481 ريض - التحليل الحقيقي (2)

حل الاختبار الفصلي - الفصل الأول 1444 هـ

د. طارق بن عبدالرحمن مُحَمَّد الفاضل

أجب عن الأسئلة التالية

(1) إذا كانت f دالة تزايدية فعلاً على الفترة $[a,b]$ ، فأثبت أن $f \in \mathcal{R}(a,b)$. [3]

الحل : بما أن f دالة تزايدية فعلاً على $[a,b]$ فإن $f(b)-f(a)>0$.

لأي $\epsilon>0$ ، نختار التجزئ $P=\{x_0=a,x_1,\cdots,x_n=b\}$ للفترة $[a,b]$ ،

بحيث يكون $\|P\|<\dfrac{\epsilon}{f(b)-f(a)}$.

بما أن f تزايدية فعلاً فإن $M_i=f\left(x_{i+1}\right)$ و $m_i=f\left(x_i\right)$ على الفترة الجزئية $[x_i,x_{i+1}]$

لكل $i=0,1,\cdots,n-1$.

$$U(f,P)-L(f,P)=\sum_{i=0}^{n-1}\left[f\left(x_{i+1}\right)-f\left(x_i\right)\right]\left(x_{i+1}-x_i\right)$$

$$\leq \|P\|\ \sum_{i=0}^{n-1}\left[f\left(x_{i+1}\right)-f\left(x_i\right)\right]=\|P\|\ \left[f(b)-f(a)\right]$$

$$<\frac{\epsilon}{f(b)-f(a)}\ \left[f(b)-f(a)\right]=\epsilon$$

وبالتالي $f \in \mathcal{R}(a,b)$.

(2) (i) عرف مجموع ريمان للدالة المحدودة f على الفترة $[a,b]$. [1]

الحل : ليكن $P=\{x_0=a,x_1,\cdots,x_n=b\}$ تجزيئاً للفترة $[a,b]$ ،

و $\alpha=(\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ علامة على التجزئ P ، إذا كان $\alpha_i\in[x_i,x_{i+1}]$

لكل $i=0,1,\cdots,n-1$ ، نسمي المجموع $S\left(f,P,\alpha\right)=\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}f\left(\alpha_i\right)\ \left(x_{i+1}-x_i\right)$

مجموع ريمان بالتجزئ P والعلامة α .

(ii) احسب $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k^2+n^2}$. [2]

الحل :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k^2+n^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{\frac{k^2}{n^2}+1}\ \frac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1}\ \frac{1}{n}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx = \left[\tan^{-1}(x)\right]_0^1 = \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

(3) إذا كانت f, g دالتين متصلتين على الفترة $[a, b]$ وكان $\int_a^b |f(x) - g(x)|\; dx = 0$ ،

فأثبت أن $f(x) = g(x)$ لكل $x \in [a, b]$. [3]

الحل : بما أن f, g دالتين متصلتين على الفترة $[a, b]$ فإن $|f - g|$ متصلة على الفترة $[a, b]$.

وبما أن $|f(x) - g(x)| \geq 0$ لكل $x \in [a, b]$ و $\int_a^b |f(x) - g(x)|\; dx = 0$ فإن

$|f(x) - g(x)| = 0$ لكل $x \in [a, b]$ وبالتالي $f(x) - g(x) =$ لكل $x \in [a, b]$ ،

ومن ثم يكون $f(x) = g(x)$ لكل $x \in [a, b]$.

(4) (i) أذكر نص النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل وبرهنها. [3]

الحل : نص النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل

إذا كانت الدالة F قابلة للإشتقاق على $[a, b]$ و $F' \in \mathcal{R}(a, b)$ فإن

$\int_a^b F'(x)\, dx = F(b) - F(a)$.

البرهان : إذا كان $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ تجزيئاً للفترة $[a, b]$ فإن

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} \left[F\left(x_{i+1}\right) - F\left(x_i\right)\right]$$

بتطبيق نظرية القيمة المتوسطة للتفاضل على الفترة الجزئية $[x_i, x_{i+1}]$ لكل $i = 0, 1, \cdots, n-1$ ،

يوجد $\alpha_i \in (x_i, x_{i+1})$ بحيث $F\left(x_{i+1}\right) - F\left(x_i\right) = F'\left(\alpha_i\right)\ \left(x_{i+1} - x_i\right)$ ، فيكون

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} F'\left(\alpha_i\right)\left(x_{i+1} - x_i\right) = S\left(F', P, \alpha\right)$$

حيث $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1})$ علامة على P .

باختيار متتالية (P_k) من التجزيئات بحيث $\|P_k\| \longrightarrow 0$ ، يصبح لدينا

$F(b) - F(a) = S\left(F', P, \alpha\right)$ لكل $k \in \mathbb{N}$

وبما أن $F' \in \mathcal{R}(a, b)$ فبأخذ النهاية للطرفين عندما $k \longrightarrow \infty$ نحصل على

$F(b) - F(a = \int_a^b F'(x)\, dx$.

(ii) إذا كانت $f_n \longrightarrow f$ على $[a, b]$ ، وكانت f'_n متصلة على $[a, b]$ لكل $n \in \mathbb{N}$ وكانت $g \longrightarrow f'_n$ بانتظام، فأثبت أن $\int_a^x g(t)\, dt = f(x) - f(a)$ لكل $x \in [a, b]$. [3]

الحل : بما أن $f_n'(x)$ متصلة على $[a,b]$ لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن $f_n' \in \mathcal{R}(a,b)$ لكل $n \in \mathbb{N}$.
وبما أن f_n' تتقارب بانتظام من g فإن $g \in \mathcal{R}(a,b)$ ، ولكل $x \in [a,b]$ يكون

$$\int_a^x g(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n'(t)\,dt$$ (لأن f_n' تتقارب بانتظام إلى g)

$$= \lim_{n\to\infty} [f_n(x) - f_n(a)]$$ (باستخدام النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل)

$$= f(x) - f(a)$$ (لأن f_n تتقارب نقطياً إلى f)

(5) أدرس تقارب التكامل المعتل $\int_0^\infty \frac{|\cos 2x|}{\sqrt{x^5+2x}}\,dx$. [3]

الحل :

$$\int_0^\infty \frac{|\cos 2x|}{\sqrt{x^5+2x}}\,dx \le \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x^5+2x}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^5+2x}}\,dx + \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^5+2x}}\,dx$$

على الفترة $[0,1]$: $x^5+2x \ge 2x \ge x \implies \sqrt{x^5+2x} \ge \sqrt{x}$ وبالتالي

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^5+2x}}\,dx \le \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx < \infty$$

على الفترة $[1,\infty)$: $x^5+2x \ge x^5 \implies \sqrt{x^5+2x} \ge \sqrt{x^5} = x^{\frac{5}{2}}$ وبالتالي

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^5+2x}}\,dx \le \int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}\,dx < \infty$$

أي أن التكامل المعتل $\int_0^\infty \frac{|\cos 2x|}{\sqrt{x^5+2x}}\,dx$ متقارب .

(6) (i) ما المقصود بأن متتالية الدوال (f_n) تتقارب بانتظام إلى الدالة f على المجموعة $D \subset \mathbb{R}$. [2]

الحل : نقول أن متتالية الدوال (f_n) تتقارب بانتظام إلى الدالة f على المجموعة $D \subset \mathbb{R}$ ،
إذا كان لكل $\epsilon > 0$ يوجد $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ بحيث
$n \ge N \implies |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ لكل $x \in D$.
أو $\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \longrightarrow 0$ عندما $n \longrightarrow \infty$.

