis of variance procedure

Dependent variable : **KILOW WATT**

source	DF	Sum squares	Mean squares	F value	Pr > F
Model	4	9.83556522	2.45889130	36.46	0.0001
Error	18	1.21400000	0.06744444		
corrected	22	11.04956522			

R-squares	c.v.	Root MSE	KILOW WATT
0.890131	1.881296	0.25970068	13.80434783

Source	DF	A nova SS	Mean squares	F value	Pr > F
THIKNESS	4	9.83556522	2.45889130	36.46	0.0001

(٨- ١ - ٢) مثال (٨-٤)

Minitab

للحصول على الرسم البياني بشكل (٨-١٠) أو الأشكال البيانية فى الأشكال (٨-٨)، (٨-٩) وبالمثل جدول تحليل التباين، يمكن إستخدام نفس الأسلوب الذى ناقشناه فى ملحق 7 فى مثال (٨-٧).

وتنتج التعليمات التالية شكل (٨-١٠) وجدول تحليل التباين بإستخدام برنامج Mnitab لمثال (٨-٤) . لاحظ أن عبارة DATA تلى الأمر SET للعمود C_1 (auto) ، ويحدد الرقم الموجود بين القوسين الخمس سيارات ، «4» التى تلى القوس المعلق توضح عدد السائقين. وبالمثل تلى عبارة DATA الأمر SET للعمود C_2 (السائق) وتعطى عدد السيارات أولاً ثم تحدد الأربعة سائقين بالأرقام داخل الأقواس. بعد الأمر SET للعمود C_3 (عدد الأميال)، ثم إستخدام خمس سطور للبيانات DATA لإدخال عدد الأميال - سطر لكل سيارة - . وينتج الأمر LPLOT الشكل البيانى الموجود فى شكل (٨-١٠) . وإذا كنا نرغب فى وضع المعالجات على المحور الأفقى نضع C2 مكان C1 .

```
MTB > name c1 = 'auto' , c2 = 'driver' , c3 = 'mileage'
MTB > set c1
DATA > (1:5)4
DATA > end
MTB > set c2
DATA > 5 (1:4)
DATA > end
MTB > set c3
DATA > 33.6   36.9   34.2   34.8
DATA > 32.8   36.1   35.3   37.1
DATA > 31.9   32.1   33.7   34.8
DATA > 27.2   34.4   31.3   32.9
DATA > 30.6   35.3   34.6   32.8
DATA > end
MTB > IPLOT C3   C2   C1
MTB > a nova c3 = c2 c1 .

Factor      Type     Levels      Values
driver     fixed          4    1 2 3 4
auto       fixed          5    1 2 3 4 5

Analysis of Variance for mileage

Source     DF       SS        MS        F        P
driver     3      41.68    13.892     7.43    0.005
auto       4      38.09     9.523     5.09    0.012
Error      12     22.44     1.870
Total      19    102.21     5.380
```

: SAS

للحصول على مخرجات SAS لجدول تحليل التباين فى جدول (٨-١١)، نستخدم بدقة نفس الأومر المستخدمة فى مثال(٨-٢) . والإختلاف الوحيد هنا هو أننا نستخدم أسماء مختلفة لتعريف القطاعات، المعالجات، متغير الإستجابة. وكما كان الحال سابقاً، تحتوى CLASS على أسماء

القطاعات والمعالجات كما هى معطاة فى عبارة INPUT (DRIVER, AUTO) وتعادل عبارة MODEL أسماء متغير الإستجابة (MILEAGE) مع أسماء القطاعات والمعالجات. وكما هو الحال فى جميع أوامر SAS ، ننهى العبارات بالشولة المنقوطة (;) . وتنتج التعليمات التالية جدول تحليل التباين الموضح فى جدول (٨-11) :

برنامج SAS

```
DATA;
INPUT DRIVER AUTO MILEAGE;
CARDS;
1  1  33.6
1  2  32.8
1  3  31.9
1  4  27.2
1  5  30.6
2  1  36.9
2  2  36.1
2  3  32.1
2  4  34.4
2  5  35.3
3  1  34.2
3  2  35.3
3  3  33.7
3  4  31.3
3  5  34.6
4  1  34.8
4  2  37.1
4  3  34.8
4  4  32.9
4  5  32.8
PROC ANOVA;
CLASS DRIVER AUTO;
MODEL MILEAGE = DRIVER AUTO;
```

وإذا كنت ترغب فى الحصول على رسم بيانى SAS مماثل لشكل (8-10) سوف نستخدم التعليمات التالية بعد إدخال البيانات :

```
PROC PLOT;
PLOT MILEAGE * AUTO = DRIVER;
```

وكما كان الحال من قبل، يتم وضع المتغير المذكور أولاً فى عبارة PLOT على المحور الرأسى Y-axis ويتم وضع المتغير الثانى على المحور الأفقى X-axis وسوف تظهر على الرسم البيانى القيم المختلفة للمتغيرات المذكورة على يمين علامة (=) .

