حل الإختبار النهائي	الفصل الأول 1442 هـ	481 ريض

السؤال 1 :

1. $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cos\left(\frac{kx}{n}\right)=\int_0^1\cos(tx)dt=\frac{\sin x}{x}$ إذا كان $x\in\mathbb{R}^*$ و 1 إذا كان $x=0$.

2.

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx-\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x}dx &= \int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sin x)}dx\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(x)}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sin x)}dx\end{aligned}$$

التكامل $\int_0^{+\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sin x)}dx$ غير متقارب و باستعمال التكامل بالتجزيء التكامل $\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(x)}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sin x)}dx$ متقارب. إذاً التكامل $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x}dx$ متباعد.

السؤال 2 :

1. بما أن المتسلسلة $\sum_{n\geq1}nx^n$ متقاربة على الفترة $(-1,1)$، فإن $\lim_{n\to+\infty}nx^n=0$، لكل $x\in(-1,1)$.

2. إذا كان $x=1$، فإن المتسلسلة $\sum_{n\geq1}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$ متباعدة. و نلاحظ أن $f_n(x)=f_n(\frac{1}{x})$ إذا كانت $f_n(x)=\frac{x^n}{1+x^{2n}}$. إذاً يكفي دراسة تقارب المتسلسلة على الفترة $[0,1)$.
إذا كان $x\in[0,1)$، فإن $f_n(x)\leq x^n$. و بما أن المتسلسلة $\sum_{n\geq1}x^n$ متقاربة، فإن المتسلسلة $\sum_{n\geq1}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$ متقاربة على $[0,+\infty)\setminus\{1\}$.

كذلك المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{1+x^n}$ متقاربة على $[0,1)$ و متباعدة على الفترة $(1,+\infty)$ لأن $\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{1+x^n} = 1$ لكل $x>1$.

3. $a_0=1$ ،$a_1=-2$ ،$a_2=3$. لتكن $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= 1-2x+\sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n = 1-2x+x\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n+1}x^n \\
&= 1-2x-2x\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n - x^2 f(x) \\
&= 1-2x-2x(f(x)-1)-x^2 f(x).
\end{aligned}$$

إذاً $f(x)=\frac{1}{(x+1)^2} = -\frac{d}{dx}\frac{1}{x+1} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(n+1)x^n$ و $a_n=(-1)^n(n+1)$.

السؤال 3 :

1. معطى في المحاضرة.
2. $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.
   $\sup_{x\in[0,1]} f_n(x) = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}3^{\frac{n}{2}}}\right) = \frac{3^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n}}$.
   المتتالية لا تتقارب بانتظام على الفترة $[0,1]$.
3. $\int_0^1 f_n(x)dx \overset{t=\sqrt{n}3^{\frac{n}{2}}x}{=} \frac{1}{2n}\ln(1+n3^n)$.
   $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx \frac{1}{2}\ln 3$ و $\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx = 0$.

السؤال 4 :