481 ريض - التحليل الحقيقي (2)
حل الاختبار النهائي - الفصل الثاني 1444 هـ
د. طارق بن عبدالرحمن مُحمَّد الفاضل

السؤال الأول (6 درجات) :

1. أعط مثالاً لمايلي :

(i) دالتين مختلفتين $f, g \notin \mathcal{R}(a,b)$ بينما $fg \in \mathcal{R}(a,b)$. [1]

2. الحل : لتكن $f, g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ بحيث :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ -1 & x \in \mathbb{Q}^c \cap [0,1] \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 1 & x \in \mathbb{Q}^c \cap [0,1] \end{cases}$$

عندئذ $f, g \notin \mathcal{R}(0,1)$.

بينما $(fg)(x) = 1$ لكل $x \in [0,1]$ وهي دالة متصلة وبالتالي $fg \in \mathcal{R}(0,1)$.

(ii) دالة $f \notin \mathcal{L}^1(\Omega)$ حيث $\Omega \in \mathcal{M}$. [1]

الحل : لتكن $f(x) = \dfrac{1}{x}$ و $\Omega = [1,\infty)$ ، عندئذ $\Omega \in \mathcal{M}$ و $f \in \mathcal{L}^0_+(\Omega)$.

ولتكن $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}\, \chi_{[k,k+1)}(x)$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

لاحظ أن $f \geq f_n$ على Ω لكل $n \in \mathbb{N}$ وبالتالي $\displaystyle\int_\Omega f\, dm \geq \int_\Omega f_n\, dm$

أي أن $\displaystyle\int_\Omega f\, dm \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}\, m\left([k,k+1)\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

وبالتالي $\displaystyle\int_\Omega f\, dm \geq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \infty$ وبالتالي $f \notin \mathcal{L}^1(\Omega)$.

3. إذا كانت f, g دالتان متصلتان على الفترة $[a,b]$ وكان $\displaystyle\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx = 0$

فأثبت أن $f(x) = g(x)$ لكل $x \in [a,b]$. [2]

الحل : لتكن $h(x) = |f(x) - g(x)|$ لكل $x \in [a, b]$

بما أن f, g دالتان متصلتان على $[a, b]$ فإن h دالة متصلة على $[a, b]$.

لكل $x \in [a, b]$: $h(x) = |f(x) - g(x)| \geq 0$.

أيضاً $\int_a^b h(x)\, dx = \int_a^b |f(x) - g(x)|\ dx = 0$

أي أن لكل $x \in [a, b]$ فإن $|f(x) - g(x)| = 0 \implies h(x) = 0$

$\implies f(x) - g(x) = 0 \implies f(x) = g(x)$

4. ادرس تقارب التكامل المعتل $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}\, dx$. [2]

الحل : $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^4}\, dx + \int_1^\infty \frac{1}{1+x^4}\, dx$

على الفترة $[0, 1]$ الدالة $\frac{1}{1+x^4}$ متصلة ، وبالتالي $\int_0^1 \frac{1}{1+x^4}\, dx < \infty$.

على الفترة $[1, \infty)$: $\frac{1}{x^4} < \frac{1}{1+x^4} \impliedby 1 + x^4 > x^4$ ، وبالتالي

$\int_1^\infty \frac{1}{1+x^4}\, dx < \int_1^\infty \frac{1}{x^4}\, dx < \infty$ لأن ($p = 4 > 1$) .

أي أن التكامل المعتل متقارب .

السؤال الثاني (6 درجات) :

1. ادرس التقارب المنتظم لمتتالية الدوال (f_n) حيث $f_n(x) = \frac{x^n}{2 + x^n}$ على $[0, a]$ حيث $0 < a < 1$. [3]

الحل : لكل $x \in [0, a]$ فإن $0 \leq x \leq a < 1$ ،

أي أن $f_n(x) = \frac{x^n}{2+x^n} \longrightarrow \frac{0}{2+0} = 0$ ، أي أن متتالية الدوال تتقارب إلى الصفر نقطياً .

$$\sup_{x \in [0,a]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0,a]} \left| \frac{x^n}{2+x^n} \right| = \sup_{x \in [0,a]} \frac{x^n}{2+x^n}$$

$$\frac{d}{dx} f_n(x) = \frac{nx^{n-1}\left(2+x^n\right) - x^n\ \left(nx^{n-1}\right)}{\left(2+x^n\right)^2} = \frac{2nx^{n-1}}{\left(2+x^n\right)^2} \geq 0$$

أي أن الدالة f_n تزايدية على الفترة $[0, a]$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

$\sup_{x\in[0,a]} |f_n(x) - f(x)| = f_n(a) = \dfrac{a^n}{2+a^n} \longrightarrow 0$ عندما $n \to \infty$.

