ثانيا : مسائل التخصيص:

الهدف منها اختيار أفضل شخص للقيام بكل عمل – يشترط في مصفوفة مسألة التخصيص أن تكون مصفوفة مربعة (عدد الصفوف مساويا لعدد الأعمدة) ويعني ذلك أن تكوت المسألة في حالة توازن (عدد الوحدات المخصصة يساوي عدد الوحدات المطلوبة) ، ويتم الحصول على الحل النهائي بتخصيص كل عنصر من الوحدات المخصصة لعنصر واحد فقط من الوحدات المطلوبة.

دائما ما تهدف مسألة التخصيص إلى تصغير دالة الهدف لأن مصفوفة التخصيص المعطاة هي مصفوفة تكاليف ، أما إذا كانت المصفوفة المعطاة مصفوفة أرباح يتم تحويلها إلى تكاليف (تحويل مسألة التكبير إلى مسألة تصغير) عن طريق طرح جميع القيم في المصفوفة من أكبر قيمة.

الصورة العامة للنموذج الخطي لمسألة التخصيص:

العناصر المطلوبة (العاملين) ل = 1 ، 2 ، ... ، ن

العناصر المخصصة (الأعمال) ك = 1 ، 2 ، ... ، ن

تكلفة تخصيص العامل ل للقيام بالعمل ك هي $\text{ت}_{\text{لك}}$

$\text{س}_{\text{لك}} = 1$ إذا تم تخصيص العامل ل للقيام بالعمل ك ، عدا ذلك فإن $\text{س}_{\text{لك}} = 0$

و يأخذ النموذج الرياضي لمسألة التخصيص الشكل التالي:

$$\downarrow \text{هـ} = \underset{\text{ل}=1}{\overset{\text{ن}}{\text{مج}}}\ \underset{\text{ك}=1}{\overset{\text{ن}}{\text{مج}}}\ \text{ت}_{\text{لك}}\ \text{س}_{\text{لك}}$$

$$= \text{ت}_{11}\text{س}_{11} + \text{ت}_{21}\text{س}_{21} + \dots + \text{ت}_{1\text{ن}}\text{س}_{1\text{ن}} + \text{ت}_{12}\text{س}_{12} + \text{ت}_{22}\text{س}_{22} + \dots + \text{ت}_{2\text{ن}}\text{س}_{2\text{ن}} + \dots +$$

$$\text{ت}_{\text{ن}1}\text{س}_{\text{ن}1} + \text{ت}_{\text{ن}2}\text{س}_{\text{ن}2} + \dots + \text{ت}_{\text{نن}}\text{س}_{\text{نن}}$$

طبقا للقيود :

$$\underset{\text{ك}=1}{\overset{\text{ن}}{\text{مج}}}\ \text{س}_{\text{لك}} = 1 \quad \text{، ل} = 1 \text{ ، } 2 \text{ ، ... ، ن}$$ قيود العناصر المطلوبة – يتم تخصيصها لعمل واحد فقط

$$\underset{\text{ل}=1}{\overset{\text{ن}}{\text{مج}}}\ \text{س}_{\text{لك}} = 1 \quad \text{، ك} = 1 \text{ ، } 2 \text{ ، ... ، ن}$$ قيود العناصر المخصصة – يتم تخصيصها لعامل واحد فقط

$\text{س}_{\text{لك}} = 0$ أو 1 لكل ل= 1، 2، ... ، م ، ك = 1، 2، ... ، ن

يمكن توضيح طريقة حل مسائل التخصيص ، من خلال المثالين التاليين:

مثال 1 :

باستخدام مصفوفة التكاليف التالية والتي تمثل الأجر الذي يتقاضاه العامل بالريال عند قيام أي من ثلاثة عمال ص_1 ، ص_2 ، ص_3 بإنتاج وحدة واحدة من أي من ثلاثة أنواع منتجات ع_1 ، ع_2 ، ع_3 في أحد المصانع. المطلوب تخصيص كل عامل لأحد هذه الأعمال للحصول على أقل تكلفة للإنتاج.

	ع$_1$	ع$_2$	ع$_3$
ص$_1$	15	10	9
ص$_2$	9	15	10
ص$_3$	10	12	8

على سبيل المثال توضح المصفوفة أن الأجر الذي يتقاضاه العامل الأول لإنتاج وحدة واحدة من المنتج الثاني 10 بينما الأجر الذي يتقاضاه العامل الثاني لإنتاج وحدة واحدة من نفس المنتج 15 .