(ii) لتكن $f_n(x) = \frac{x^n}{2+x^n}$:

- بين أن متتالية الدوال (f_n) ليست متقاربة بانتظام على $[0,1]$. [2]

الحل : ندرس التقارب النقطي

لكل $x \in [0,1)$: $x^n \longrightarrow 0$ وبالتالي $f_n(x) \longrightarrow \frac{0}{2+0} = 0$.

. $f_n(1) = \dfrac{1}{2+1} = \dfrac{1}{3}$

أي أن $f_n(x) \longrightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ \dfrac{1}{3} & x = 1 \end{cases}$ نقطياً .

لاحظ أن $f_n(x)$ متصلة على $[0,1]$ لكل $n \in \mathbb{N}$ ، بينما $f(x)$ غير متصلة على $[0,1]$ ، وبالتالي f_n لا تتقارب بانتظام إلى f على $[0,1]$.

- بين أن متتالية الدوال (f_n) متقاربة بانتظام على $[0,a]$، حيث $0 < a < 1$. [2]

  الحل : على الفترة $[0,a]$ حيث $0 < a < 1$: نلاحظ أن $f_n \longrightarrow 0$ نقطياً .

  لكل $x \in [0,a]$ فإن $2 + x^n > 1$ وبالتالي

  $$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - 0| = \frac{x^n}{2+x^n} \leq x^n$$

  $\sup\limits_{x\in[0,a]} |f_n(x) - f(x)| \leq a^n \longrightarrow 0$ عندما $n \longrightarrow \infty$.

  أي أن f_n تتقارب بانتظام إلى الصفر على $[0,a]$.

(7) (i) أذكر نص اختبار فايرشتراس للتقارب المنتظم لمتسلسلات الدوال وبرهنه . [3]

الحل : نص اختبار فايرشتراس للتقارب المنتظم لمتسلسلات الدوال

لتكن (f_n) متتالية من الدوال المعرفة على D و (M_n) متتالية أعداد غير سالبة تحقق

$|f_n(x)| \leq M_n$ لكل $x \in D$ ولكل $n \in \mathbb{N}$ ، إذا كانت المتسلسلة العددية $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ متقاربة

فإن متسلسلتي الدوال $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربتان بانتظام على D .

البرهان : لتكن $\epsilon > 0$

بما أن المتلسلة العددية $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ متقاربة ، فمن معيار كوشي لتقارب المتسلسلات العددية ، يوجد $N \in \mathbb{N}$

بحيث : $\sum\limits_{k=m+1}^{n} M_n < \epsilon \implies n > m \geq N$

$$n > m \geq N \implies \left|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |f_n(x)| < \sum_{k=m+1}^{n} M_n < \epsilon, \forall x \in D$$

ومن معيار كوشي للتقارب المنتظم لمتسلسلات الدوال تكون $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربتين بانتظام على D .

(ii) أثبت أن $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{|x| + \sqrt{n^3+1}}$ متقاربة بانتظام على $\mathbb{R}$. [3]

الحل : ضع $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{|x| + \sqrt{n^3+1}}$ ، لكل $x \in \mathbb{R}$

$$|f_n(x)| = \left|\frac{(-1)^n}{|x| + \sqrt{n^3+1}}\right| = \frac{1}{|x| + \sqrt{n^3+1}}$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{n^3+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^3+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} = M_n$$

بما أن المتسلسلة العددية $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ متقاربة ، فمن اختبار فايرشتراس للتقارب المنتظم لمتسلسلات الدوال فإن $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{|x| + \sqrt{n^3+1}}$ متقاربة بانتظام على $\mathbb{R}$.

481 ريض - التحليل الحقيقي (2)
حل الاختبار النهائي - الفصل الأول 1444 هـ
د. طارق بن عبدالرحمن مُحَمَّد الفاضل

السؤال الأول : (ثمان درجات)

1. أعط مثالاً لمايلي :

- دالة $f \in \mathcal{L}^1(a,b)$ بينما $f \notin \mathcal{R}(a,b)$. [1]

الحل : $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 1 & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}^c \end{cases}$

$$0 = L(f) \neq U(f) = 1 \implies f \notin \mathcal{R}(0,1)$$

$$\int_{[0,1]} f\, dm = m\left([0,1] \cap \mathbb{Q}^c\right) = 1 < \infty \implies f \in \mathcal{L}(0,1)$$

- دالتين $f, g \in \mathcal{R}(a,b)$ بينما $f \circ g \notin \mathcal{R}(a,b)$. [2]

الحل : لتكن $g : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ معرفة كالتالي

$g(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q} \\ \dfrac{1}{q} & x = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}\,,\ (p,q) = 1 \end{cases}$ ، عندئذ $g \in \mathcal{R}(0,1)$

لتكن $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ معرفة كالتالي

$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x \neq 1 \end{cases}$ ، عندئذ $f \in \mathcal{R}(0,1)$

بينما $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$ ، و $f \circ g \notin \mathcal{R}(0,1)$

2. إذا كانت f دالة متصلة على الفترة $[a,b]$ وكان $\int_a^x 3f(t)\, dt = \int_x^b 2f(t)\, dt$

لكل $x \in [a,b]$ فأثبت أن $f(x) = 0$ لكل $x \in [a,b]$. [2]

الحل : بما أن الدالة f متصلة على $[a,b]$ فإن الدالتين $2f$ و $3f$ متصلتين على $[a,b]$

وبالتالي فإن الدالتين $F(x) = \int_a^x 3f(t)\, dt$ و $G(x) = \int_x^b 2f(t)\, dt$ قابلتين للإشتقاق على $[a,b]$.

بإشتقاق الطرفين نحصل على $3f(x) = 0 - 2f(x) \implies 5f(x) = 0 \implies f(x) = 0$

3. ادرس تقارب التكامل المعتل dx $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}$. [3]

الحل : $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}\,dx = \int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}\,dx + \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}\,dx$

على الفترة $[0,1]$: $\sqrt{x}(x+1) = x^{\frac{3}{2}} + \sqrt{x} \geq \sqrt{x}$ وبالتالي $\frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}\,dx \leq \int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx < \infty$$

على الفترة $[1,\infty)$: $\sqrt{x}(x+1) = x^{\frac{3}{2}} + \sqrt{x} \geq x^{\frac{3}{2}}$ وبالتالي $\frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} \leq \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}\,dx \leq \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx < \infty$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}\,dx = \int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}\,dx + \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}\,dx < \infty$$

السؤال الثاني : (ست درجات)

1. ادرس التقارب المنتظم لمتتالية الدوال (f_n) حيث $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$ على $[0,1]$. [3]

الحل : لاحظ أن $f_n(0) = 0$.

على الفترة $(0,1]$: $f_n x = \frac{x}{1+n^2x^2} \longrightarrow 0$

$f_n(x) \longrightarrow 0$ نقطياً .

$$\frac{d}{dx}f_n(x) = \frac{(1)(1+n^2x^2) - x(2n^2x)}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$$

$\frac{d}{dx}f_n(x) = 0$ عندما $1 - n^2x^2 = 0 \implies x = \pm\frac{1}{n}$

لاحظ أن $x = \frac{1}{n} \in [0,1]$ بينما $x = -\frac{1}{n} \notin [0,1]$

$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 0| = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)}{1+n^2\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{2n} \longrightarrow 0$ عندما $n \longrightarrow \infty$.

$$f_n \xrightarrow{u} 0$$

أي أن متتالية الدوال تتقارب بانتظام إلى الصفر .

