جامعة الملك سعود	كلية العلوم	قسم الرياضيات
الاختبار النهائي	الفصل الأول 1444 هـ	481 ريض

السؤال 1 : (ثمان درجات)

1. أعط مثالاً لمايلي :
   - دالة $f \in \mathcal{L}^1(a,b)$ بينما $f \notin \mathcal{R}(a,b)$. [1]
   - دالتين $f, g \in \mathcal{R}(a,b)$ بينما $f \circ g \notin \mathcal{R}(a,b)$. [2]
2. إذا كانت f دالة متصلة على الفترة $[a,b]$ وكان $\displaystyle\int_a^x 3f(t)\,dt = \int_x^b 2f(t)\,dt$ لكل $x \in [a,b]$ فأثبت أن $f(x) = 0$ لكل $x \in [a,b]$. [2]
3. ادرس تقارب التكامل المعتل $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}\,dx$. [3]

السؤال 2 : (ست درجات)

1. ادرس التقارب المنتظم لمتتالية الدوال (f_n) حيث $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$ على $[0,1]$. [3]
2. ادرس التقارب المنتظم لمتسلسلة الدوال $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{\sqrt{x^2+n^5+2n}}$ على $\mathbb{R}$. [3]

السؤال 3 : (14 درجة)

1.
   - عرف القياس الخارجي لأي مجموعة $E \subset \mathbb{R}$. [1]
   - إذا كانت $E, F \subset \mathbb{R}$ وكانت $E \subset F$ فأثبت أن $m^*(E) \leq m^*(F)$. [2]
   - إذا كانت $E \subset \mathbb{R}$ وكان $m^*(E) = 0$

أثبت أن $m^*(E \cup F) = m^*(F)$ لكل $F \subset \mathbb{R}$. [2]

2. • عرف قابلية المجموعة $E \subset \mathbb{R}$ لقياس لبيق . [1]
   • بين أن $\mathbb{Q}^c \cap [0,3]$ هي مجموعة بوريل واحسب قياسها . [2]
   • إذا كانت $E \in \mathcal{M}$ فأثبت وجود مجموعة $G \in \mathcal{B}$ و $E \subset G$ و $m(G \setminus E) = 0$ [2]
3. • عرف قابلية الدالة $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ لقياس لبيق ، حيث $\Omega \in \mathcal{M}$. [1]
   • أعط مثالاً لدالة غير قابلة لقياس لبيق . [1]
   • إذا كانت $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ وكانت $f = g$ $(a.e.)$ و f قابلة للقياس فأثبت أن g قابلة للقياس . [2]

السؤال 4 : (12 درجة)

1. إذا كانت $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ وكان $\int_E f \, dm = 0$ لكل $E \subset \Omega$ و $E \in \mathcal{M}$

   أثبت أن $f(x) = 0$ $(a.e.)$ على Ω . [3]

2. • أذكر نص نظرية التقارب المطرد . [2]
   • إذا كانت $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \chi_{[k,k+1)}(x)$ فأثبت أن متتالية الدوال $(f_n(x))$ تزايدية .

   استخدم نظرية التقارب المطرد لحساب $\int_{[0,\infty)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \chi_{[k,k+1)}(x) \, dm(x)$ [2]

3. • أذكر نص نظرية التقارب المحدود وبرهنها . [3]
   • استخدم نظرية التقارب المحدود لحساب $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\pi]} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x^2}{n}\right) \, dm(x)$ [2]