تمرين (3)

General form of linear model:

الشكل العام للنموذج الخطي:

Maximize / Minimize $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$

Subject to

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n \le (\ge)(=) b_1 \qquad [1]$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n \le (\ge)(=) b_2 \qquad [2]$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n \le (\ge)(=) b_m \qquad [m]$$
$$x_1 \ge 0 \ , x_2 \ge 0, \cdots , x_n \ge 0$$

عدد القيود ... m　　عدد متغيرات القرار ... n

General form of linear model in matrix notation:

الشكل العام للنموذج الخطي باستخدام المصفوفات:

Max / Min $Z = C^T X$

Subject to

$$A\,X \le (\ge)(=) b$$
$$X \ge 0$$

$$C^T = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n] \ , \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} , \ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} , \ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Canonical form of linear model:

الصورة القانونية للنموذج الخطي:

Maximize $\qquad Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$

Subject to

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n \le b_1 \qquad [1]$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n \le b_2 \qquad [2]$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n \le b_m \qquad [m]$$
$$x_1 \ge 0 \ , x_2 \ge 0, \cdots , x_n \ge 0$$

ملحوظة: مسائل التكبير / التصغير الطبيعية: تكون جميع القيود في مسألة التكبير (≤) (أقل من) **وفي مسألة التصغير** (≥)(أكبر من)

Standard form of linear model: الصورة القياسية للنموذج الخطي:

Max / Min $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$

Subject to

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \quad [1]$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = b_2 \quad [2]$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n = b_m \quad [m]$$
$$x_1 \geq 0 \ , x_2 \geq 0, \cdots , x_n \geq 0$$

- **جميع القيود في صورة معادلات**

يتم تحويل المتباينات إلى معادلات بإضافة (slack variable– متغير مهمل) أو بطرح (surplus variable– متغير فائض)

مثال: القيد: $2x_1 + 5x_2 \leq 12$ يتم تحويله إلى: $2x_1 + 5x_2 + S_1 = 12$

مثال: القيد: $x_1 - 5x_2 + 3x_3 \geq 15$ يتم تحويله إلى: $x_1 - 5x_2 + 3x_3 - S_2 = 15$

- **الطرف الأيمن لكل قيد i , $i = 1,2, \dots , m$ يكون غير سالبا**
- **جميع متغيرات القرار غير سالبة** $x_j \geq 0, \ j = 1,2, \dots , n$

في حالة وجود متغير j غير مقيد بإشارة يتم استبداله بالفرق بين متغيرين غير سالبين وفقا للعلاقة: $x_j = x_j^{\,+} - x_j^{\,-}$

- **يمكن أن يكون الهدف تكبير أو تصغير دالة الهدف, لاحظ أن:**

$$Max(Z) = -Min(-Z)$$

- **مثال: ضع النموذج التالي في الصورة القياسية:**

Maximize $Z = 4x_1 + x_2 - 3x_3$

Subject to

$$x_1 - 5x_2 + 3x_3 \leq 20$$
$$2x_1 + 7x_2 - 2x_3 \leq 10$$
$$x_1 - 5x_2 - 3x_3 \geq 3$$
$$x_1 \geq 0$$

الحل:

Maximize $Z = 4x_1 + (x_2^{\,+} - x_2^{\,-}) - 3\,(x_3^{\,+} - x_3^{\,-})$

Subject to

$$x_1 - 5\,(x_2^{\,+} - x_2^{\,-}) + 3\,(x_3^{\,+} - x_3^{\,-}) + S_1 = 20$$
$$2\,x_1 + 7\,(x_2^{\,+} - x_2^{\,-}) - 2\,(x_3^{\,+} - x_3^{\,-}) + S_2 = 10$$
$$x_1 - 5\,(x_2^{\,+} - x_2^{\,-}) - 3(x_3^{\,+} - x_3^{\,-}) - S_3 = 3$$
$$x_1 \geq 0, x_2^{\,+} \geq 0, x_2^{\,-} \geq 0, x_3^{\,+} \geq 0, x_3^{\,-} \geq 0, S_1 \geq 0, S_2 \geq 0, S_3 \geq 0$$

حل نماذج البرمجة الخطية باستخدام خوارزمية السمبلكس

والمقارنة بين الحل البياني والحل الجبري

مثال: لدينا البرنامج الخطي التالي:

Maximize $Z = 30\, x_1 + 20\, x_2$

Subject to

$$2\, x_1 + x_2 \leq 8 \qquad [1]$$

$$x_1 + 3\, x_2 \leq 8 \qquad [2]$$

$$x_1 \geq 0 \;, x_2 \geq 0$$

أوجد جميع الحلول الأساسية وبين لكل منها ما يلي:

أ- النقطة البيانية المقابلة لها على الرسم البياني

ب-المتغيرات الأساسية وغير الأساسية وقيمها

ج- هل الحل الأساسي هو حل ممكن؟

د- أي الحلول الاساسية هو حل أمثل؟

حل البرنامج الخطي باستخدام خوارزمية السمبلكس

تعاريف هامة:

الحل الممكن: (Feasible solution) هو الحل الذي لا يتعارض مع أي من القيود – فضاء الحلول الممكنة (Feasible Solution Set) – الحل الأمثل (Optimum Solution) هو أفضل الحلول الممكنة .