2. ادرس التقارب المنتظم لمتسلسلة الدوال $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{\sqrt{x^2+n^5+2n}}$ على $\mathbb{R}$. [3]

الحل : ضع $f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{\sqrt{x^2+n^5+2n}}$

لاحظ أن $x^2+n^5+2n \geq n^5$ لكل $x \in \mathbb{R}$

$|f_n(x)| = \left|\frac{\cos(nx)}{\sqrt{x^2+n^5+2n}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+n^5+2n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^5}} = \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}} = M_n$ لكل $x \in \mathbb{R}$

بما أن المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}} = \sum_{n=1}^{\infty} M_n$ متقاربة ، فباستخدام اختبار فايرشتراس فإن متسلسلة الدوال

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{\sqrt{x^2+n^5+2n}}$ متقاربة بانتظام على $\mathbb{R}$.

السؤال الثالث : (14 درجة)

1. • عرف القياس الخارجي لأي مجموعة $E \subset \mathbb{R}$. [1]

الحل : يعرف القياس الخارجي m^* لأي مجموعة $E \subset \mathbb{R}$ بأنه

$$m^*(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} l(I_i) : I_i \in \mathcal{I}, E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i\right\}$$

• إذا كانت $E, F \subset \mathbb{R}$ وكانت $E \subset F$ فأثبت أن $m^*(E) \leq m^*(F)$. [2]

الحل : افرض أن مجموعة الفترات $\{I_i : I_i \in \mathcal{I}, i \in \mathbb{N}\}$ تغطي F فهي إذن تغطي E وتحقق التالي

$m^*(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} l(I_i)$ ، مما يعني أن $m^*(E)$ تشكل حداً سفلياً للمجموعة $\left\{\sum_{i=1}^{\infty} l(I_i) : I_i \in \mathcal{I}, F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i\right\}$

ونظراً لأن $m^*(F)$ هو الحد السفلي الأكبر لهذه المجموعة فإن $m^*(E) \leq m^*(F)$.

• إذا كانت $E \subset \mathbb{R}$ وكان $m^*(E) = 0$

أثبت أن $m^*(E \cup F) = m^*(F)$ لكل $F \subset \mathbb{R}$. [2]

الحل : لاحظ أن $F \subset E \cup F$ ومن خاصية الإطراد للقياس الخارجي يكون $m^*(F) \leq m^*(E \cup F)$

من خاصية ما دون التجميع يكون $m^*(E \cup F) \leq m^*(E) + m^*(F)$

أي أن $m^*(F) \leq m^*(E \cup F) \leq m^*(E) + m^*(F) = 0 + m^*(F) = m^*(F)$

وبالتالي $m^*(E \cup F) = m^*(F)$ لكل $F \subset \mathbb{R}$

.2 • عرف قابلية المجموعة $E \subset \mathbb{R}$ لقياس لبيق . [1]

الحل : نقول أن المجموعة $E \subset \mathbb{R}$ قابلة لقياس لبيق إذا كان

$m^*(A) = m^*\left(A \cap E\right) + m^*\left(A \cap E^c\right)$ لكل $A \subset \mathbb{R}$

• بين أن $\mathbb{Q}^c \cap [0,3]$ هي مجموعة بوريل واحسب قياسها . [2]

الحل : لاحظ أن $[0,3] \in \mathcal{B}$ وأيضاً $\mathbb{Q} \in \mathcal{B}$. وبالتالي $\mathbb{Q}^c \cap [0,3] = [0,3] \setminus \mathbb{Q} \in \mathcal{B}$ لأن $\mathcal{B}$ جبر سيجما وبالتالي فهو مغلق تحت عملية الفرق بين المجموعات .

$m\left(\mathbb{Q}^c \cap [0,3]\right) = m\left([0,3] \setminus \mathbb{Q}\right) = m\left([0,3]\right) - m\left(\mathbb{Q}\right) = (3-0) - 0 = 3$.

• إذا كانت $E \in \mathcal{M}$ فأثبت وجود مجموعة $G \in \mathcal{B}$ و $E \subset G$ و $m(G \setminus E) = 0$ [2]

الحل : باستخدام نظرية التقريب الأولى

لكل $n \in \mathbb{N}$ توجد مجموعة مفتوحة G_n بحيث $E \subset G_n$ و $m\left(G_n \setminus E\right) < \dfrac{1}{n}$.

ضع $G_n \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} = G$ عندئذ $G \in \mathcal{B}$ و $E \subset G$.

لاحظ أن $G \subset G_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$ وبالتالي $G \setminus E \subset G_n \setminus E$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

أي أن $0 \le m\left(G \setminus E\right) \le m\left(G_n \setminus E\right) \le \dfrac{1}{n}$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

وبالتالي $m\left(G \setminus E\right) = 0$.

.3 • عرف قابلية الدالة $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ لقياس لبيق ، حيث $\Omega \in \mathcal{M}$. [1]

الحل : نقول أن الدالة $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ قابلة لقياس لبيق إذا كانت $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$ لكل $B \in \mathcal{B}$.

• أعط مثالاً لدالة غير قابلة لقياس لبيق . [1]

الحل : الدالة χ_E دالة غير قابلة للقياس حيث $E \notin \mathcal{M}$.

• إذا كانت $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ وكانت $f = g\ (a.e.)$ و f قابلة للقياس فأثبت أن g قابلة للقياس . [2]

الحل : ضع $E = \{x \in \Omega : f(x) \neq g(x)\}$

بما أن $f = g\ (a.e.)$ فإن $m(E) = 0$ وبالتالي $E \in \mathcal{M}$ وأيضاً $E^c \in \mathcal{M}$. لكل $\alpha \in \mathbb{R}$

$\{x \in \Omega : g(x) > \alpha\} = \left(\{x \in \Omega : g(x) > \alpha\} \cap E^c\right) \cup \left(\{x \in \Omega : g(x) > \alpha\} \cap E\right)$

على المجموعة E^c تكون $f(x) = g(x)$، وبالتالي

$\{x \in \Omega : g(x) > \alpha\} = \left(\{x \in \Omega : f(x) > \alpha\} \cap E^c\right) \cup \left(\{x \in \Omega : g(x) > \alpha\} \cap E\right)$

لاحظ أن $\{x \in \Omega : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{M}$ لأن f دالة قابلة للقياس ، وبما أن $E^c \in \mathcal{M}$

فتكون $\left(\{x \in \Omega : f(x) > \alpha\} \cap E^c\right) \in \mathcal{M}$

ايضاً $\left(\{x \in \Omega : g(x) > \alpha\} \cap E\right) \subset E$ ، وبما أن $m(E) = 0$ فإن

$(\{x \in \Omega : g(x) > \alpha\} \cap E) \in \mathcal{M}$ وبالتالي $m\left(\{x \in \Omega : g(x) > \alpha\} \cap E\right) = 0$

مما يعني أن $\{x \in \Omega : g(x) > \alpha\} \in \mathcal{M}$ لكل $\alpha \in \mathbb{R}$ ، وبالتالي g قابلة للقياس على Ω .

