481 ريض - التحليل الحقيقي (2)
حل الاختبار النهائي - الفصل الأول 1444 هـ
د. طارق بن عبدالرحمن مُحَمَّد الفاضل

السؤال الأول : (ثمان درجات)

1. أعط مثالاً لمايلي :

- دالة $f \in \mathcal{L}^1(a,b)$ بينما $f \notin \mathcal{R}(a,b)$. [1]

الحل : $$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 1 & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}^c \end{cases}$$

$$0 = L(f) \neq U(f) = 1 \implies f \notin \mathcal{R}(0,1)$$

$$\int_{[0,1]} f\, dm = m\left([0,1] \cap \mathbb{Q}^c\right) = 1 < \infty \implies f \in \mathcal{L}(0,1)$$

- دالتين $f, g \in \mathcal{R}(a,b)$ بينما $f \circ g \notin \mathcal{R}(a,b)$. [2]

الحل : لتكن $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ معرفة كالتالي

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q} \\ \dfrac{1}{q} & x = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}\,,\ (p,q) = 1 \end{cases}$$ ، عندئذ $f \in \mathcal{R}(0,1)$

لتكن $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ معرفة كالتالي

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x \neq 1 \end{cases}$$ ، عندئذ $g \in \mathcal{R}(0,1)$

بينما $$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$ ، و $g \circ f \notin \mathcal{R}(0,1)$

2. إذا كانت f دالة متصلة على الفترة $[a,b]$ وكان $\int_a^x 3f(t)\, dt = \int_x^b 2f(t)\, dt$

لكل $x \in [a,b]$ فأثبت أن $f(x) = 0$ لكل $x \in [a,b]$. [2]

الحل : بما أن الدالة f متصلة على $[a,b]$ فإن الدالتين $2f$ و $3f$ متصلتين على $[a,b]$

وبالتالي فإن الدالتين $F(x) = \int_a^x 3f(t)\, dt$ و $G(x) = \int_x^b 2f(t)\, dt$ قابلتين للإشتقاق على $[a,b]$.

بإشتقاق الطرفين نحصل على $3f(x) = 0 - 2f(x) \implies 5f(x) = 0 \implies f(x) = 0$

3. ادرس تقارب التكامل المعتل $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}\,dx$. [3]

الحل : $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}\,dx + \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}\,dx$

على الفترة $[0,1]$: $\sqrt{x}(x+1) = x^{\frac{3}{2}} + \sqrt{x} \geq \sqrt{x}$ وبالتالي $\frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}\,dx \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx < \infty$$

على الفترة $[1,\infty)$: $\sqrt{x}(x+1) = x^{\frac{3}{2}} + \sqrt{x} \geq x^{\frac{3}{2}}$ وبالتالي $\frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} \leq \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}\,dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx < \infty$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}\,dx + \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}\,dx < \infty$$

السؤال الثاني : (ست درجات)

1. ادرس التقارب المنتظم لمتتالية الدوال (f_n) حيث $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$ على $[0,1]$. [3]

الحل : لاحظ أن $f_n(0) = 0$.

على الفترة $(0,1]$: $f_n x = \frac{x}{1+n^2x^2} \longrightarrow 0$

$f_n(x) \longrightarrow 0$ نقطياً .

$$\frac{d}{dx}f_n(x) = \frac{(1)(1+n^2x^2) - x(2n^2x)}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$$

$\frac{d}{dx}f_n(x) = 0$ عندما $1 - n^2x^2 = 0 \implies x = \pm\frac{1}{n}$

لاحظ أن $x = \frac{1}{n} \in [0,1]$ بينما $x = -\frac{1}{n} \notin [0,1]$

$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 0| = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)}{1+n^2\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{2n} \longrightarrow 0$ عندما $n \longrightarrow \infty$.

$$f_n \xrightarrow{u} 0$$

أي أن متتالية الدوال تتقارب بانتظام إلى الصفر .

2. ادرس التقارب المنتظم لمتسلسلة الدوال $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{\sqrt{x^2+n^5+2n}}$ على $\mathbb{R}$. [3]

الحل : ضع $f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{\sqrt{x^2+n^5+2n}}$

لاحظ أن $x^2+n^5+2n \geq n^5$ لكل $x \in \mathbb{R}$

$$|f_n(x)| = \left|\frac{\cos(nx)}{\sqrt{x^2+n^5+2n}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+n^5+2n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^5}} = \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}} = M_n$$ لكل $x \in \mathbb{R}$

بما أن المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$ متقاربة ، فباستخدام اختبار فايرشتراس فإن متسلسلة الدوال

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{\sqrt{x^2+n^5+2n}}$ متقاربة بانتظام على $\mathbb{R}$.

