تمرين (2)

تحليل الحساسية: Sensitivity Analysis

1- باستخدام الحل البياني: Graphical Sensitivity Analysis

- حساسية الحل الأمثل للتغير (زيادة / نقصان) في الموارد المتوفرة (الطرف الأيمن من القيود)

Sensitivity of the optimum solution to changes in the availability of resources (R.H.S. of constraints)

مثال 1 :

ينتج مصنع نوعين من المنتجات باستخدام آلتين I , II . إنتاج وحدة من نوع (1) يتطلب 2 ساعة باستخدام آلة I , 1 ساعة باستخدام آلة II . وبالنسبة لنوع (2) إنتاج الوحدة يتطلب 1 ساعة باستخدام آلة I , 3 ساعة باستخدام آلة II. الربح الصافي للوحدة من نوع (1) , نوع (2) هو 30 ريال , 20 ريال على الترتيب. ووقت التشغيل الكلي المتاح يوميا لكل آلة هو 8 ساعات. كم وحدة يجب إنتاجها يوميا من كلا النوعين للحصول على أكبر ربح.

Example:

A factory produces two products on two machines. A unit of product 1 requires 2 hours on machine I and 1 hour on machine II. For product 2, a unit requires 1 hour on machine I and 3 hours on machine II. The revenues per unit of products 1 , 2 are 30 SAR and 20 SAR respectively. The total daily processing time available for each machine is 8 hours. How many units of each product should be produced daily to maximize revenue?

نفرض أن: x_1 , x_2 ... **عدد الوحدات المنتجة يوميا من كلا النوعين** (1), (2)