السؤال الرابع : (12 درجة)

1. إذا كانت $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ وكان $\int_E f\, dm = 0$ لكل $E \subset \Omega$ و $E \in \mathcal{M}$

أثبت أن $f(x) = 0\ (a.e.)$ على Ω . [3]

الحل : ضع $E = \{x \in \Omega : f(x) \geq 0\}$ ، عندئذ $E \in \mathcal{M}$ لأن f دالة قابلة للقياس ، وبالتالي $\Omega \setminus E \in \mathcal{M}$.

بما أن $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ فإن $|f| \in \mathcal{L}^1(\Omega)$.

لاحظ أن $f = |f|$ على المجموعة E ، و $|f| = -f$ على المجموعة $\Omega \setminus E$.

$$\int_\Omega |f|\, dm = \int_E |f|\, dm + \int_{\Omega\setminus E} |f|\, dm = \int_E f\, dm + \int_{\Omega\setminus E} (-f)\, dm$$

$$= \int_E f\, dm - \int_{\Omega\setminus E} f\, dm = 0 - 0 = 0$$

وبما أن $|f| \geq 0$ على Ω فإن $|f| = 0$ (a.e.) وبالتالي فإن $f = 0$ (a.e.) .

2. • أذكر نص نظرية التقارب المطرد . [2]

الحل : إذا كانت $f_n \in \mathcal{L}^0_+(\Omega)$ لكل $n \in \mathbb{N}$ وكانت $f_n \nearrow f$ ، فإن $f \in \mathcal{L}^0_+(\Omega)$ وعندئذ

$$\int_\Omega f\, dm = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n\, dm = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\, dm$$

• إذا كانت $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\, \chi_{[k,k+1)}(x)$ فأثبت أن متتالية الدوال $(f_n(x))$ تزايدية .

استخدم نظرية التقارب المطرد لحساب $\int_{[0,\infty)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\, \chi_{[k,k+1)}\, dm(x)$ [2]

الحل : لاحظ أن $f_n \in \mathcal{S}_+(\Omega) \subset \mathcal{L}^0_+(\Omega)$.

أيضاً $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{1}{2^{n+1}}\, \chi_{[n+1,n+2)}(x) \ \geq 0$ ، مما يعني أن متتالية الدوال متزايدة .

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\, \chi_{[k,k+1)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\, \chi_{[k,k+1)}(x)$$

باستخدام نظرية التقارب المطرد نحصل على

$$\int_{[0,\infty)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\, \chi_{[k,k+1)}\, dm(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\, \chi_{[k,k+1)}(x)\, dm(x)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\, m\left([k, k+1)\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$$

3. • أذكر نص نظرية التقارب المحدود وبرهنها . [3]

الحل : إذا كانت $m(\Omega) < \infty$ وكانت (f_n) متتالية محدودة في $\mathcal{L}^0(\Omega)$ ، وكانت $f_n \longrightarrow f$ (a.e.) فإن

$$f \in \mathcal{L}^1(\Omega) \text{ و } \int_\Omega f\, dm = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n\, dm = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\, dm$$

البرهان : افرض أن $|f_n(x)| \le K$ لكل $n \in \mathbb{N}$ ولكل $x \in \Omega$.

بوضع $g(x) = K$ ، نلاحظ أن $\int_\Omega g\, dm = K\, m(\Omega) < \infty$ وبالتالي تكون $g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$

أي أن متتالية الدوال (f_n) تحقق شروط نظرية التقارب المسقوف ، ومن ذلك نحصل على

$$\int_\Omega f\, dm = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n\, dm = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\, dm$$

• استخدم نظرية التقارب المحدود لحساب $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\pi]} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x^2}{n}\right)\, dm(x)$ [2]

الحل : ضع $f_n(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x^2}{n}\right)$ و ضع $\Omega = [0, \pi]$

عندئذ $m(\Omega) = \pi < \infty$ و $f_n \in \mathcal{L}^0(\Omega)$ لأن f_n متصلة على Ω لكل $n \in \mathbb{N}$.

ايضاً $\left|\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x^2}{n}\right)\right| \le 1$ لكل $n \in \mathbb{N}$ ولكل $x \in \Omega$.

وكذلك $f_n \longrightarrow 0$ ، بتطبيق نظرية التقارب المحدود نحصل على

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\pi]} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x^2}{n}\right)\, dm(x) = \int_{[0,\pi]} \lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x^2}{n}\right)\, dm(x) = \int_{[0,\pi]} 0\, dm(x) = 0$$

481 ريض - التحليل الحقيقي (2)
حل الاختبار الفصلي - الفصل الثاني 1444 هـ
د. طارق بن عبدالرحمن مُحَمَّد الفاضل

السؤال الأول : (9 درجات)

1. أعط مثالاً لدالة $f \notin \mathcal{R}(a,b)$ بينما $|f| \in \mathcal{R}(a,b)$. [1]

الحل : الدالة $f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ -1 & , \quad x \in \mathbb{Q}^c \cap [0,1] \end{cases}$ غير قابلة لتكامل ريمان على الفترة $[0,1]$.

بينما $|f| = 1 \in \mathcal{R}(0,1)$ لأنها دالة متصلة .

2. إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a,b]$ ، فأثبت أن $f \in \mathcal{R}(a,b)$. [3]

الحل : لتكن $\epsilon > 0$ ، المطلوب إيجاد $P \in \mathcal{P}(a,b)$ بحيث يحقق $U(f,P) - L(f,P) < \epsilon$.

بما أن الدالة f متصلة على الفترة المتراصة $[a,b]$ فإن الدالة f متصلة بانتظام على الفترة $[a,b]$ ،

وبالتالي يوجد $\delta > 0$ (لا تعتمد على x) بحيث يتحقق

$$x, y \in [a,b] \, , \ |x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a}$$

ليكن $P = \{x_0 = a, x_1, \cdots, x_n = b\}$ أي تجزئ للفترة $[a,b]$ بحيث $\|P\| < \delta$ ،

الدالة f متصلة على أي فترة جزئية $[x_i, x_{i+1}]$ لكل $0 \le i \le n-1$ ، وبالتالي فهي تحقق قيمتيها العظمى والصغرى على أي فترة جزئية ، أي يوجد $u_i, v_i \in [x_i, x_{i+1}]$ بحيث يكون $m_i = f(u_i)$ و $M_i = f(v_i)$

بما أن $|u_i - v_i| < |x_i - x_{i+1}| \le \|P\| < \delta$

فإن $M_i - m_i = f(v_i) - f(u_i) = |f(v_i) - f(u_i)| < \dfrac{\epsilon}{b-a}$

الآن $U(f,P) - L(f,p) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i)$

$$\le \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\epsilon}{b-a} (x_{i+1} - x_i) = \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = \frac{\epsilon}{b-a} (b-a) = \epsilon$$

أي أن $U(f,P) - L(f,P) < \epsilon$ وبالتالي $f \in \mathcal{R}(a,b)$.

3. احسب النهاية $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{k^2 + n^2}$. [2]

الحل : $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{k^2+n^2} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{\frac{k^2}{n^2}+1}\frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2\left(\frac{k}{n}\right)}{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1}\frac{1}{n}$

$$= \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} = \left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^1 = \ln(2)-\ln(1) = \ln(2)-0 = \ln 2$$

4. اذكر نص نظرية القيمة المتوسطة للتكامل وبرهنها . [3]

الحل : نص النظرية

إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a,b]$ فإنه يوجد $c\in(a,b)$ بحيث

$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$.

