حل الإختبار النهائي	الفصل الثاني 1442 هـ	تحليل 2 482 ريض

حل السؤال 1 :

1. بجوار 0، $x > 0$ $\ln x \approx \dfrac{\ln x}{1-x}$ و تكامل الدالة
متقارب بجوار 0، $x > 0$.
كذلك $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{1-x} = -1$. إذاً التكامل $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}dx$ متقارب.
التكامل $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\sin x}{1+x^2}dx$ هو تكامل ريمان. و باستعمال مبرهنة آبل $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x\sin x}{1+x^2}dx$ لأن
الدالة $\dfrac{x}{1+x^2}$ تناقصية و تكامل الدالة $\sin x$ محدود ب 2 على كل فترة محدودة.

2. بما أن $\left|\ln(1-\dfrac{1}{n^2})\right| \leq \dfrac{1}{n^2}$، فإن المتسلسلة $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\ln(1-\frac{1}{n^2})$ متقاربة مطلقا.

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{+\infty}\ln(1-\frac{1}{n^2}) &= \sum_{n=2}^{+\infty}\ln(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}) \\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

3. المتتالية $(f_n)_n$ غير معرفة في $x=-1$.
$f_n(1) = 0$.
إذا كانت $|x| < 1$، فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = -1$.
إذا كانت $|x| > 1$، فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 1$.

حل السؤال 2 :

1. $f_n(0) = 0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ إذا كانت $x > 0$.

2. $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^n xe^{-x}=1$

3. التقارب غير منتظم للمتتالية $(f_n)_n$ على الفترة $[0,1]$.

4. المتتالية $\left(\sin(\frac{x}{n})\right)_n$ تناقصية و $0\leq\sin(\frac{x}{n})\leq\frac{\pi}{n}$. إذاً المتسلسلة متقاربو بانتظام على الفترة $[0,\pi]$.

حل السؤال 3 :

1. $f(x)=\frac{1-x}{1-x+x^2}=\frac{1-x^2}{1+x^3}=(1-x^2)\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{3n}$.

2. لتكن $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$، نحصل على

$\frac{1}{x}(f(x)-1+x)=2(f(x)-1)-xf(x)+\frac{2x}{1-x}$ لكل $|x|<1$. و بالتالي فإن

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{2}{(1-x)^3}-\frac{6}{(1-x)^2}+\frac{5}{1-x}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}5x^n-\sum_{n=0}^{+\infty}6(n+1)x^n+\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)x^n\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(n^2-3n+1))x^n.
\end{aligned}$$

إذاً $a_n=n^2-3n+1$ لكل $n\geq 0$.

حل السؤال 4 :

1. لدوال $\frac{\sin(e^x)}{1+nx^2}$ متصلة و $|\frac{\sin(e^x)}{1+nx^2}|\leq\frac{1}{1+x^2}$ و هي قابلة لتكامل على $[0,+\infty[$. إذاً $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(e^x)}{1+nx^2}dx=0$.

2. $\frac{x}{1+e^x} = \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n xe^{-(n+1)x}$ ، و باستعمال مبرهنة التقارب المسقوف

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+e^x}dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$