Appendix - (8B) : (٨ب) ملحق

المقادير الجبرية الأسهل حسابياً لمجموع المربعات

(٨-ب- ١) العينات المستقلة

فى معظم تطبيقات تحليل التباين ، يقوم الحاسب الآلى بإجراء الحسابات اللازمة. وفى حالة إستخدامك للآلة الحاسبة اليدوية، فإن المقادير الجبرية التالية المستخدمة فى حساب SST , SSTR – وهى المكافئة للصيغ المعطاة سابقاً – تبسط بشكل كبير جهود حساب هذه المقادير . ونظراً لأن SST = SSTR + SSE ، فإن الإجراء الأكثر شيوعاً هو حساب SST , SSTR، وبإستخدام هذه المقادير الجبرية يمكن تحديد قيمة SSE عن طريق الطرح :

$$SST = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{nj} X_{ij}^2 - \frac{T^2}{n} \tag{8.23}$$

$$SSTR = \sum_{j=1}^{k} \frac{T_j^2}{n_j} - \frac{T^2}{n} \tag{8.24}$$

وقد تبدو هذه المقادير صعبة، ولكنها فى الواقع سهلة التنفيذ. لاحظ أولاً أن التعبير الرياضى (8.23) هو مكافئ للتعبير الحسابى المستخدم فى حساب SST فى الفصل الثانى*. والفرق الوحيد هو أننا نستخدم الرمز T وليس $\sum X$ لتعريف مجموع المشاهدات فى مجموعة البيانات. ويقول التعبير الرياضى (8.23) أنه لحساب مجموع المربعات الكلى، نتبع الثلاث خطوات التالية :

خطوات حساب مجموع المربعات الكلى

(1) تربيع كل مشاهدة فى البيانات المبوبة بأكملها ؛ ومن ثم إيجاد مجموع هذه المربعات $\sum \sum X_{ij}^2$

(2) اجمع كل المشاهدات فى البيانات المبوبة كلها ويتم ايجاد مربع هذا المجموع، ومن ثم قسمته على عدد المشاهدات فى البيانات المبوبة كلها: T^2/n .

(3) قم بطرح المقدار الثانى من الأول ينتج SST .

ويقول التعبير الرياضى (8.24) أنه لحساب SSTR نتبع أيضاً ثلاث خطوات، حيث الخطوتين الأخيرتين كتلك الخاصة بالمقدار SST :

خطوات حساب مجموع مربعات المعالجات

(1) تربيع مجموع المشاهدات فى كل عينة من K عينة وقسمة كل مجموع مربع على عدد المشاهدات فى العينة الخاصة به ، وتجميع كل المقادير الناتجة لكل العينات التى عددها K :

$\sum T_j^2 / n_j$:K

(2) مثلما كان الحال فى الخطوة 2 للمقدار SST : تجميع كل المشاهدات فى البيانات المبوبة وتربيع هذا المجموع، ومن ثم قسمته على العدد الكلى للمشاهدات فى البيانات المبوبة : T^2 / n

(3) مثلما كان الحال فى الخطوة 3 للمقدار SST : بطرح المقدار الثانى من الأول ينتج SSTR .

---

* $SST = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{(\sum X)^2}{n}$

وسوف نوضح هذه الحسابات بإستخدام بيانات مثال (٨-١) ، المشتمل على الحجم المعبأ (بالأونس) المسكوب بواسطة الآلات الأربع وقد تم تقديم البيانات على جدول (٨-٤) مرة أخرى، ونعيدها هنا مرة ثالثة للتسهيل .

الآلة			
1	2	3	4
5.24	5.20	5.19	5.17
5.22	5.20	5.20	5.18
5.22	5.21	5.18	5.19
5.23	5.22		5.19
5.23			

مجاميع المعالجات والمجموع الكلى :

$$T1 = 5.24 + 5.22 + 5.22 + 5.23 + + 5.23 = 26.14$$
$$T2 = 5.20 + 5.20 + 5.21 + 5.22 = 20.83$$
$$T3 = 5.19 + 5.20 + 5.18 = 15.57$$
$$T4 = 5.17 + 5.18 + 5.19 + 5.19 = 20.73$$
$$T = 5.24 + 5.22 + ... + 5.19 + 5.19 = 83.27$$

حجم العينة الكلى :

$$n = 5 + 4 +3 + 4 = 16$$

مجموع المربعات :