أي أن متتالية الدوال (f_n) تتقارب بانتظام إلى الصفر .

الحل الآخر : لكل $x \in [0,a]$ حيث $0 < a < 1$ فإن $2 + x^n \geq 2 > 1$ وبالتالي

$$0 \leq f_n(x) = \frac{x^n}{2+x^n} \leq x^n \leq a^n$$

وبما أن $0 < a < 1$ فإن $a^n \longrightarrow 0$ عندما $n \longrightarrow \infty$

أي أن متتالية الدوال (f_n) تتقارب بانتظام إلى الصفر .

2. ادرس التقارب المنتظم لمتسلسلة الدوال $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{|x|+\sqrt{n}}$ على $\mathbb{R}$. [3]

الحل :

(1) لتكن $u_n(x) = (-1)^n$ ، عندئذ

$U_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^n \leq 1$ ، لكل $x \in \mathbb{R}$ ولكل $n \in \mathbb{N}$.

أي أن متتالية المجاميع الجزئية $(U_n(x))$ محدودة .

(2) لتكن $v_n(x) = \dfrac{1}{|x|+\sqrt{n}}$ ، لكل $x \in \mathbb{R}$ ولكل $n \in \mathbb{N}$ فإن :

$v_{n+1}(x) = \dfrac{1}{|x|+\sqrt{n+1}} < \dfrac{1}{|x|+\sqrt{n}} = v_n(x)$ ، أي أن متتالية الدوال $(v_n(x))$ تناقصية .

لكل $x \in \mathbb{R}$: $0 \leq |v_n(x)| = \dfrac{1}{|x|+\sqrt{n}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

أي أن متتالية الدوال $(v_n(x))$ تتقارب بانتظام إلى الصفر .

من اختبار ديرشلية للتقارب المنتظم لمتسلسلات الدوال فإن $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{|x|+\sqrt{n}}$ تتقارب بانتظام على $\mathbb{R}$.

السؤال الثالث (13 درجة) :

1. عرف القياس الخارجي لأي مجموعة $E \subset \mathbb{R}$. [1]

الحل : يعرف القياس الخارجي m^* لأي مجموعة $E \subset \mathbb{R}$ بأنه

$$m^*(E)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} l\left(I_i\right): I_i \in \mathcal{I}, E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i\right\}$$

2. لكل $E \subset \mathbb{R}$ ولكل $\epsilon > 0$ أثبت وجود مجموعة مفتوحة G تحتوي E بحيث يكون $m^*(G) \leq m^*(E)+\epsilon$.[2]

الحل :

إذا كان $m^*(E)=\infty$ ، خذ $G=\mathbb{R}$ ، عندئذ G مجموعة مفتوحة و $E \subset G$

و $m^*(G)=\infty \leq m^*(E)+\epsilon=\infty$ لأي $\epsilon>0$.

لنفرض أن $m^*(E)<\infty$ ، ولتكن $\epsilon>0$ ، من تعريف $m^*(E)$ فإنه يوجد غطاء $\{I_i : i \in \mathbb{N}\}$ في $\mathcal{I}$ بحيث يكون

$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ و $\sum_{i=1}^{\infty} l\left(I_i\right) \leq m^*(E)+\frac{\epsilon}{2}$.

لتكن $I_i=\left[a_i, b_i\right)$ حيث $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ ، $i \in \mathbb{N}$

ضع $J_i=\left(a_i-\frac{\epsilon}{2^{i+1}}, b_i\right)$ ، عندئذ J_i فترة مفتوحة لكل $i \in \mathbb{N}$ و $I_i \subset J_i$.