البرهان :

أولاً - إذا كانت الدالة f ثابتة ، فإن النظرية متحققة لأي نقطة $c\in(a,b)$.

ثانياً - إذا كانت الدالة f ليست ثابتة ، فبما أنها متصلة على الفترة المتراصة $[a,b]$ فإنها تحقق قيمتيها العظمى والصغرى على $[a,b]$ ، أي يوجد $u,v\in[a,b]$ بحيث $f(u)=m\le f(x)\le f(v)=M$ لكل $x\in[a,b]$.

بما أن الدالة f ليست ثابتة ، فإنه يوجد $s\in[a,b]$ بحيث $f(s)>m$ ، ويوجد $t\in[a,b]$ بحيث $f(t)<M$ ، وبالتالي $\int_a^b m\,dx < \int_a^b f(x)\,dx, \int_a^b M\,dx$

$$m(b-a) < \int_a^b f(x)\,dx < M(b-a) \implies m=f(u) < \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} < M=f(v)$$

بما أن الدالة f متصلة على الفترة $[a,b]$ فمن نظرية القيمة البينية يوجد c يقع بين u و v وبالتالي $c\in(a,b)$ بحيث

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \implies \int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$.

السؤال الثاني : (6 درجات)

1. اذكر نص النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل. [2]

الحل : إذا كانت الدالة F قابلة للإشتقاق على الفترة $[a,b]$ وكانت $F' \in \mathcal{R}(a,b)$ فإن

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a) .$$

2. إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a,b]$ وكان $\int_x^b f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt$ لكل $x \in [a,b]$ ، أثبت أن $f(x) = 0$ لكل $x \in [a,b]$. [2]

الحل : بما أن الدالة f متصلة على الفترة $[a,b]$ فإن $\int_a^x f(t)\,dt$ و $\int_x^b f(t)\,dt$ قابلتان للإشتقاق على $[a,b]$.

بإشتقاق $\int_x^b f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt$ بالنسبة للمتغير x نجد أن

$f(x) = 0 - f(x) \implies 2f(x) = 0 \implies f(x) = 0$ لكل $x \in [a,b]$.

3. ادرس تقارب التكامل المعتل $\int_0^\infty e^{-x^3}dx$. [2]

الحل : $\int_0^\infty e^{-x^3}dx = \int_0^1 e^{-x^3}dx + \int_1^\infty e^{-x^3}dx$

على الفترة $[0,1]$: الدالة e^{-x^3} تناقصية وبالتالي $\int_0^1 e^{-x^3}dx < \int_0^1 e^0 dx = 1 < \infty$.

على الفترة $[1,\infty)$: $e^{x^3} \geq 1 + x^3 > x^3$ وبالتالي $\int_1^\infty e^{-x^3}dx < \int_1^\infty \frac{1}{x^3}dx < \infty$

أي أن التكامل المعتل $\int_0^\infty e^{-x^3}dx$ متقارب .

السؤال الثالث : (8 درجات)

1. عرف التقارب المنتظم لمتتالية الدوال (f_n) إلى الدالة f على $D \subset \mathbb{R}$. [1]

الحل : نقول أن متتالية الدوال (f_n) تتقارب بانتظام إلى الدالة f ، إذا كان لكل $\epsilon > 0$ يوجد $N \in \mathbb{N}$ (لا يعتمد على x) بحيث : $n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ ، لكل $x \in D$.

أو بصيغة أخرى : $\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \longrightarrow 0$ عندما $n \longrightarrow \infty$.

2. إذا كانت $f_n \in \mathcal{R}(a,b)$ لكل $n \in \mathbb{N}$ وكانت متتالية الدوال (f_n) تتقارب بانتظام إلى الدالة f على الفترة المحدودة والمغلقة $[a,b]$ وكانت $f \in \mathcal{R}(a,b)$ ،

أثبت أن $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$. [2]

الحل : المطلوب إثبات أن لكل $\epsilon > 0$ يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث :

$$n \geq N \implies \left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \epsilon$$

لتكن $\epsilon > 0$ ، بما أن متتالية الدوال (f_n) تتقارب بانتظام إلى الدالة f على الفترة المحدودة والمغلقة $[a,b]$

فإنه يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث : $n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\epsilon}{b-a}$ ، لكل $x \in [a,b]$.

$$n \geq N \implies \left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b [f_n(x) - f(x)]\,dx \right|$$

$$\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx < \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a}\,dx = \frac{\epsilon}{b-a}(b-a) = \epsilon$$

وبالتالي $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

3. ادرس التقارب المنتظم لمتتالية الدوال (f_n) فيما يلي :

(i) $f_n(x) = \dfrac{1-x^n}{1+x^n}$ على $[0,1]$. [2]

الحل : دراسة التقارب النقطي :

على الفترة $[0,1)$: $f_n(x) = \dfrac{1-x^n}{1+x^n} \longrightarrow \dfrac{1-0}{1+0} = 1$.

عندما $x = 1$: $f_n(1) = \dfrac{1-1}{1+1} = 0 \longrightarrow 0$.

أي أن :
$$f_n(x) \longrightarrow f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in [0,1) \\ 0 & , \quad x = 1 \end{cases}$$

لاحظ أن $f_n(x)$ متصلة لكل $x \in [0,1]$ ولكل $n \in \mathbb{N}$ ، بينما $f(x)$ غير متصلة عند $x = 1$.
وبالتالي التقارب ليس منتظماً .

(ii) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx^2}$ على $[0,\infty)$. [3]

الحل : دراسة التقارب النقطي :

عندما $x = 0$: $f_n(0) = \dfrac{1}{1+0} = 1 \longrightarrow 1$.

على الفترة $(0,\infty)$: $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx^2} \longrightarrow 0$.

أي أن : $$f_n(x) \longrightarrow f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x = 0 \\ 0 & , \quad x \in (0,\infty) \end{cases}$$

لاحظ أن $f_n(x)$ متصلة لكل $x \in [0,\infty)$ ولكل $n \in \mathbb{N}$ ، بينما $f(x)$ غير متصلة عند $x = 0$.

وبالتالي التقارب ليس منتظماً .

حل آخر : $$\sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x) - f(x)| \geq \sup_{x\in(0,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in(0,\infty)} \frac{1}{1+nx^2}$$

$$\geq f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{1+n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2} = \frac{1}{1+n\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{2} \quad (\neq 0)$$

وبالتالي التقارب ليس منتظماً .

السؤال الرابع : (7 درجات)

1. ادرس التقارب المنتظم لمتسلسلة الدوال $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+n^3+n}}$ على $\mathbb{R}$. [2]

الحل : لكل $x \in \mathbb{R}$ فإن

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x^2+n^3+n}}\right| < \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} = M_n$$

بما أن المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}} = \sum_{n=1}^{\infty} M_n$ متقاربة (لأن $p = \dfrac{3}{2} > 1$) فمن اختبار فايرشتراس للتقارب المنتظم لمتسلسلات الدوال ، نجد أن متسلسلة الدوال $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+n^3+n}}$ تتقارب بانتظام على $\mathbb{R}$.

2. ادرس التقارب المنتظم لمتسلسلة الدوال $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{|x|+n}$ على $\mathbb{R}$. [3]

الحل :

(1) لتكن $u_n(x) = (-1)^n$ ، عندئذ

$U_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^n \leq 1$ ، لكل $x \in \mathbb{R}$ ولكل $n \in \mathbb{N}$.