لاحظ $\left[\frac{T^2}{n} = \frac{(83.27)^2}{16} = 433.368306\right]$

$$SSE= (5.24)^2 + (5.22)^2 + ... + (5.19)^2 - 433.368306 = 0.006394$$

$$SSTR = \left[\frac{(26.14)^2}{5} + \frac{(20.83)^2}{4} + \frac{(15.57)^2}{3} + \frac{(20.73)^2}{4}\right] - 433.368306$$
$$= .005364$$

$$SSE = SST - SSTR = .006394 - .005364 = .00103$$

درجات الحرية :

المعالجات $K-1 = 4-1 = 3$

الخطأ العشوائى $= n-k = 16-4 = 12$

الكلى $= n-1 = 16-1 = 15$

متوسط المربعات :

$$MSTR = \frac{SSTR}{k-1} = \frac{.005364}{4-1} = .001788$$

$$MSE = \frac{SSE}{n-k} = \frac{.00103}{16-4} = .000086$$

قيمة F

$$F = \frac{MSRT}{MSE} = \frac{.001788}{.000086} = 20.79$$

(٨ - ب-٢) البيانات فى قطاعات :

التعبيرات الرياضية التالية لحساب SSTR , SSBL , SST المكافئة للتعبيرات الرياضية (8.10) - (8.12) على التوالى وهى أسهل بشكل كبير إذا لم تستخدم الحاسب الآلى .

$$SST = \sum_{j=1}^{K} \sum_{i=1}^{b} X_{ij}^2 - \frac{T^2}{bk} \quad (8.25)$$

$$SSBL = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{b} T_i^2 - \frac{T^2}{bk} \quad (8.26)$$

$$SSTR = \frac{1}{b} \sum_{j=1}^{k} T_j^2 - \frac{T^2}{bk} \quad (8.27)$$

وكما رأينا سابقاً يمكن الحصول على مجموع مربعات الخطأ بعملية الطرح .

$$SSE = SST - SSBL - SSTR$$

ولوصف المقادير الجبرية المستخدمة فى الحصول على مجموع المربعات فى كلمات، لاحظ أنه يتم تحديد مجموع المربعات الكلى ومجموع المربعات المعالجات بنفس الطريقة المستخدمة فى حالة العينات المستقلة. لاحظ أيضاً أن مقدار (T^2/bk) هو مربع مجموع المشاهدات فى بيانات العينة المبوبة الكلية مقسوماً على عدد المشاهدات الكلية فى البيانات المبوبة، وهذا المقدار هو الذى يتم طرحه فى كل حالة. ولحساب SSBL بإستخدام التعبير الرياضى (8.26) نتبع الثلاث خطوات التالية :

خطوات حساب مجموع مربعات القطاعات
(1) تربيع مجموع كل قطاع، جمع هذه المربعات لكل القطاعات ومن ثم قسمة هذا المجموع على K (عدد المعالجات) .
(2) مثلما كان الحال فى الخطوة 2 عند حساب SST : جمع كل المشاهدات فى بيانات العينة المبوبة الكلية وتربيع هذا المجموع ومن ثم قسمته على عدد المشاهدات الكلية فى بيانات العينة المبوبة حيث ($n= b\ k$) وهو : (T^2/bk) .
(3) وبطرح (T^2/bk) من المقدار الذى حصلنا عليه فى الخطوة (1) ينتج SSBL .

وسوف نوضح حساب مجموع المربعات بإستخدام بيانات العينة لمثال (٨-٣) ، حيث يمثل عدد مرات أعطال الآلات اليومية على مدى خمس أيام لثلاثة ورديات. وقد تم إعادة البيانات مرة أخرى لتسهيل الحساب .

اليوم	الوردية A	B	C	المجموع
الاثنين	13	14	15	42
الثلاثاء	11	12	12	35
الأربعاء	11	13	12	36
الخميس	10	12	13	35
الجمعة	13	14	14	41
المجموع	58	65	66	189

لاحظ أنه يوجد K=3 معالجات (الورديات) ، ويوجد b = 5 قطاعات (الأيام) ، مجموع المشاهدات الكلية هو (T=189) . لذلك فإن :

$$\frac{T^2}{bk} = \frac{(189)^2}{(5)(3)} = 2,381.4$$

وبإستخدام التعبيرات الرياضية (8.25) ، (8.26) ، (8.27) ، نحدد مجاميع المربعات SST ، SSBL ، SSTR كالتالى :

$$SST = (13)^2 + (11)^2 + \dots\dots\dots + (13)^2 + (14)^2 - 2,381.4 = 25.6$$

$$SSBL = \frac{(42)^2 + (35)^2 + (36)^2 + (35)^2 + (41)^2}{3} - 2,381.4 = 15.6$$

$$SSTR = \frac{(58)^2 + (65)^2 + (66)^2}{5} - 2,381.4 = 7.6$$

ومن التعبير الرياضى (8.28) ، فإن مجموع مربعات الخطأ هو :

SSE = 25.6 - 15.6 - 7.6 = 2.4