النموذج الرياضي: **Mathematical model:**

$$\text{Maximize } Z = 30\,x_1 + 20\,x_2$$

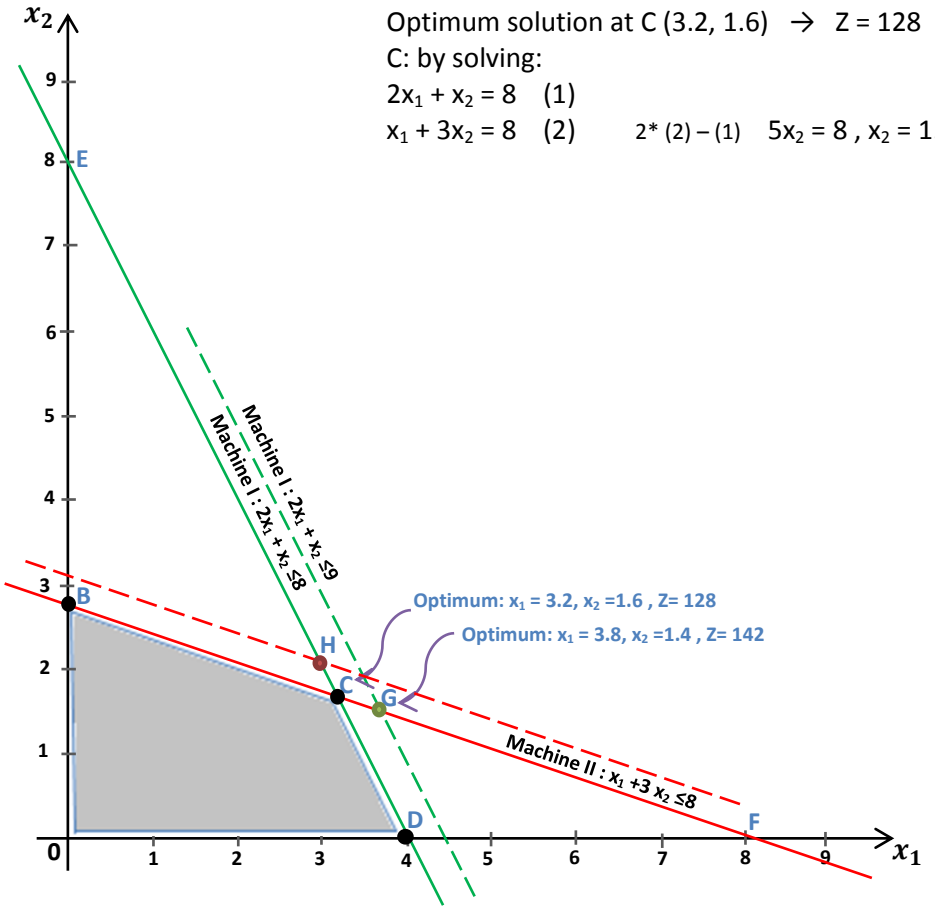
Subject to

$$2\,x_1 + x_2 \le 8 \quad [1] \text{ machine I}$$

$$x_1 + 3\,x_2 \le 8 \quad [2] \text{ machine II}$$

$$x_1 \ge 0\ , x_2 \ge 0$$

Graphical solution: **الحل البياني:**



Optimum solution at C (3.2, 1.6) → Z = 128 الحل الأمثل

C: by solving:

$2x_1 + x_2 = 8$ (1)

$x_1 + 3x_2 = 8$ (2) 2* (2) – (1) $5x_2 = 8$, $x_2 = 1.6$, $x_1 = 3.2$

تعريف: سعر الظل: معدل التغير في القيمة المثلى لدالة الهدف عند زيادة او نقصان الموارد المتوفرة بمقدار الوحدة

(سعر شراء وحدة واحدة إضافية من المورد)

Dual / Shadow price: rate of change of optimum z value for a unit change in available resources. (unit worth of a resource)

1- إذا أمكن زيادة وقت التشغيل لكل من الآلتين I , II أي منهما يجب ان يعطى الاولوية؟

If the factory can increase the capacity of both machines, which machine should receive higher priority?

آلة I : عند زيادة قدرة التشغيل اليومي من 8 ساعات إلى 9 ساعات – يتغير الحل الامثل من نقطة C إلى نقطة G

الحل الامثل عند G (3.8 , 1.4) بالتعويض Z = 142

سعر الظل لآلة I = (القيمة المثلى لدالة الهدف عند G – القيمة المثلى لدالة الهدف عند C) / (التغير في قدرة التشغيل) = 14 ريال/ساعة

$$\text{Dual price for machine I} = \frac{Z_G - Z_C}{Capacity\ change} = \frac{142 - 128}{9 - 8} = 14 \text{ SAR/hr}$$

آلة II : عند زيادة قدرة التشغيل اليومي من 8 ساعات إلى 9 ساعات – سعر الظل لآلة II = 2 ريال/ساعة

وبالتالي تعطى الأولوية لآلة I – لأن كل ساعة تشغيل إضافية لآلة I تزيد الربح بمقدار 14 ريال مقابل 2 ريال لآلة II .

2- حدد المجال الذي يمكن أن تتغير فيه قدرة التشغيل اليومي لكل من الآلتين I , II (الموارد المتوفرة)

Determine the feasibility ranges (range of applicability of the computed dual prices) for each of the machines I, II

- سعر الظل للآلة I = 14 ريال / ساعة يظل ثابتا مع زيادة او نقصان قدرة التشغيل بتحريك القيد موازيا لنفسه ما بين النقطتين: B , F

أصغر قدرة تشغيل للآلة I عند B (0 , 2.67) = 2 * 0 + 1 * 2.67 = 2.67 ساعة

أكبر قدرة تشغيل للآلة I عند F (8 , 0) = 2 * 8 + 1 * 0 = 16 ساعة

المجال : [2.67 , 16]

- سعر الظل للآلة II = 2 ريال / ساعة يظل ثابتا مع زيادة او نقصان قدرة التشغيل بتحريك القيد موازيا لنفسه ما بين النقطتين: D , E

