جامعة الملك سعود	كلية العلوم	قسم الرياضيات
الاختبار النهائي	الفصل الثاني 1444 هـ	481 ريض

السؤال 1 : (6 درجات)

1. أعط مثالاً لمايلي :

(i) دالتين مختلفتين $f, g \notin \mathcal{R}(a,b)$ بينما $fg \in \mathcal{R}(a,b)$. [1]

(ii) دالة $f \notin \mathcal{L}^1(\Omega)$ حيث $\Omega \in \mathcal{M}$. [1]

2. إذا كانت f, g دالتان متصلتان على الفترة $[a,b]$ وكان $\int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx = 0$

فأثبت أن $f(x) = g(x)$ لكل $x \in [a,b]$. [2]

3. ادرس تقارب التكامل المعتل $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4} \, dx$. [2]

السؤال 2 : (6 درجات)

1. ادرس التقارب المنتظم لمتتالية الدوال (f_n) حيث $f_n(x) = \frac{x^n}{2+x^n}$ على $[0,a]$ حيث $0 < a < 1$. [3]

2. ادرس التقارب المنتظم لمتسلسلة الدوال $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{|x| + \sqrt{n}}$ على $\mathbb{R}$. [3]

السؤال 3 : (13 درجة)

1. عرف القياس الخارجي لأي مجموعة $E \subset \mathbb{R}$. [1]

2. لكل $E \subset \mathbb{R}$ ولكل $\epsilon > 0$ أثبت وجود مجموعة مفتوحة G تحتوي E بحيث يكون $m^*(G) \leq m^*(E) + \epsilon$. [2]

3. عرف قابلية المجموعة $E \subset \mathbb{R}$ لقياس لبيق . [1]

4. إذا كانت $F \subset [0,1]$ هي مجموعة كانتور ، فأثبت أن $[0,1] \cap F^c \in \mathcal{B}$ ، واحسب قياسها . [2]

5. إذا كانت $E \in \mathcal{M}$ فأثبت وجود مجموعة $F \in \mathcal{B}$ و $F \subset E$ وتحقق $m(E \setminus F) = 0$. [2]

6. عرف قابلية الدالة $f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ لقياس لبيق ، حيث $\Omega \in \mathcal{M}$. [1]

7. أعط مثالاً لدالة f غير قابلة لقياس لبيق ، بينما f^2 قابلة لقياس لبيق . [1]

8. إذا كانت
$$f(x) = \begin{cases} x^3 & , \quad x \in \mathbb{Q} \cap [0,4] \\ 5 & \quad x \in \mathbb{Q}^c \cap [0,4] \end{cases}$$
أثبت أن $f \in \mathcal{L}^0(0,4)$ ، واحسب $\displaystyle\int_{[0,4]} f \, dm$. [3]

السؤال 4 : (15 درجة)

1. إذا كانت $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ وكانت $f = g \ (a.e.)$ على Ω
أثبت أن $g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ وأن $\displaystyle\int_\Omega f \, dm = \int_\Omega g \, dm$. [3]

2. أذكر نص تمهيدية فاتو وبرهنها . [3]

3. أذكر نص نظرية التقارب المحدود ، [2]
واستخدمها لحساب $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{[0,2]} \frac{n^2}{n^2+x^3} \, dm(x)$ [2]

4. أذكر نص نظرية التقارب المسقوف ، [2]
واستخدمها لحساب $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \cos\left(\frac{x^2}{n}\right) dm(x)$ [3]