إذا كان لدينا برنامج خطي بـ n متغيرات قرار و m قيدا وعند كتابته بالصورة القياسية فإن عدد المتغيرات الكلي بعد إضافة المتغيرات الراكدة يصبح n+m

الحل الأساسي: (Basic solution) هو الحل الناتج عند إعطاء المتغيرات الغير أساسية وعددها n القيمة صفر وبالتالي نحصل على m من المعادلات بـ m مجهول.

الحل الأساسي الممكن (Basic feasible solution) أي حل اساسي يحقق شروط عدم السالبية

الحل الأساسي الممكن الإبتدائي (Initial basic feasible solution) بإعطاء متغيرات القرار عددها n القيمة صفر وحل المعادلات الناتجة.

النموذج الرياضي:

Maximize $Z = 30\,x_1 + 20\,x_2$

Subject to

$$2\,x_1 + x_2 \le 8 \qquad [1]$$
$$x_1 + 3\,x_2 \le 8 \qquad [2]$$
$$x_1 \ge 0\ , x_2 \ge 0$$

في الصورة القياسية: (Standard form)

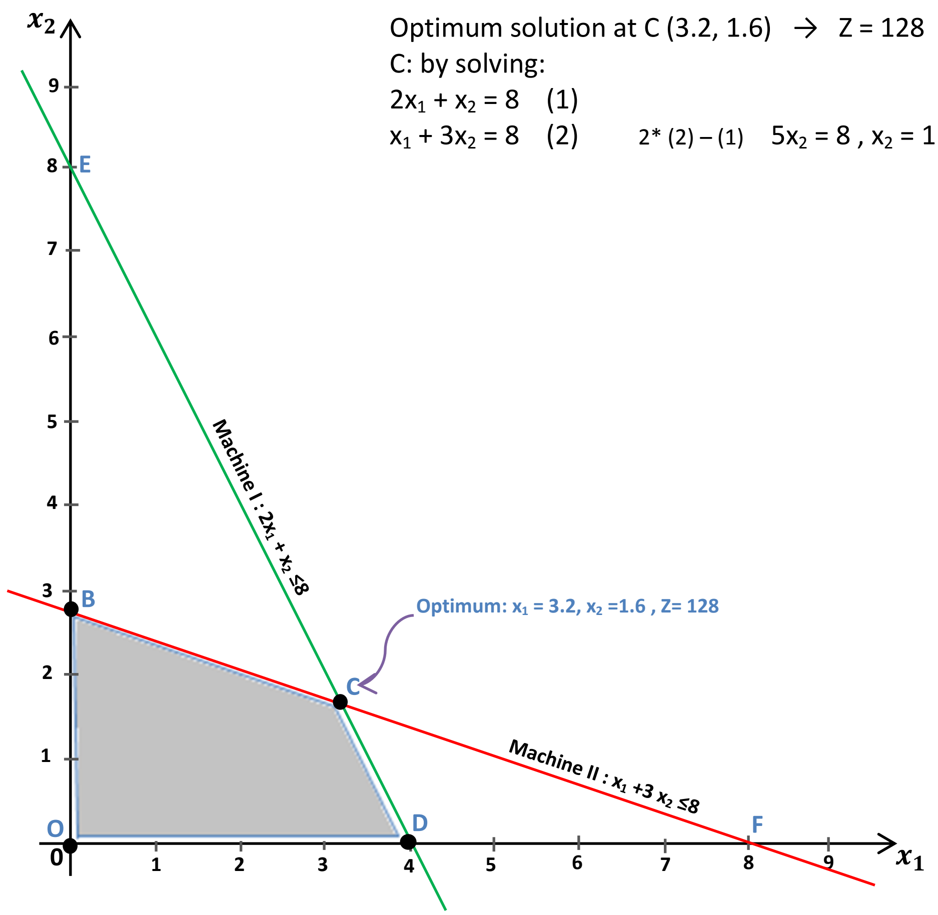
Maximize $Z = 30\,x_1 + 20\,x_2$

Subject to

$$2\,x_1 + x_2 + S_1 = 8 \qquad [1]$$
$$x_1 + 3\,x_2 + S_2 = 8 \qquad [2]$$
$$x_1 \ge 0\ ,\ x_2 \ge 0\ ,\ S_1 \ge 0\ , S_2 \ge 0$$

Graphical solution: **الحل البياني:**

Optimum solution at C (3.2, 1.6) → Z = 128 الحل الأمثل
C: by solving:
$2x_1 + x_2 = 8$ (1)
$x_1 + 3x_2 = 8$ (2) 2* (2) – (1) $5x_2 = 8$, $x_2 = 1.6$, $x_1 = 3.2$



عدد متغيرات القرار: n = 2 , عدد القيود: m = 2 , إجمالي المتغيرات: n + m = 4

عندما نعطي n من المتغيرات القيمة صفر فإننا نحصل على $\binom{n+m}{n} = \binom{4}{2} = 6$ من الحلول الأساسية.