ضع $G=\bigcup_{i=1}^{\infty} J_i$ عندئذ G مجموعة مفتوحة ، و $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i=G$

$$m^*(G)=m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} J_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*\left(J_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} l\left(J_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\left[\left(b_i-a_i\right)+\frac{\epsilon}{2^{i+1}}\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\left(b_i-a_i\right)+\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{i+1}}=\sum_{i=1}^{\infty} l\left(I_i\right)+\frac{\epsilon}{2} \leq m^*(E)+\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=m^*(E)+\epsilon$$

3. عرف قابلية المجموعة $E \subset \mathbb{R}$ لقياس لبيق . [1]

الحل : نقول أن المجموعة $E \subset \mathbb{R}$ قابلة لقياس لبيق إذا كان

$m^*(A)=m^*\left(A \cap E\right)+m^*\left(A \cap E^c\right)$ لكل $A \subset \mathbb{R}$

4. إذا كانت $F \subset [0,1]$ هي مجموعة كانتور ، فأثبت أن $[0,1] \cap F^c \in \mathcal{B}$ ، واحسب قياسها . [2]

الحل : F مجموعة مغلقة وبالتالي $F \in \mathcal{B}$ ، وأيضاً $[0,1]$ فترة مغلقة وبالتالي $[0,1] \in \mathcal{B}$.

$[0,1] \cap F^c=[0,1] \setminus F \in \mathcal{B}$ لأن $\mathcal{B}$ جبر - سيجما .

بما أن $m(F)=0<\infty$ فإن :

$$m\left([0,1] \cap F^c\right)=m([0,1] \setminus F)=m([0,1])-m(F)=(1-0)-0=1$$

5. إذا كانت $E \in \mathcal{M}$ فأثبت وجود مجموعة $F \in \mathcal{B}$ و $F \subset E$ وتحقق $m(E \setminus F) = 0$. [2]

الحل : باستخدام نظرية التقريب الأولى

لكل $n \in \mathbb{N}$ توجد مجموعة مغلقة F_n بحيث $F_n \subset E$ و $m\left(E \setminus F_n\right) < \dfrac{1}{n}$.

ضع $F = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ عندئذ $F \in \mathcal{B}$ و $F \subset E$.

لاحظ أن $F_n \subset F$ لكل $n \in \mathbb{N}$ وبالتالي $E \setminus F \subset E \setminus F_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

أي أن $0 \leq m\left(E \setminus F\right) \leq m\left(E \setminus F_n\right) \leq \dfrac{1}{n}$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

وبالتالي $m\left(E \setminus F\right) = 0$.

6. عرف قابلية الدالة $f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ لقياس لبيق ، حيث $\Omega \in \mathcal{M}$. [1]

الحل : نقول أن الدالة $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ قابلة لقياس لبيق إذا كانت $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$ لكل $B \in \mathcal{B}$ ، و $f^{-1}\left(\{\infty\}\right) \in \mathcal{M}$ و $f^{-1}\left(\{-\infty\}\right) \in \mathcal{M}$.

7. أعط مثالاً لدالة f غير قابلة لقياس لبيق ، بينما f^2 قابلة لقياس لبيق . [1]

8. الحل : لتكن $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ بحيث :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in V \\ -1 & x \notin V \end{cases}$$

، حيث $V \notin \mathcal{M}$ هي مجموعة فيتالي .

$\{1\} \in \mathcal{B}$ بينما $f^{-1}\left(\{1\}\right) = V \notin \mathcal{M}$ وبالتالي f غير قابلة لقياس لبيق .

$f^2 = 1$ دالة متصلة على $\mathbb{R}$ وبالتالي قابلة لقياس لبيق .

9. إذا كانت
$$f(x) = \begin{cases} x^3 & , \quad x \in \mathbb{Q} \cap [0,4] \\ 5 & \quad x \in \mathbb{Q}^c \cap [0,4] \end{cases}$$

أثبت أن $f \in \mathcal{L}^0(0,4)$ ، واحسب $\displaystyle\int_{[0,4]} f\, dm$. [3]

الحل : بما أن $m\left(\mathbb{Q} \cap [0,4]\right) = 0$ فإن $f = 5\ (a.e.)$ على $[0,4]$.

وبما أن الدالة 5 دالة ثابتة فهي متصلة على $[0,4]$ وبالتالي $5 \in \mathcal{L}^0(0,4)$ ومن ذلك نستنتج أن $f \in \mathcal{L}^0(0,4)$.