أصغر قدرة تشغيل للآلة II عند D (4 , 0) = 1 * 4 + 3 * 0 = 4 ساعة

أكبر قدرة تشغيل للآلة II عند E (0 , 8) = 1 * 0 + 3 * 8 = 24 ساعة

المجال : [4 , 24]

عند تغير الموارد المتوفرة في حدود مجال القابلية فإن ذلك يؤثر على القيمة المثلى لدالة الهدف

التغير في القيمة المثلى لدالة الهدف = سعر الظل * التغير في المورد المتوفر

Change in optimal objective value = dual price * change in resource

3- اقتراح بزيادة قدرة التشغيل لكل من الآلتين I , II بتكلفة إضافية 10 ريال/ساعة – هل هذا الاقتراح مقبول؟

A suggestion is made to increase the capacities of machines I , II at an additional cost of 10 SAR/hr Is this advisable?

- بالنسبة للآلة I : صافي الربح لساعة التشغيل الإضافية = 14 – 10 = 4 ريال

- بالنسبة للآلة II : صافي الربح لساعة التشغيل الإضافية = 2 – 10 = 8- ريال – مقبول فقط بالنسبة للآلة I

4- في حالة زيادة قدرة التشغيل للآلة I من 8 ساعات إلى 13 ساعة كيف تؤثر هذه الزيادة على القيمة المثلى لدالة الربح؟

If the capacity of machine I increased from its present value 8 hr.s to 13 hr.s, how will this increase impact the optimum revenue?

Increase in revenue: الزيادة في القيمة المثلى لدالة الربح = 14 * (13 – 8) = 70 ريال

Total revenue: القيمة المثلى لدالة الربح بعد الزيادة = 128 + 70 = 198 ريال

– حساسية الحل الأمثل للتغير في الربح للوحدة أو التكلفة للوحدة (معاملات دالة الهدف)

Sensitivity of the optimum solution to changes in unit profit or unit cost (coeff.'s of objective fun.)

تابع مثال 1:

في المثال السابق التغير في الربح للوحدة (معاملات دالة الهدف) سيؤدي إلى تغير في ميل Z . الحل الامثل يبقى عند C طالما دالة الهدف تقع بين القيود المعرفة لنقطة الحل الامثل (قيود وثيقة). أي انه هناك مدى لمعاملات دالة الهدف يحافظ على الحل الامثل كما هو عند C .

Example: (changes in the objective coefficients)