الحل

– نوجد أقل قيمة في كل صف ثم نطرح هذه القيمة من كل القيم في الصف

	ع$_1$	ع$_2$	ع$_3$	أقل قيمة
ص$_1$	15	10	9	9
ص$_2$	9	15	10	9
ص$_3$	10	12	8	8

– نوجد أقل قيمة في كل عمود ثم نطرح هذه القيمة من كل القيم في العمود

	ع$_1$	ع$_2$	ع$_3$
ص$_1$	6	1	0
ص$_2$	0	6	1
ص$_3$	2	4	0
أقل قيمة	0	1	0

	ع$_1$	ع$_2$	ع$_3$
ص$_1$	6	0	0
ص$_2$	0	5	1
ص$_3$	2	3	0

يتم تخصيص الأعمال باستخدام القيم الصفرية – في حالة وجود تخصيص (تخصيص عنصر واحد من كل صف (أو عمود) لعنصر واحد فقط من كل عمود (أو من كل صف)) **نكون قد وصلنا للحل النهائي.**

التخصيص: (1 ، 2) ، (2 ، 1) ، (3 ، 3)

التكلفة الإجمالية = 10 + 9 + 8 = 27

مثال 2 : أوجد الحل النهائي لمسألة التخصيص باستخدام مصفوفة التكاليف التالية والتي تمثل عدد ساعات العمل عند قيام أي من أربعة عمال بأي من أربعة أعمال موضحة.

	ع$_1$	ع$_2$	ع$_3$	ع$_4$
ص$_1$	1	4	6	3
ص$_2$	9	7	10	9
ص$_3$	4	5	11	7
ص$_4$	8	7	8	5

الحل

	ع$_1$	ع$_2$	ع$_3$	ع$_4$	أقل قيمة
ص$_1$	1	4	6	3	1
ص$_2$	9	7	10	9	7
ص$_3$	4	5	11	7	4
ص$_4$	8	7	8	5	5

	ع$_1$	ع$_2$	ع$_3$	ع$_4$
ص$_1$	0	3	5	2
ص$_2$	2	0	3	2
ص$_3$	0	1	7	3
ص$_4$	3	2	3	0
أقل قيمة	0	0	3	0

	ع$_1$	ع$_2$	ع$_3$	ع$_4$
ص$_1$	0	3	2	2
ص$_2$	2	0	0	2
ص$_3$	0	1	4	3
ص$_4$	3	2	0	0

في حالة عدم وجود تخصيص ممكن نرسم أقل عدد ممكن من الخطوط الأفقية والرأسية تغطي جميع القيم الصفرية ، ثم نوجد أقل قيمة من القيم الغير مغطاة ونقوم بجمعها على القيم عند تقاطع الخطوط المرسومة وطرحها من القيم الغير مغطاة

ثم نحدد وجود تخصيص ممكن – وفي حالة عدم وجوده يمكن تكرار هذه الخطوة حتى نحصل على تخصيص.

$ع_4$	$ع_3$	$ع_2$	$ع_1$	
2	2	3	0	$ص_1$
2	0	0	2	$ص_2$
3	4	1	0	$ص_3$
0	0	2	3	$ص_4$

$ع_4$	$ع_3$	$ع_2$	$ع_1$	
1	1	2	0	$ص_1$
2	0	0	3	$ص_2$
2	3	0	0	$ص_3$
0	0	2	4	$ص_4$

التخصيص : (1 ، 1) ، (3 ، 2) ، (2 ، 3) ، (4 ، 4)

عدد ساعات العمل الإجمالي = 1 + 10 + 5 + 5 = 21

شبكات الأعمال:

يمكن وصف شبكة الأعمال للمشروع بأنها نموذج وصفي للمشروع يبين كافة العلاقات بين أنشطته وتوزيع الموارد عليها ، ومن ثم تحديد الأنشطة الحرجة واستدراك حدوث أي تأخير في تنفيذها.