بما أن $f = 5\ (a.e.)$ على $[0,4]$ فإن :

$$\int_{[0,4]} f\, dm = \int_{[0,4]} 5\, dm = 5\, m\left([0,4]\right) = 5(4-0) = 20$$

السؤال الرابع (15 درجة) :

1. إذا كانت $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ وكانت $f = g\ (a.e.)$ على Ω
أثبت أن $g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ وأن $\int_\Omega g\, dm = \int_\Omega f\, dm$. [3]

الحل : بما أن $f \in \mathcal{L}^1\left(\Omega\right)$ فإن $f \in \mathcal{L}^0\left(\Omega\right)$.

وبما أن $f = g\ (a.e.)$ على Ω فإن $g \in \mathcal{L}^0\left(\Omega\right)$.

وبما أن $f = g\ (a.e.)$ على Ω فإن $E = \{x \in \Omega : f(x) \neq g(x)\} \in \mathcal{M}$ و $m(E) = 0$ وأيضاً $\Omega \setminus E \in \mathcal{M}$.

وبما أن $m(E) = 0$ و $E \subset \Omega$ و $g \in \mathcal{L}^0\left(\Omega\right)$ فإن $\int_E g\, dm = 0 < \infty$ ، أي أن $g \in \mathcal{L}^1\left(E\right)$.

بما أن $\Omega \setminus E \subset \Omega$ و $\Omega \setminus E \in \mathcal{M}$ و $f \in \mathcal{L}^1\left(\Omega\right)$ فإن $f \in \mathcal{L}^1\left(\Omega \setminus E\right)$.

بما أن $f = g$ على $\Omega \setminus E$ فإن $\int_{\Omega\setminus E} g\, dm = \int_{\Omega\setminus E} f\, dm < \infty$ ، أي أن $g \in \mathcal{L}^1\left(\Omega \setminus E\right)$.

بما أن $g \in \mathcal{L}^1\left(E\right)$ و $g \in \mathcal{L}^1\left(\Omega \setminus E\right)$ و $\Omega = \left(\Omega \setminus E\right) \cup E$ (اتحاد منفصل) ، فإن $g \in \mathcal{L}^1\left(\Omega\right)$.

$$\int_\Omega g\, dm = \int_E g\, dm + \int_{\Omega\setminus E} g\, dm = 0 + \int_{\Omega\setminus E} g\, dm$$
$$= \int_E f\, dm + \int_{\Omega\setminus E} f\, dm = \int_\Omega f\, dm$$

2. أذكر نص تمهيدية فاتو وبرهنها . [3]

الحل : نص تمهيدية فاتو :

إذا كانت (f_n) متتالية دوال في $\mathcal{L}^0_+\left(\Omega\right)$ فإن $\liminf f_n \in \mathcal{L}^0_+\left(\Omega\right)$ ، كما أن

$$\int_\Omega \liminf f_n\, dm \leq \liminf \int_\Omega f_n\, dm$$

البرهان : بما أن $f_n \geq 0$ على Ω لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن $\liminf f_n \geq 0$ على Ω .

بما أن $f_n \in \mathcal{L}^0\left(\Omega\right)$ لكل $n \in \mathbb{N}$ ، فإن $\liminf f_n \in \mathcal{L}^0\left(\Omega\right)$ ، وبالتالي $\liminf f_n \in \mathcal{L}^0_+\left(\Omega\right)$.

ضع $g_n = \inf\left\{f_k : k \geq n\right\}$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

ولتكن $g = \liminf f_n = \lim g_n$.

عندئذ $g_n \in \mathcal{L}_+^0\,(\Omega)$ و $g_n \nearrow g$ ، فمن نظرية التقارب المطرد نحصل على :

$$\int_\Omega \liminf f_n\, dm = \int_\Omega g\, dm = \lim \int_\Omega g_n\, dm$$

ولكن من تعريف g_n فإن $g_n \le f_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$ وبالتالي $\int_\Omega g_n\, dm \le \int_\Omega f_n\, dm$ لكل $n \in \mathbb{N}$

أي أن ، $\int_\Omega \liminf f_n\, dm = \lim \int_\Omega g_n\, dm \le \liminf \int_\Omega f_n\, dm$.