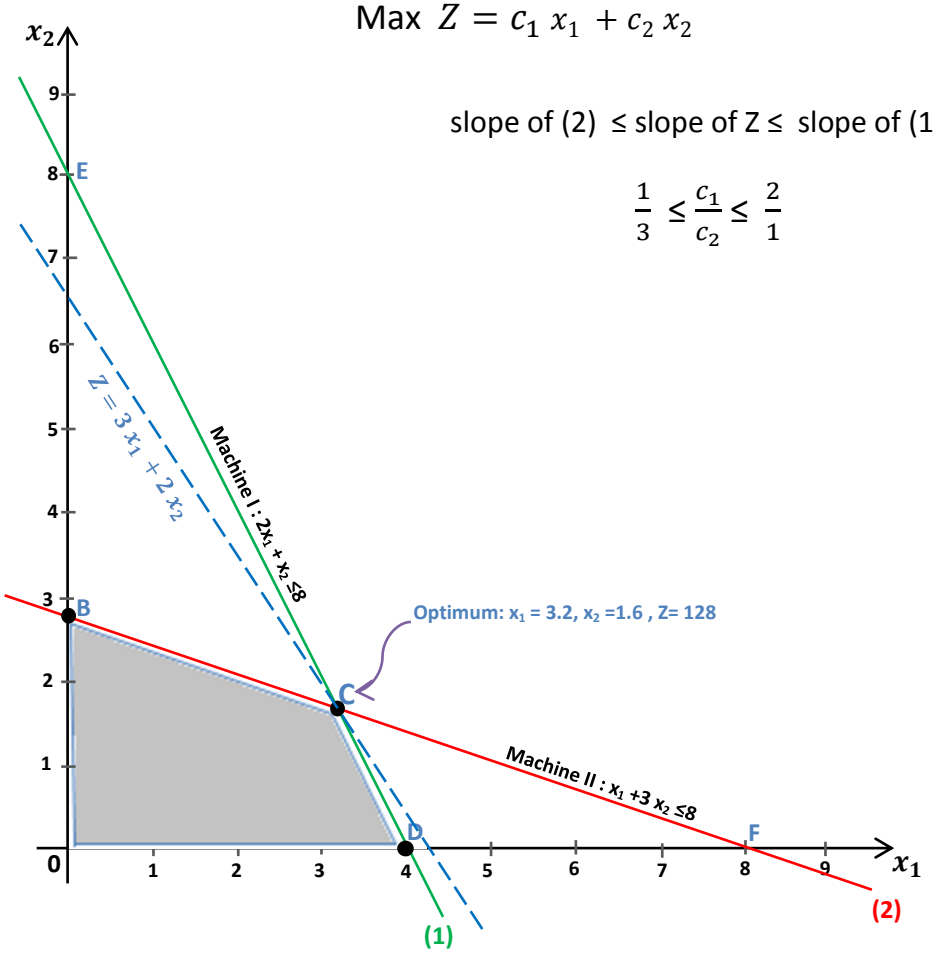
In the previous example, changes in the unit revenues (objective function coefficients) will change the slope of Z. However, the optimum solution will remain at point C as long as the objective function lies between lines BF and DE, the two constraints that define the optimum point. This means that there is a range of values for the objective coefficients that will keep the optimum solution unchanged at C.

Objective function in general format: يمكن كتابة دالة الهدف بالشكل العام:

$$\text{Max } Z = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

slope of (2) ≤ slope of Z ≤ slope of (1)

$$\frac{1}{3} \leq \frac{c_1}{c_2} \leq \frac{2}{1}$$



1– افترض ان ربح الوحدة للمنتج من نوع (1) ونوع (2) تم تغييره إلى 35 ريال , 25 ريال على الترتيب. هل يبقى الحل الامثل كما هو؟

Suppose that the unit revenues for products 1, 2 are changed to 35 and 25 SAR, respectively. Will the current optimum solution change?

دالة الهدف الجديدة:

$$\text{Max } Z = 35\,x_1 + 25\,x_2$$

الحل الامثل يبقى كما هو عند C لأن :

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{35}{25} = 1.4 \text{ remains within the optimality range } (.333 , 2)$$

القيمة المثلى لدالة الهدف تتغير إلى:

$$Z = 35(3.2) + 25\,(1.6) = 152 \text{ SAR}$$

2– بفرض أن ربح الوحدة من المنتج (2) ثابت عند قيمته الحالية 20 ريال. إلى أي مدى يمكن تغيير ربح الوحدة من المنتج (1) دون أن يتغير الحل الأمثل؟

Suppose that the unit revenue for products 2 is fixed at its current value of c_2=20 SAR , what is the associated range for c_1 , the unit revenue for product 1that will keep the optimum solution unchanged?

من الشرط:

$$\frac{1}{3} \le \frac{c_1}{c_2} \le \frac{2}{1}$$

بالتعويض عن c_2=20

$$\frac{1}{3} \times 20 \le c_1 \le 2 \times 20$$

مدى الأمثلية لـ c_1

$$6.67 \le c_1 \le 40$$

بالمثل يمكن تحديد المدى الذى يمكن أن تتغير فيه c_2 دون ان يتغير الحل الأمثل عند ثبات c_1 عند 30 ريال للوحدة

بالتعويض عن c_1=30

$$3 \times 30 \ge c_2 \ge \frac{1}{2} \times 30$$

مدى الأمثلية لـ c_2

$$15 \le c_2 \le 90$$