أي أن متتالية المجاميع الجزئية $(U_n(x))$ محدودة .

(2) لتكن $v_n(x) = \dfrac{1}{|x|+n}$ ، لكل $x \in \mathbb{R}$ ولكل $n \in \mathbb{N}$ فإن :

$v_n(x) = \dfrac{1}{|x|+n} < \dfrac{1}{|x|+(n+1)} = v_{n+1}(x)$ ، أي أن متتالية الدوال $(v_n(x))$ تناقصية .

لكل $x \in \mathbb{R}$: $\dfrac{1}{n} \geq \dfrac{1}{|x|+n} = |v_n(x)| \leq 0$

أي أن متتالية الدوال $(v_n(x))$ تتقارب بانتظام إلى الصفر .

من اختبار ديرشلية للتقارب المنتظم لمتسلسلات الدوال فإن $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{|x|+n}$ تتقارب بانتظام على $\mathbb{R}$.

3. أذكر نص اختبار آبل للتقارب المنتظم لمتسلسلات الدوال . [2]

الحل : نص اختبار آبل للتقارب المنتظم لمتسلسلات الدوال

لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين من الدوال الحقيقية المعرفة على $D \subset \mathbb{R}$ وتحققان :

(i) $\sum u_n$ متقاربة بانتظام على D .

(ii) المتتالية (v_n) محدودة بانتظام ومتناقصة على D .

عندئذ المتسلسلة $\sum u_n \, v_n$ متقاربة بانتظام على D .

481 ريض - التحليل الحقيقي (2)
حل الاختبار النهائي - الفصل الثاني 1444 هـ
د. طارق بن عبدالرحمن مُحَّد الفاضل

السؤال الأول (6 درجات) :

1. أعط مثالاً لمايلي :

(i) دالتين مختلفتين $f, g \notin \mathcal{R}(a,b)$ بينما $fg \in \mathcal{R}(a,b)$. [1]

2. الحل : لتكن $f, g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ بحيث :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ -1 & x \in \mathbb{Q}^c \cap [0,1] \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 1 & x \in \mathbb{Q}^c \cap [0,1] \end{cases}$$

عندئذ $f, g \notin \mathcal{R}(0,1)$.

بينما $(fg)(x) = 1$ لكل $x \in [0,1]$ وهي دالة متصلة وبالتالي $fg \in \mathcal{R}(0,1)$.

(ii) دالة $f \notin \mathcal{L}^1(\Omega)$ حيث $\Omega \in \mathcal{M}$. [1]

الحل : لتكن $f(x) = \dfrac{1}{x}$ و $\Omega = [1, \infty)$ ، عندئذ $\Omega \in \mathcal{M}$ و $f \in \mathcal{L}_+^0(\Omega)$.

ولتكن $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}\, \chi_{[k,k+1)}(x)$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

لاحظ أن $f \geq f_n$ على Ω لكل $n \in \mathbb{N}$ وبالتالي $\displaystyle\int_\Omega f\, dm \geq \int_\Omega f_n\, dm$

أي أن $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}\, m\left([k, k+1)\right) \leq \int_\Omega f\, dm$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

$\displaystyle\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leq \int_\Omega f\, dm$ وبالتالي $f \notin \mathcal{L}^1(\Omega)$.

3. إذا كانت f, g دالتان متصلتان على الفترة $[a,b]$ وكان $\displaystyle\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx = 0$

فأثبت أن $f(x) = g(x)$ لكل $x \in [a,b]$. [2]

الحل : لتكن $h(x) = |f(x) - g(x)|$ لكل $x \in [a, b]$

بما أن f, g دالتان متصلتان على $[a, b]$ فإن h دالة متصلة على $[a, b]$.

لكل $x \in [a, b]$: $h(x) = |f(x) - g(x)| \geq 0$.

أيضاً $\int_a^b h(x)\, dx = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx = 0$

أي أن لكل $x \in [a, b]$ فإن $h(x) = 0 \implies |f(x) - g(x)| = 0$

$$\implies f(x) - g(x) = 0 \implies f(x) = g(x)$$

4. ادرس تقارب التكامل المعتل $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}\, dx$. [2]

الحل : $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^4}\, dx + \int_1^\infty \frac{1}{1+x^4}\, dx$

على الفترة $[0, 1]$ الدالة $\frac{1}{1+x^4}$ متصلة ، وبالتالي $\int_0^1 \frac{1}{1+x^4}\, dx < \infty$.

على الفترة $[1, \infty)$: $1 + x^4 > x^4 \implies \frac{1}{1+x^4} < \frac{1}{x^4}$ ، وبالتالي

$\int_1^\infty \frac{1}{1+x^4}\, dx < \int_1^\infty \frac{1}{x^4}\, dx < \infty$ لأن ($p = 4 > 1$) .

أي أن التكامل المعتل متقارب .

السؤال الثاني (6 درجات) :

1. ادرس التقارب المنتظم لمتتالية الدوال (f_n) حيث $f_n(x) = \frac{x^n}{2+x^n}$ على $[0, a]$ حيث $0 < a < 1$. [3]

الحل : لكل $x \in [0, a]$ فإن $0 \leq x \leq a < 1$ ،

أي أن $f_n(x) = \frac{x^n}{2+x^n} \longrightarrow \frac{0}{2+0} = 0$ ، أي أن متتالية الدوال تتقارب إلى الصفر نقطياً .

$$\sup_{x\in[0,a]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,a]} \left|\frac{x^n}{2+x^n}\right| = \sup_{x\in[0,a]} \frac{x^n}{2+x^n}$$

$$\frac{d}{dx} f_n(x) = \frac{nx^{n-1}(2+x^n) - x^n\ (nx^{n-1})}{(2+x^n)^2} = \frac{2nx^{n-1}}{(2+x^n)^2} \geq 0$$

أي أن الدالة f_n تزايدية على الفترة $[0, a]$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

$\sup\limits_{x\in[0,a]} |f_n(x) - f(x)| = f_n(a) = \dfrac{a^n}{2+a^n} \longrightarrow 0$ عندما $n \to \infty$.

أي أن متتالية الدوال (f_n) تتقارب بانتظام إلى الصفر .

الحل الآخر : لكل $x \in [0,a]$ حيث $0 < a < 1$ فإن $2 + x^n \geq 2 > 1$ وبالتالي

$$0 \leq f_n(x) = \frac{x^n}{2+x^n} \leq x^n \leq a^n$$

وبما أن $0 < a < 1$ فإن $a^n \longrightarrow 0$ عندما $n \longrightarrow \infty$

أي أن متتالية الدوال (f_n) تتقارب بانتظام إلى الصفر .

2. ادرس التقارب المنتظم لمتسلسلة الدوال $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{|x|+\sqrt{n}}$ على $\mathbb{R}$. [3]

الحل :

(1) لتكن $u_n(x) = (-1)^n$ ، عندئذ

$U_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^n \leq 1$ ، لكل $x \in \mathbb{R}$ ولكل $n \in \mathbb{N}$.

أي أن متتالية المجاميع الجزئية $(U_n(x))$ محدودة .