السؤال الثالث : (14 درجة)

1. • عرف القياس الخارجي لأي مجموعة $E \subset \mathbb{R}$. [1]

الحل : يعرف القياس الخارجي m^* لأي مجموعة $E \subset \mathbb{R}$ بأنه

$$m^*(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} l(I_i) : I_i \in \mathcal{I}, E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i\right\}$$

• إذا كانت $E, F \subset \mathbb{R}$ وكانت $E \subset F$ فأثبت أن $m^*(E) \leq m^*(F)$. [2]

الحل : افرض أن مجموعة الفترات $\{I_i : I_i \in \mathcal{I}, i \in \mathbb{N}\}$ تغطي F فهي إذن تغطي E وتحقق التالي

$m^*(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} l(I_i)$ ، مما يعني أن $m^*(E)$ تشكل حداً سفلياً للمجموعة $\left\{\sum_{i=1}^{\infty} l(I_i) : I_i \in \mathcal{I}, F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i\right\}$

ونظراً لأن $m^*(F)$ هو الحد السفلي الأكبر لهذه المجموعة فإن $m^*(E) \leq m^*(F)$.

• إذا كانت $E \subset \mathbb{R}$ وكان $m^*(E) = 0$

أثبت أن $m^*(E \cup F) = m^*(F)$ لكل $F \subset \mathbb{R}$. [2]

الحل : لاحظ أن $F \subset E \cup F$ ومن خاصية الإطراد للقياس الخارجي يكون $m^*(F) \leq m^*(E \cup F)$

من خاصية ما دون التجميع يكون $m^*(E \cup F) \leq m^*(E) + m^*(F)$

أي أن $m^*(F) \leq m^*(E \cup F) \leq m^*(E) + m^*(F) = 0 + m^*(F) = m^*(F)$

وبالتالي $m^*(E \cup F) = m^*(F)$ لكل $F \subset \mathbb{R}$

2. • عرف قابلية المجموعة $E \subset \mathbb{R}$ لقياس لبيق . [1]

الحل : نقول أن المجموعة $E \subset \mathbb{R}$ قابلة لقياس لبيق إذا كان

$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$ لكل $A \subset \mathbb{R}$

• بين أن $\mathbb{Q}^c \cap [0,3]$ هي مجموعة بوريل واحسب قياسها . [2]

الحل : لاحظ أن $[0,3] \in \mathcal{B}$ وأيضاً $\mathbb{Q} \in \mathcal{B}$. وبالتالي $\mathbb{Q}^c \cap [0,3] = [0,3] \setminus \mathbb{Q} \in \mathcal{B}$ لأن $\mathcal{B}$ جبر سيجما وبالتالي فهو مغلق تحت عملية الفرق بين المجموعات .

$m(\mathbb{Q}^c \cap [0,3]) = m([0,3] \setminus \mathbb{Q}) = m([0,3]) - m(\mathbb{Q}) = (3-0) - 0 = 3$.

• إذا كانت $E \in \mathcal{M}$ فأثبت وجود مجموعة $G \in \mathcal{B}$ و $E \subset G$ و $m(G \setminus E) = 0$ [2]

الحل : باستخدام نظرية التقريب الأولى

لكل $n \in \mathbb{N}$ توجد مجموعة مفتوحة G_n بحيث $E \subset G_n$ و $m(G_n \setminus E) < \dfrac{1}{n}$.

ضع $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ عندئذ $G \in \mathcal{B}$ و $E \subset G$.

لاحظ أن $G \subset G_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$ وبالتالي $G \setminus E \subset G_n \setminus E$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

أي أن $0 \le m(G \setminus E) \le m(G_n \setminus E) \le \dfrac{1}{n}$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

وبالتالي $m(G \setminus E) = 0$.

3. • عرف قابلية الدالة $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ لقياس لبيق ، حيث $\Omega \in \mathcal{M}$. [1]

الحل : نقول أن الدالة $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ قابلة لقياس لبيق إذا كانت $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$ لكل $B \in \mathcal{B}$.

• أعط مثالاً لدالة غير قابلة لقياس لبيق . [1]

الحل : الدالة χ_E دالة غير قابلة للقياس حيث $E \notin \mathcal{M}$.

• إذا كانت $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ وكانت $f = g\ (a.e.)$ و f قابلة للقياس فأثبت أن g قابلة للقياس . [2]

الحل : ضع $E = \{x \in \Omega : f(x) \neq g(x)\}$

بما أن $f = g\ (a.e.)$ فإن $m(E) = 0$ وبالتالي $E \in \mathcal{M}$ وأيضاً $E^c \in \mathcal{M}$. لكل $\alpha \in \mathbb{R}$

$\{x \in \Omega : g(x) > \alpha\} = (\{x \in \Omega : g(x) > \alpha\} \cap E^c) \cup (\{x \in \Omega : g(x) > \alpha\} \cap E)$

على المجموعة E^c تكون $f(x) = g(x)$، وبالتالي

$\{x \in \Omega : g(x) > \alpha\} = (\{x \in \Omega : f(x) > \alpha\} \cap E^c) \cup (\{x \in \Omega : g(x) > \alpha\} \cap E)$

لاحظ أن $\{x \in \Omega : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{M}$ لأن f دالة قابلة للقياس ، وبما أن $E^c \in \mathcal{M}$

فتكون $(\{x \in \Omega : f(x) > \alpha\} \cap E^c) \in \mathcal{M}$

أيضاً $(\{x \in \Omega : g(x) > \alpha\} \cap E) \subset E$ ، وبما أن $m(E) = 0$ فإن

$(\{x \in \Omega : g(x) > \alpha\} \cap E) \in \mathcal{M}$ وبالتالي $m(\{x \in \Omega : g(x) > \alpha\} \cap E) = 0$

مما يعني أن $\{x \in \Omega : g(x) > \alpha\} \in \mathcal{M}$ لكل $\alpha \in \mathbb{R}$ ، وبالتالي g قابلة للقياس على Ω .