الحلول الأساسية:

حل امثل؟ Optimum?	ممكنة؟ Feasible?	النقطة الركنية Extreme point	المتغيرات غير الأساسية Nonbasic variables	المتغيرات الأساسية Basic variables	رقم
Z = 0, N	Y	O	$x_1 = 0, x_2 = 0$	$S_1 = 8, S_2 = 8$	1
Z = 120, N	Y	D	$S_1 = 0, x_2 = 0$	$x_1 = 4, S_2 = 4$	2
-	N	-	$S_2 = 0, x_2 = 0$	$x_1 = 8, S_1 = -8$	3
-	N	-	$x_1 = 0, S_1 = 0$	$x_2 = 8, S_2 = -16$	4
Z = 53.33, N	Y	B	$x_1 = 0, S_2 = 0$	$x_2 = 2.67, S_1 = 5.33$	5
Z = 128, Y	Y	C	$S_1 = 0, S_2 = 0$	$x_1 = 3.2, x_2 = 1.6$	6

الحل باستخدام خوارزمية السمبلكس:

- **لحل المثال باستخدام السمبلكس نعيد كتابة البرنامج بالشكل التالي:**

Maximize Z
Subject to

$$Z - 30x_1 - 20x_2 + 0*S_1 + 0*S_2 = 0$$
$$2x_1 + x_2 + S_1 + 0*S_2 = 8$$
$$x_1 + 3x_2 + 0*S_1 + S_2 = 8$$
$$x_1 \geq 0 \;,\; x_2 \geq 0 \;,\; S_1 \geq 0 \;,\; S_2 \geq 0$$

- **الجدول الابتدائي:**

الحل الاساسي الممكن الابتدائي: بوضع $x_1 = 0, x_2 = 0$ متغيرات غير أساسية. فإن $S_1 = 8, S_2 = 8$

B.V.	x_1	x_2	S_1	S_2	R.H.S.
S_1	**2**	**1**	**1**	**0**	**8**
S_2	**1**	**3**	**0**	**1**	**8**
Z	**-30**	**-20**	**0**	**0**	**0**

نحدد المتغير الداخل (entering variable) المتغير غير الأساسي المناظر للقيمة الاكثر سالبيه في صف دالة الهدف ويسمى العمود الموضح بعمود الارتكاز. نحدد المتغير الخارج (leaving variable) المتغير الأساسي المناظر لأقل نسبة Ø حيث $\emptyset_1 = \frac{8}{2}$ و $\emptyset_2 = \frac{8}{1}$ ويسمى الصف الموضح بصف الارتكاز وتقاطع الصف والعمود يسمى نقطة الارتكاز.

عند تكوين الجدول التالي:

- يكتب المتغير الداخل مكان المتغير الخارج في المتغيرات الأساسية
- قسمة صف الارتكاز على نقطة الارتكاز
- العمود الخاص بالمتغير الأساسي الخانة المناظرة لنفسه تعطى القيمة 1 وباقي الخانات القيمة صفر
- حساب الخانات المتبقية:

$$\text{العنصر الجديد} = \text{العنصر القديم} - \frac{\text{العنصر المقابل من عمود الارتكاز} * \text{العنصر المقابل من صف الارتكاز}}{\text{عنصر نقطة الارتكاز}}$$

B.V.	x_1	x_2	S_1	S_2	R.H.S.
S_1	**2**	**1**	**1**	**0**	**8**
S_2	**1**	**3**	**0**	**1**	**8**
Z	**-30**	**-20**	**0**	**0**	**0**

- **الجدول التالي:**

B.V.	x_1	x_2	S_1	S_2	R.H.S.
x_1	**1**	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	**0**	**4**
S_2	**0**	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	**1**	**4**
Z	**0**	**-5**	**15**	**0**	**120**

- **الجدول التالي:**

B.V.	x_1	x_2	S_1	S_2	R.H.S.
x_1	**1**	**0**	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{16}{5}$
x_2	**0**	**1**	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{5}$
Z	**0**	**0**	**14**	**2**	**128**

شرط الأمثلية:

جميع العناصر في صف دالة الهدف غير سالبة

نكون قد وصلنا للحل الأمثل: $x_1 = 3.2, x_2 = 1.6$ و $S_1 = 0, S_2 = 0$ **والقيمة المثلى لدالة الهدف** Z = 128