3. أذكر نص نظرية التقارب المحدود ، [2]
واستخدمها لحساب $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{[0,2]} \frac{n^2}{n^2+x^3}\, dm(x)$ [2]

الحل : نص نظرية التقارب المحدود :

افرض أن $m\,(\Omega) < \infty$ وأن (f_n) متتالية محدودة في $\mathcal{L}^0\,(\Omega)$. إذا كانت $f_n \longrightarrow f\ (a.e.)$ فإن $f \in \mathcal{L}^1\,(\Omega)$

ولدينا $\lim\limits_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\, dm = \int_\Omega f\, dm$.

حساب $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{[0,2]} \frac{n^2}{n^2+x^3}\, dm(x)$:

لتكن $f_n(x) = \frac{n^2}{n^2+x^3}$ ، ولتكن $\Omega = [0,2]$

(1) $m\,(\Omega) = m\,([0,2]) = 2 - 0 = 2 < \infty$.

(2) الدالة f_n متصلة على الفترة $[0,2]$ وبالتالي $f_n \in \mathcal{L}^0(0,2)$ ، لكل $n \in \mathbb{N}$.

(3) $f_n \longrightarrow 1$ على $[0,2]$.

(4) لكل $x \in [0,2]$ ولكل $n \in \mathbb{N}$: $n^2 + x^3 \ge n^2 > 0$ ، وبالتالي $0 < \frac{n^2}{n^2+x^3} \le 1$.

أي أن $|f_n(x)| = \frac{n^2}{n^2+x^3} \le 1$ ، لكل $x \in [0,2]$ ولكل $n \in \mathbb{N}$.

من نظرية التقارب المحدود نحصل على :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,2]} \frac{n^2}{n^2+x^3}\, dm(x) = \int_{[0,2]} 1\, dm = m\,([0,2]) = 2 - 0 = 2$$

4. أذكر نص نظرية التقارب المسقوف ، [2]
واستخدمها لحساب $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \cos\left(\frac{x^2}{n}\right) dm(x)$ [3]

الحل : نص نظرية التقارب المسقوف :

افرض أن (f_n) متتالية في $\mathcal{L}^0(\Omega)$ وأن $f_n \longrightarrow f\ (a.e.)$. إذا كانت هناك دالة $g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ بحيث $|f_n(x)| \leq g(x)\ (a.e.)$ لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ ، كما أن $\int_\Omega f\, dm = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\, dm$.

حساب $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \cos\left(\frac{x^2}{n}\right) dm(x)$:

لتكن $f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \cos\left(\frac{x^2}{n}\right)$.

(1) الدالة f_n متصلة على الفترة $[0,\infty)$ وبالتالي $f_n \in \mathcal{L}^0(0,\infty)$ ، لكل $n \in \mathbb{N}$.

(2) $f_n \longrightarrow e^{-x}\cos(0) = e^{-x}$ على $[0,\infty)$.

(3) لكل $x \in [0,\infty)$ ولكل $n \in \mathbb{N}$: $e^{-\frac{x}{n}} \geq 1 - \frac{x}{n}$ ، وبالتالي $e^{-x} = \left(e^{-\frac{x}{n}}\right)^n \geq \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$.

أي أن $|f_n(x)| = \left|\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \cos\left(\frac{x^2}{n}\right)\right| \leq \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x} = g(x)$ ، لكل $x \in [0,\infty)$ ولكل $n \in \mathbb{N}$.

(4) بما أن $g(x) \geq 0$ لكل $x \in [0,\infty)$ فإن $\int_{[0,\infty)} g\, dm = \int_0^\infty g(x)\, dx = \int_0^\infty e^{-x}\, dx$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(-\int_0^t e^{-x}(-1)\, dx\right) = \lim_{t\to\infty}\left(-\left[e^{-x}\right]_0^t\right) = \lim_{t\to\infty}\left(-\left[e^{-t} - e^0\right]\right) = 1 < \infty$$

أي أن $g \in \mathcal{L}^1(0,\infty)$.

من نظرية التقارب المسقوف نحصل على :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \cos\left(\frac{x^2}{n}\right) dm(x) = \int_{[0,\infty)} e^{-x}\, dm = \int_0^\infty e^{-x}\, dx = 1$$