السؤال الرابع : (12 درجة)

1. إذا كانت $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ وكان $\int_E f\, dm = 0$ لكل $E \subset \Omega$ و $E \in \mathcal{M}$

أثبت أن $f(x) = 0\ (a.e.)$ على Ω . [3]

الحل : ضع $E = \{x \in \Omega : f(x) \geq 0\}$ ، عندئذ $E \in \mathcal{M}$ لأن f دالة قابلة للقياس ، وبالتالي $\Omega \setminus E \in \mathcal{M}$.

بما أن $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ فإن $|f| \in \mathcal{L}^1(\Omega)$.

لاحظ أن $|f| = f$ على المجموعة E ، و $|f| = -f$ على المجموعة $\Omega \setminus E$.

$$\int_\Omega |f|\, dm = \int_E |f|\, dm + \int_{\Omega\setminus E} |f|\, dm = \int_E f\, dm + \int_{\Omega\setminus E} (-f)\, dm$$

$$= \int_E f\, dm - \int_{\Omega\setminus E} f\, dm = 0 - 0 = 0$$

وبما أن $|f| \geq 0$ على Ω فإن $|f| = 0$ (a.e.) وبالتالي فإن $f = 0$ (a.e.) .

2.
- أذكر نص نظرية التقارب المطرد . [2]

الحل : إذا كانت $f_n \in \mathcal{L}^0_+(\Omega)$ لكل $n \in \mathbb{N}$ وكانت $f_n \nearrow f$ ، فإن $f \in \mathcal{L}^0_+(\Omega)$ وعندئذ

$$\int_\Omega f\, dm = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n\, dm = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\, dm$$

- إذا كانت $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\, \chi_{[k,k+1)}(x)$ فأثبت أن متتالية الدوال $(f_n(x))$ تزايدية .

استخدم نظرية التقارب المطرد لحساب $\int_{[0,\infty)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\, \chi_{[k,k+1)}\, dm(x)$ [2]

الحل : لاحظ أن $f_n \in \mathcal{S}_+(\Omega) \subset \mathcal{L}^0_+(\Omega)$.

أيضاً $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{1}{2^{n+1}}\, \chi_{[n+1,n+2)}(x) \ \geq 0$ ، مما يعني أن متتالية الدوال متزايدة .

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\, \chi_{[k,k+1)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\, \chi_{[k,k+1)}(x)$$

باستخدام نظرية التقارب المطرد نحصل على

$$\int_{[0,\infty)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\, \chi_{[k,k+1)}\, dm(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\, \chi_{[k,k+1)}(x)\, dm(x)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\, m\left([k,k+1)\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$$

3. • أذكر نص نظرية التقارب المحدود وبرهنها . [3]

الحل : إذا كانت $m(\Omega) < \infty$ وكانت (f_n) متتالية محدودة في $\mathcal{L}^0(\Omega)$ ، وكانت $f_n \longrightarrow f$ (a.e.) فإن

$f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ و $\displaystyle\int_\Omega f\, dm = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n\, dm = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\, dm$

البرهان : افرض أن $|f_n(x)| \le K$ لكل $n \in \mathbb{N}$ ولكل $x \in \Omega$.

بوضع $g(x) = K$ ، نلاحظ أن $\displaystyle\int_\Omega g\, dm = K\, m(\Omega) < \infty$ وبالتالي تكون $g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$

أي أن متتالية الدوال (f_n) تحقق شروط نظرية التقارب المسقوف ، ومن ذلك نحصل على

$$\int_\Omega f\, dm = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n\, dm = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\, dm$$

• استخدم نظرية التقارب المحدود لحساب $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\pi]} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x^2}{n}\right)\, dm(x)$ [2]

الحل : ضع $f_n(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x^2}{n}\right)$ و ضع $\Omega = [0,\pi]$

عندئذ $m(\Omega) = \pi < \infty$ و $f_n \in \mathcal{L}^0(\Omega)$ لأن f_n متصلة على Ω لكل $n \in \mathbb{N}$.

ايضاً $\left|\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x^2}{n}\right)\right| \le 1$ لكل $n \in \mathbb{N}$ ولكل $x \in \Omega$.

وكذلك $f_n \longrightarrow 0$ ، بتطبيق نظرية التقارب المحدود نحصل على

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\pi]} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x^2}{n}\right)\, dm(x) = \int_{[0,\pi]} \lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x^2}{n}\right)\, dm(x) = \int_{[0,\pi]} 0\, dm(x) = 0$$