(2) لتكن $v_n(x) = \dfrac{1}{|x|+\sqrt{n}}$ ، لكل $x \in \mathbb{R}$ ولكل $n \in \mathbb{N}$ فإن :

$v_{n+1}(x) = \dfrac{1}{|x|+\sqrt{n+1}} < \dfrac{1}{|x|+\sqrt{n}} = v_n(x)$ ، أي أن متتالية الدوال $(v_n(x))$ تناقصية .

لكل $x \in \mathbb{R}$: $0 \leq |v_n(x)| = \dfrac{1}{|x|+\sqrt{n}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

أي أن متتالية الدوال $(v_n(x))$ تتقارب بانتظام إلى الصفر .

من اختبار ديرشلية للتقارب المنتظم لمتسلسلات الدوال فإن $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{|x|+\sqrt{n}}$ تتقارب بانتظام على $\mathbb{R}$.

السؤال الثالث (13 درجة) :

1. عرف القياس الخارجي لأي مجموعة $E \subset \mathbb{R}$. [1]

الحل : يعرف القياس الخارجي m^* لأي مجموعة $E \subset \mathbb{R}$ بأنه

$$m^*(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} l\left(I_i\right) : I_i \in \mathcal{I}, E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i\right\}$$

2. لكل $E \subset \mathbb{R}$ ولكل $\epsilon > 0$ أثبت وجود مجموعة مفتوحة G تحتوي E بحيث يكون $m^*(G) \leq m^*(E) + \epsilon$.[2]

الحل :

إذا كان $m^*(E) = \infty$ ، خذ $G = \mathbb{R}$ ، عندئذ G مجموعة مفتوحة و $E \subset G$

و $m^*(G) = \infty \leq m^*(E) + \epsilon = \infty$ لأي $\epsilon > 0$.

لنفرض أن $m^*(E) < \infty$ ، ولتكن $\epsilon > 0$ ، من تعريف $m^*(E)$ فإنه يوجد غطاء $\{I_i : i \in \mathbb{N}\}$ في $\mathcal{I}$ بحيث يكون

$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ و $\sum_{i=1}^{\infty} l\left(I_i\right) \leq m^*(E) + \frac{\epsilon}{2}$.

لتكن $I_i = [a_i, b_i)$ حيث $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ ، $i \in \mathbb{N}$

ضع $J_i = \left(a_i - \frac{\epsilon}{2^{i+1}}, b_i\right)$ ، عندئذ J_i فترة مفتوحة لكل $i \in \mathbb{N}$ و $I_i \subset J_i$.

ضع $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i$ عندئذ G مجموعة مفتوحة ، و $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i = G$

$$m^*(G) = m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} J_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*\left(J_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} l\left(J_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\left[\left(b_i - a_i\right) + \frac{\epsilon}{2^{i+1}}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\left(b_i - a_i\right) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{i+1}} = \sum_{i=1}^{\infty} l\left(I_i\right) + \frac{\epsilon}{2} \leq m^*(E) + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = m^*(E) + \epsilon$$

3. عرف قابلية المجموعة $E \subset \mathbb{R}$ لقياس لبيق . [1]

الحل : نقول أن المجموعة $E \subset \mathbb{R}$ قابلة لقياس لبيق إذا كان

$m^*(A) = m^*\left(A \cap E\right) + m^*\left(A \cap E^c\right)$ لكل $A \subset \mathbb{R}$

4. إذا كانت $F \subset [0,1]$ هي مجموعة كانتور ، فأثبت أن $[0,1] \cap F^c \in \mathcal{B}$ ، واحسب قياسها . [2]

الحل : F مجموعة مغلقة وبالتالي $F \in \mathcal{B}$ ، وأيضاً $[0,1]$ فترة مغلقة وبالتالي $[0,1] \in \mathcal{B}$.

$[0,1] \cap F^c = [0,1] \setminus F \in \mathcal{B}$ لأن $\mathcal{B}$ جبر - سيجما .

بما أن $m(F) = 0 < \infty$ فإن :

$$m\left([0,1] \cap F^c\right) = m\left([0,1] \setminus F\right) = m\left([0,1]\right) - m(F) = (1-0) - 0 = 1$$

5. إذا كانت $E \in \mathcal{M}$ فأثبت وجود مجموعة $F \in \mathcal{B}$ و $F \subset E$ وتحقق $m(E \setminus F) = 0$. [2]

الحل : باستخدام نظرية التقريب الأولى

لكل $n \in \mathbb{N}$ توجد مجموعة مغلقة F_n بحيث $F_n \subset E$ و $m(E \setminus F_n) < \dfrac{1}{n}$.

ضع $F = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ عندئذ $F \in \mathcal{B}$ و $F \subset E$.

لاحظ أن $F_n \subset F$ لكل $n \in \mathbb{N}$ وبالتالي $E \setminus F \subset E \setminus F_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

أي أن $0 \leq m(E \setminus F) \leq m(E \setminus F_n) \leq \dfrac{1}{n}$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

وبالتالي $m(E \setminus F) = 0$.

6. عرف قابلية الدالة $f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ لقياس لبيق ، حيث $\Omega \in \mathcal{M}$. [1]

الحل : نقول أن الدالة $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ قابلة لقياس لبيق إذا كانت $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$ لكل $B \in \mathcal{B}$ ،
و $f^{-1}(\{\infty\}) \in \mathcal{M}$ و $f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{M}$.

7. أعط مثالاً لدالة f غير قابلة لقياس لبيق ، بينما f^2 قابلة لقياس لبيق . [1]

8. الحل : لتكن $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ بحيث :

$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in V \\ -1 & x \notin V \end{cases}$ ، حيث $V \notin \mathcal{M}$ هي مجموعة فيتالي .

$\{1\} \in \mathcal{B}$ بينما $f^{-1}(\{1\}) = V \notin \mathcal{M}$ وبالتالي f غير قابلة لقياس لبيق .

$f^2 = 1$ دالة متصلة على $\mathbb{R}$ وبالتالي قابلة لقياس لبيق .

9. إذا كانت $f(x) = \begin{cases} x^3 & , \quad x \in \mathbb{Q} \cap [0,4] \\ 5 & \quad x \in \mathbb{Q}^c \cap [0,4] \end{cases}$

أثبت أن $f \in \mathcal{L}^0(0,4)$ ، واحسب $\displaystyle\int_{[0,4]} f \, dm$. [3]

الحل : بما أن $m(\mathbb{Q} \cap [0,4]) = 0$ فإن $f = 5 \ (a.e.)$ على $[0,4]$.

وبما أن الدالة 5 دالة ثابتة فهي متصلة على $[0,4]$ وبالتالي $5 \in \mathcal{L}^0(0,4)$ ومن ذلك نستنتج أن $f \in \mathcal{L}^0(0,4)$.

بما أن $f = 5\ (a.e.)$ على $[0,4]$ فإن :

$$\int_{[0,4]} f\, dm = \int_{[0,4]} 5\, dm = 5\, m\left([0,4]\right) = 5(4-0) = 20$$

السؤال الرابع (15 درجة) :

1. إذا كانت $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ وكانت $f = g\ (a.e.)$ على Ω
أثبت أن $g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ وأن $\int_\Omega f\, dm = \int_\Omega g\, dm$. [3]

الحل : بما أن $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ فإن $f \in \mathcal{L}^0(\Omega)$.

وبما أن $f = g\ (a.e.)$ على Ω فإن $g \in \mathcal{L}^0(\Omega)$.