ويعد التحليل الشبكي أحد أهم أساليب التخطيط للمشاريع وكانت بداية تطبيق هذا الأسلوب عام 1957 في الولايات المتحدة وفرنسا، حيث استخدم تحت اختصارات عديدة منها:

1- **طريقة المسار الحرج ، ويرمز لها اختصارا (CPM)**
2- **طريقة تقييم ومراجعة البرامج ، ويرمز لها اختصارا بيرت (PERT)**

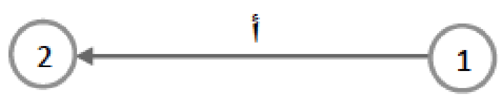
أهمية التحليل الشبكي:

- **تحديد إجمالي الخطوات اللازمة لتنفيذ مشروع ما.**
- **تحديد سير العمل بشكل أساسي.**
- **عرض التعاقب الزمني لخطوات العمل.**
- **تحديد أزمنة الإنهاء للمشروع وتحقق الشروط الملائمة لتخطيط الأزمنة في المستقبل.**

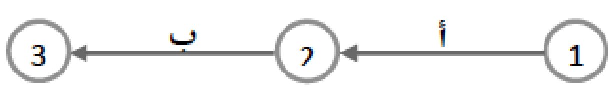
المفاهيم الأساسية للتحليل الشبكي:

- **الحدث: نقطة زمنية تشير إلى بداية أو نهاية النشاط وتمثل بـ دائرة.**
- **النشاط : العمل المطلوب لاتمام حدث معين ويمثل بـ سهم يصل بين حدثين. ويعبر السهم عن وحدات أو تكلفة او أوقات.**

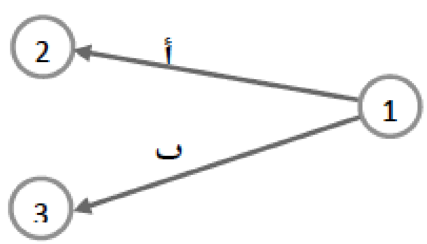
نشاط أ



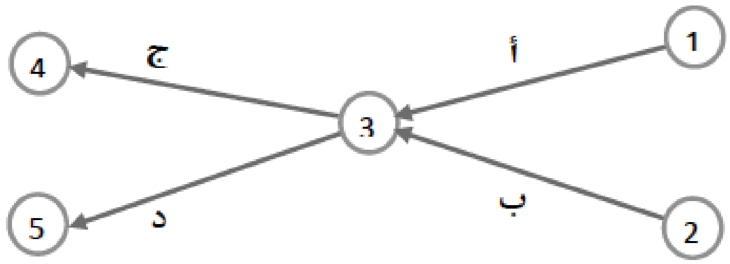
نشاط أ ، نشاط ب متتاليان



نشاط أ ، نشاط ب متوازيان

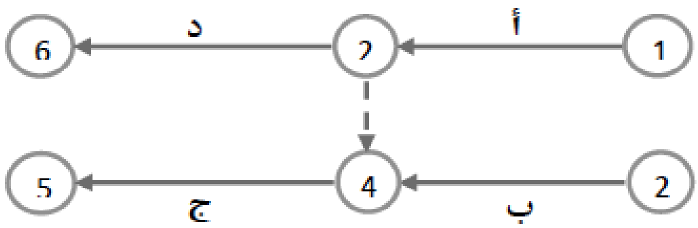


كلا من النشاطين ج ، د يتبعان النشاطين أ ، ب



نشاط ج يتبع النشاطين أ ، ب

نشاط د يتبع نشاط أ



- الشبكة : هي تمثيل بياني لكل متطلبات المشروع ، حيث يظهر عليها كل الأحداث والأنشطة والعلاقات المتداخلة والمستقلة للأحداث والانشطة ، ويمثل أول حدث على الشبكة نقطة البداية ، وآخر حدث نقطة النهاية للشبكة.
- الوقت المتوقع لإنجاز النشاط (و): هو متوسط الوقت اللازم لإتجاز النشاط في الظروف العادية.
- وقت البدء المبكر (ب ك) : هو أول وقت مبكر يمكن أن يبدأ فيه النشاط في الظروف العادية.
- وقت الانتهاء المبكر (هـ ك) : هو أقرب وقت يمكن أن ينتهي فيه تنفيذ النشاط
- وقت البدء المتأخر (ب خ) : هو آخر وقت يمكن أن يبدأ فيه النشاط ويظل من الممكن إنهاؤه في الوقت المحدد
- وقت الانتهاء المتأخر (هـ خ) : هو آخر وقت يمكن أن يسمح به لإنهاء النشاط دون أن يؤدي إلى تأخير الأنشطة اللاحقة.
- المسار الحرج: هو أطول مسار من الأنشطة المتصلة تبدأ من بداية الشبكة وتنتهي بنهايتها ، وطول المسار الحرج هو زمن إنهاء المشروع.
- الوقت الفائض هو هو أقصى وقت يمكن أن يؤخر به وقت بدء النشاط بعد وقت البدء المبكر دون ان يؤدي ذلك إلى تأخير وقت إنهاء المشروع.

