جامعة الملك سعود

كلية العلوم | **قسم الرياضيات** | **الإختبار النهائي**

الفصل الثاني 1442 هـ | **481 ريض** | **الزمن ثلاث ساعات**

السؤال 1 :

1. ادرس تقارب التكاملين المعتلين $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}dx$ و $\int_0^{+\infty} \frac{x\sin x}{1+x^2}dx$.
2. ادرس تقارب المتسلسلة $\sum_{n\geq 2} \ln(1-\frac{1}{n^2})$ و أوجد مجموعها.
3. ادرس تقارب متتالية الدوال $(f_n)_n$ حيث $f_n(x) = \frac{x^n-1}{x^n+1}$، و $x \in \mathbb{R}$.

السؤال 2 :

1. ادرس تقارب متتالية الدوال $(f_n)_n$ على الفترة $[0,+\infty[$، حيث $f_n(x) = n^2xe^{-nx}$.
2. أوجد $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$.
3. ادرس التقارب المنتظم للمتتالية $(f_n)_n$ على الفترة $[0,1]$.
4. ادرس التقارب البسيط و التقارب المنتظم للمتسلسلة $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \sin\left(\frac{x}{n}\right)$ على الفترة $[0,\pi]$.

السؤال 3 :

1. أوجد متسلسلة القوى للدالة $f(x) = \frac{1-x}{1-x+x^2}$.
2. لتكن $(a_n)_n$ متتالية من الأعداد الحقيقية حيث $a_0 = 1, a_1 = -1$ و $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} + 2$ لكل $n \geq 1$.
   أوجد قيمة a_n لكل $n \in \mathbb{N}$.

السؤال 4 :

1. لتكن الدالة $\mu^* : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, +\infty[$ المعرفة بما يلي

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{إذا كان } A = \emptyset \\ 10 & \text{إذا كان } A \neq \emptyset \end{cases}$$

أثبت أن الدالة قياس خارجي و أوجد المجموعات القابلة للقياس بالنسبة لهذا القياس الخارجي.

2. أوجد مع التبرير النهاية التالية: $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(e^x)}{1+nx^2} dx$.

3. أثبت مع التعليل أن $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+e^x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.