وبما أن $f = g\ (a.e.)$ على Ω فإن $E = \{x \in \Omega : f(x) \neq g(x)\} \in \mathcal{M}$ و $m(E) = 0$ وأيضاً $\Omega \setminus E \in \mathcal{M}$.

وبما أن $m(E) = 0$ و $E \subset \Omega$ و $g \in \mathcal{L}^0(\Omega)$ فإن $\int_E g\, dm = 0 < \infty$ ، أي أن $g \in \mathcal{L}^1(E)$.

بما أن $\Omega \setminus E \subset \Omega$ و $\Omega \setminus E \in \mathcal{M}$ و $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ فإن $f \in \mathcal{L}^1(\Omega \setminus E)$.

بما أن $f = g$ على $\Omega \setminus E$ فإن $\int_{\Omega\setminus E} f\, dm < \infty$ $\int_{\Omega\setminus E} g\, dm =$ ، أي أن $g \in \mathcal{L}^1(\Omega \setminus E)$.

بما أن $g \in \mathcal{L}^1(E)$ و $g \in \mathcal{L}^1(\Omega \setminus E)$ و $\Omega = (\Omega \setminus E) \cup E$ (اتحاد منفصل) ، فإن $g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$.

$$\int_\Omega g\, dm = \int_E g\, dm + \int_{\Omega\setminus E} g\, dm = 0 + \int_{\Omega\setminus E} g\, dm$$

$$= \int_E f\, dm + \int_{\Omega\setminus E} f\, dm = \int_\Omega f\, dm$$

2. أذكر نص تمهيدية فاتو وبرهنها . [3]

الحل : نص تمهيدية فاتو :

إذا كانت (f_n) متتالية دوال في $\mathcal{L}^0_+(\Omega)$ فإن $\liminf f_n \in \mathcal{L}^0_+(\Omega)$ ، كما أن

$$\int_\Omega \liminf f_n\, dm \leq \liminf \int_\Omega f_n\, dm$$

البرهان : بما أن $f_n \geq 0$ على Ω لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن $\liminf f_n \geq 0$ على Ω .

بما أن $f_n \in \mathcal{L}^0(\Omega)$ لكل $n \in \mathbb{N}$ ، فإن $\liminf f_n \in \mathcal{L}^0(\Omega)$ ، وبالتالي $\liminf f_n \in \mathcal{L}^0_+(\Omega)$.

ضع $g_n = \inf\{f_k : k \geq n\}$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

ولتكن $g = \liminf f_n = \lim g_n$.

عندئذ $g_n \in \mathcal{L}^0_+(\Omega)$ و $g_n \nearrow g$ ، فمن نظرية التقارب المطرد نحصل على :

$$\int_\Omega \liminf f_n \, dm = \int_\Omega g \, dm = \lim \int_\Omega g_n \, dm$$

ولكن من تعريف g_n فإن $g_n \le f_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$ وبالتالي $\int_\Omega f_n \, dm \le \int_\Omega g_n \, dm$ لكل $n \in \mathbb{N}$

أي أن ، $\int_\Omega f_n \, dm \le \liminf \int_\Omega g_n \, dm = \lim \int_\Omega \liminf f_n \, dm$.

3. أذكر نص نظرية التقارب المحدود ، [2]
واستخدمها لحساب $dm(x)$ $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,2]} \frac{n^2}{n^2+x^3} \, dm(x)$ [2]

الحل : نص نظرية التقارب المحدود :

افرض أن $m(\Omega) < \infty$ وأن (f_n) متتالية محدودة في $\mathcal{L}^0(\Omega)$. إذا كانت $f_n \longrightarrow f \; (a.e.)$ فإن $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$

ولدينا $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, dm = \int_\Omega f \, dm$.

حساب $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,2]} \frac{n^2}{n^2+x^3} \, dm(x)$:

لتكن $f_n(x) = \frac{n^2}{n^2+x^3}$ ، ولتكن $\Omega = [0,2]$

(1) $m(\Omega) = m([0,2]) = 2 - 0 = 2 < \infty$.

(2) الدالة f_n متصلة على الفترة $[0,2]$ وبالتالي $f_n \in \mathcal{L}^0(0,2)$ ، لكل $n \in \mathbb{N}$.

(3) $f_n \longrightarrow 1$ على $[0,2]$.

(4) لكل $x \in [0,2]$ ولكل $n \in \mathbb{N}$: $n^2 + x^3 \ge n^2 > 0$ ، وبالتالي $0 < \frac{n^2}{n^2+x^3} \le 1$.

أي أن $|f_n(x)| = \frac{n^2}{n^2+x^3} \le 1$ ، لكل $x \in [0,2]$ ولكل $n \in \mathbb{N}$.

من نظرية التقارب المحدود نحصل على :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,2]} \frac{n^2}{n^2+x^3} \, dm(x) = \int_{[0,2]} 1 \, dm = m([0,2]) = 2 - 0 = 2$$

4. أذكر نص نظرية التقارب المسقوف ، [2]
واستخدمها لحساب $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \cos\left(\frac{x^2}{n}\right) dm(x)$ [3]

الحل : نص نظرية التقارب المسقوف :

افرض أن (f_n) متتالية في $\mathcal{L}^0\,(\Omega)$ وأن $f_n \longrightarrow f\ (a.e.)$. إذا كانت هناك دالة $g \in \mathcal{L}^1\,(\Omega)$ بحيث $|f_n(x)| \le g(x)\ (a.e.)$ لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن $f \in \mathcal{L}^1\,(\Omega)$ ، كما أن $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n\,dm = \int_\Omega f\,dm$.

حساب $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{[0,\infty)}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\cos\left(\frac{x^2}{n}\right)dm(x)$:

لتكن $f_n(x) = \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n\cos\left(\dfrac{x^2}{n}\right)$.

(1) الدالة f_n متصلة على الفترة $[0,\infty)$ وبالتالي $f_n \in \mathcal{L}^0(0,\infty)$ ، لكل $n \in \mathbb{N}$.

(2) $f_n \longrightarrow\ e^{-x}\cos(0) = e^{-x}$ على $[0,\infty)$.

(3) لكل $x \in [0,\infty)$ ولكل $n \in \mathbb{N}$: $e^{-\frac{x}{n}} \ge 1-\dfrac{x}{n}$ ، وبالتالي $e^{-x} = \left(e^{-\frac{x}{n}}\right)^n \ge \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n$.

أي أن $|f_n(x)| = \left|\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n\cos\left(\dfrac{x^2}{n}\right)\right| \le \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n \le e^{-x} = g(x)$ ، لكل $x \in [0,\infty)$ ولكل $n \in \mathbb{N}$.

(4) بما أن $g(x) \ge 0$ لكل $x \in [0,\infty)$ فإن $\displaystyle\int_{[0,\infty)} g\,dm = \int_0^\infty g(x)\,dx = \int_0^\infty e^{-x}\,dx$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(-\int_0^t e^{-x}(-1)\,dx\right) = \lim_{t\to\infty}\left(-\left[e^{-x}\right]_0^t\right) = \lim_{t\to\infty}\left(-\left[e^{-t}-e^0\right]\right) = 1 < \infty$$

أي أن $g \in \mathcal{L}^1(0,\infty)$.

من نظرية التقارب المسقوف نحصل على :

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,\infty)}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\cos\left(\frac{x^2}{n}\right)dm(x) = \int_{[0,\infty)} e^{-x}\,dm = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$$