قواعد بناء المخطط الشبكي:

من نقطة البداية إلى نقطة النهاية يجب ألا يكون هناك أي انقطاع في المجرى، ويوجد للمشروع نقطة بداية واحدة ونقطة نهاية واحدة. وفي نهاية عملية التحليل الشبكي تكون خطوات العمل بالمشروع (الأنشطة) محددة ومتتالية انطلاقا من الارتباط المنطقي والفني والاقتصادي.

8·6. SYMBOLS AND NOTATIONS

The following symbols and notations are generally used in queuing models :

n = total number of customers in the system, both waiting and in service

λ = average number of customers arriving per unit of time

μ = average number of customers being serviced per unit of time

C = number of parallel service channels

L_s or $E(n)$ = average number of customers in the system, both waiting and in service

L_q or $E(m)$ = average number of customers waiting in the queue

W_s or $E(v)$ = average waiting time of a customer in the system both waiting and in service

W_q or $E(w)$ = average waiting time of a customer in the queue

$P_n(t)$ = Probability that there are n customers in the system at any time t, both waiting and in service

ρ = Traffic intensity or utilization factor which represents the proportion of time the servers are busy $= \dfrac{\lambda}{\mu}$

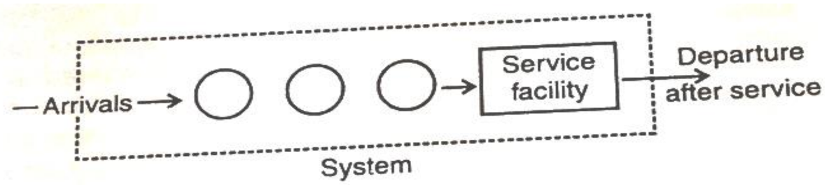


Fig. 8·2. Single-Channel Waiting Line

Then the model is given by the following equations :

Parameters	System	Queue	Remarks
1. Average waiting time per unit	$W_s = \dfrac{1}{(\mu - \lambda)}$	$W_q = \dfrac{1}{(\mu - \lambda)} \times \dfrac{\lambda}{\mu}$	
2. Average length (Number of units)	$L_s = \dfrac{\lambda}{(\mu - \lambda)}$	$L_q = \dfrac{\lambda}{(\mu - \lambda)} \times \dfrac{\lambda}{\mu}$	$L_s = \lambda \times W_s$
3. Non-empty queue length	$\dfrac{1}{\mu - \lambda} + \dfrac{\lambda}{\mu}$	$\dfrac{\mu}{\mu - \lambda}$	
4. Probability that there will be n or more units in the system	$\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n$		$P_n = P_0 \times \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n$
5. Probability that waiting time is more than t.	$e^{-(\mu - \lambda)t}$	$e^{-(\mu - \lambda)t} \times \dfrac{\lambda}{\mu}$	$P_0 = 1 - \dfrac{\lambda}{\mu}$

***Remarks.* 1.** Unless specified, the average waiting time means waiting time in queue (not in system).

2. The above relations hold good for Poisson/exponential distribution with λ and μ as arrival and service rates.

3. Utilization factor for the system, $\rho = \lambda/\mu$

8. Utilization rate : $\rho = \frac{\;}{k\mu}$.

Problem 8·1. *A supermarket has a single cashier. During the peak hours, customers arrive at a rate of 20 customers per hour. The average number of customers that can be processed by the cashier is 24 per hour. Calculate :*

(i) The probability that the cashier is idle.

(ii) The average number of customers in the queuing system.

(iii) The average time a customer spends in the system.

(iv) The average number of customers in the queue.

(v) The average time a customer spends in the queue waiting for service.

(C.A. Nov., 1998)

Solution. According to the given information :

Mean arrival rate, $\lambda = 20$ customers per hour

Mean service rate, $\mu = 24$ customers per hour

(i) Probability that the cashier is idle

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{20}{24} = \frac{1}{6} \text{ or } 0{\cdot}167$$

(ii) Average number of customers in the system :

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{20}{24 - 20} = 5$$

(iii) Average time a customer spends in the system :

$$W_s = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{24 - 20} = \frac{1}{4} \text{ hour or } 15 \text{ minutes}$$

(iv) Average number of customers waiting in the queue :

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

$$= \frac{(20)^2}{24(24 - 20)} = \frac{400}{24 \times 4} = 4{\cdot}167$$

(v) Average time a customer spends in the queue,

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{20}{24\,(24 - 20)}$$

$$= \frac{20}{96} \text{ hour or } 12{\cdot}5 \text{ minutes.}$$