حل الإختبار النهائي	الفصل الأول 1443 هـ	تحليل 2 482 ريض

السؤال 1 :

1. بما أن الدالة $\varphi(x)=|x|$ متصل، فإن الدالة $|f|=\varphi\circ f$ قابلة لتكامل ريمان على الفترة $[a,b]$.
بما أن $-|f|\leq f\leq |f|$، فإن $\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$.— و
بالتالي فإن $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$

2. الدالة $|g|=1$ فهي قابلة لتكامل ريمان على الفترة $[0,1]$. أما الدالة g فليست قابلة لتكامل ريمان على الفترة $[0,1]$ لأن $\inf_I g(x)=-1$ و $\sup_I g(x)=1$ على كل فترة $I\subset[0,1]$.

3. (ا) بما أن $\lim_{x\to+infty} x^2\frac{1}{x+e^x}=0$ فإن التكامل $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x+e^x}dx$ متقارب.
(ب) بما أن $\lim_{x\to1^+}(x-1)^2\frac{1}{x\ln^2 x}=1$ فإن التكامل $\int_1^2\frac{1}{x\ln^2 x}dx$ غير متقارب.

السؤال 2 :

1. $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=1$ إذا كان $x\in[0,1)$.
$f_n(1)=0$ و $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=-1$ إذا كان $x>1$.

2. التقارب غير منتظم للمتتالية $(f_n)_n$ على الفترة $[0,1]$ لأن النهاية غير متصلة على الفترة و الدوال $(f_n)_n$ متصلة.

السؤال 3 :

1. بما أن $\left|\frac{x^n}{n\sqrt{n+1}}\right|\leq\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$ لكل $x\in[-1,1]$، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n\sqrt{n+1}}$ متقاربة بانتظام على $[-1,1]$.

2. بما أن $\left|\frac{\sin(nx)}{\sqrt{n^5+n}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{n^5+n}}$ لكل $x \in \mathbb{R}$، فإن المتسلسلة متقاربة بانتظام على $\mathbb{R}$.

السؤال 4 :

1. موجود في المذكرة

2. بما أن $\{x \in \mathbb{R} : |f(x)| > r\} = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > r\} \cup \{x \in \mathbb{R} : f(x) < -r\}$ فإنه إذا كانت الدالة f قابلة للقياس على $\mathbb{R}$، فإن الدالة $|f|$ قابلة للقياس كذلك.

السؤال 5 :

1. تكون مجموعة $A \subset \mathbb{R}$ قابلة للقياس بالنسبة للقياس الخارجي للبيق m^* إذا كان

$$m^*(X) = m^*(X \cap A) + m^*(X \cap A^c), \quad \forall X \subset \mathbb{R}.$$

2. إذا كانت $m^*(A) = 0$، فإن لكل $X \subset \mathbb{R}$، $m^*(X \cap A^c) \le m^*(X) = m^*(X \cap A) + m^*(X \cap A^c) = m^*(X \cap A^c)$. إذاً A قابلة للقياس.

3. موجود في المذكرة

4. $\mu(\emptyset) = 0$.
إذا كانت $(A_n)_n$ متتالية من المجموعات الجزئية من $\mathbb{R}$.
إذا كانت المجموعات قابلة للعد، فإن المجموعة $A = \cup_{n=1}^{+\infty} A_n$ قابلة للعد. و بالتالي $\mu(A) = 0 = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n)$.
إذا وجدت مجموعة A_m غير قابلة للعد، فإن المجموعة A غير قابلة للعد و بالتالي فإن $\mu(A) = \infty = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n)$.

5. ما أن $\mathbb{Q}$ قابل للغد، فإن $\mathbb{Q} = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \cup_{n=1}^{+\infty}\{x_n\}$. إذاً فهي مجموعة بوريل في $\mathbb{R}$ و بما أن $m(\{x_n\}) = 0$، فإن $m(\mathbb{Q}) = 0$.

السؤال 6 :

1. موجود في المذكرة.

2. $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{nx}{1+n^2x^2} = 0$ لكل $x \in [0,1]$ و $|\dfrac{nx}{1+n^2x^2}| \leq \dfrac{1}{2}$ وهي قابلة للتكامل. إذًا $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \dfrac{nx}{1+n^2x^2} dx = 0$.